Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2011

Übungsblatt 7

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **30.05.–03.06.2011** abzugeben.

Aufgabe 7.1 [Numerische Integration] (2 Punkte)

Das Integral

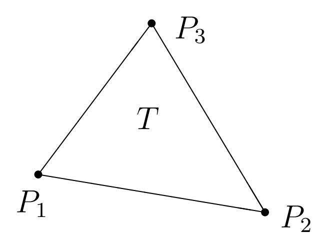
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x dx$$

soll näherungsweise berechnet werden.
Verwenden Sie hierzu die Trapez- und Simpsonregel als auch die Gauß-Legendre-Quadratur mit zwei und drei Stützstellen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

Aufgabe 7.2 [Kubaturformel] (2 Punkte)

Sei T ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_2 und P_3. Dann lautet die der Trapezregel entsprechende Kubaturformel

$$\int_T \phi(z)dz \approx \frac{|T|}{3}\left(\phi(P_1)+\phi(P_2)+\phi(P_3)\right). \quad (*)$$



a) Man zeige, dass (*) von der Ordnung 1 aber nicht besser ist.

b) Man konstruiere durch einmalige Kantenhalbierung aus (*) eine genauere Kubaturformel und zeige, dass diese von der Ordnung 2 aber nicht besser ist.
Hinweis: Durch die Kantenhalbierung wird T in vier Dreiecke zerlegt. Auf diesen kann die Formel (*) angewandt werden. Die Gesamtformel für die Berechnung über T ergibt sich dann als gewichtete Summe der Formeln für die Teildreiecke. Die Gewichte sind geeignet zu bestimmen.

c) Um die Teilaufgaben a) und b) einfacher bearbeiten zu können, kann T zunächst auf das Einheitsdreieck $\hat{T}$ transformiert werden. Man gebe hierfür eine affine Abbildung an.

Aufgabe 7.3 [Generierung von Kubaturformeln] (2 Punkte)

Kubaturformeln für Rechteckgebiete können leicht aus Tensorproduktansätzen eindimensionaler Quadraturformeln gewonnen werden. Zeige durch eine solche Überlegung, dass die Formel

$$\int_\Omega \phi(z)dz \approx \frac{|\Omega|}{4} \sum_{i,j=1}^{2} \phi(z_{ij})$$

bikubische Polynome exakt integriert, wobei $\Omega = (-1,1)^2$ und $z_{ij} := \frac{\sqrt{3}}{3}\left((-1)^i, (-1)^j\right)^T$.

Aufgabe 7.4 [Erhöhung der Ordnung] (2 Punkte)

Ein mathematisches Objekt u (z. B. eine Funktion oder ein Integral) sei durch u_h approximiert, wobei h ein Parameter der Näherung sei und u, u_h Elemente eines linearen Raumes $\mathcal{V}$ seien. Für den Fehler gelte die asymptotische Darstellung

$$u - u_h = \alpha h^p + \mathcal{O}(h^{p+m}), \quad h \to 0, \quad \alpha \in \mathcal{V}\backslash\{0\}, \;\; p, m \in \mathbb{N},$$

d. h. u_h ist eine Näherung an u der Ordnung p.
Man konstruiere eine Näherung an u der Ordnung $p+m$.
Hinweis: Richardson-Extrapolation; man betrachte die Näherungen zu h und qh mit einem festen $q \in (0,1)$.

Aufgabe 7.5 [Praktische Aufgabe]

Schreibe ein Programm, das nach Eingabe eines Intervalles $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ das Integral $I := \int\limits_a^b f(x)dx$ mit Hilfe von Rombergs Extrapolationsverfahrens näherungsweise berechnet.
Das Intervall $[a,b]$ wird äquidistant in Teilintervalle der Länge h zerlegt. Dann wird mit der summierten Trapezregel ein erster Näherungswert $I(h)$ berechnet. Analog werden die Werte $I(\frac{h}{2})$ und $I(\frac{h}{4})$ bestimmt. Anschließend wird das Interpolationspolynom $p_{h,\frac{h}{2},\frac{h}{4}}$ durch die Punkte $(h, I(h))$, $(\frac{h}{2}, I(\frac{h}{2}))$ und $(\frac{h}{4}, I(\frac{h}{4}))$ konstruiert und an der Stelle 0 ausgewertet. $p_{h,\frac{h}{2},\frac{h}{4}}(0)$ ist die berechnete Näherung von I.
Fahre fort, die Schrittweite zu halbieren, und das Interpolationspolynom durch die letzten drei berechneten Punkte zu konstruieren. Das Verfahren soll abbrechen, wenn zwei aufeinanderfolgende Polynomauswertungen an der Stelle 0 sich um weniger als eine vorgegebene Toleranz ε unterscheiden.
Nutze das Programm zur Berechnung der folgenden Integrale:

- $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, exakter Wert: 0,746824132812...
- $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{x}dx$, exakter Wert: 3,059116539646...