Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Christopher Hartleb

Universität Bielefeld
Sommersemester 2011

Einführung in die Numerische Mathematik
Sommersemester 2011
Übungsblatt 8

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **06.06.–10.06.2011** abzugeben.

Aufgabe 8.1 [3x3-Matrix] (1 Punkt)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Determinanten der Hauptminoren und die Eigenwerte von A und untersuche A auf Definitheit und Orthogonalität.

Aufgabe 8.2 [Frobenius-Norm] (3 Punkte)

a) Man zeige, dass durch

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

eine mit der euklidischen Vektornorm verträgliche Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert wird. Diese Norm heißt *Frobenius- oder Erhard-Schmidt-Norm*. Man zeige ferner, dass $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$, wobei tr die Spur (Summe der Hauptdiagonalelemente) bezeichne. Schließlich bestimme man $\|I\|_F$ und zeige, dass $\|\cdot\|_F$ nicht durch eine Vektornorm induzierbar ist.

b) Man zeige: Ist $\|\cdot\|$ eine durch eine Vektornorm induzierte Norm, so gilt stets $(1 + \|A\|)^{-1} \le \|(I + A)^{-1}\|$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtsinguläre, symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Man beweise:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_{i=1,\ldots,n} |\sigma_i|}{\min_{i=1,\ldots,n} |\sigma_i|}.$$

Aufgabe 8.3 [Geršgorinscher Kreisesatz] (2 Punkte)

Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man beweise:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \, |z - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

Aufgabe 8.4 [Kondition] (2 Punkte)

Gegeben sei die parameterabhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

a) Berechne die inverse Matrix A^{-1} und bestimme $\|A\|_\infty$ und $\|A^{-1}\|_\infty$.

b) Ermittle die Kondition $\mathrm{cond}_\infty(A)$. Welches Verhalten zeigt $\mathrm{cond}_\infty(A)$ für $\varepsilon \to 0$?

Aufgabe 8.5 [Tridiagonalmatrix] (4 Punkte)

a) Gesucht sei die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = d$ mit

$$A = \mathrm{tridiag}(b, a, c) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & c & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a \neq 0, a^2 \neq 4bc.$$

Die Matrix A heißt auch tridiagonale Toeplitz-Matrix.

Das Gleichungssystem habe sehr viele Unbekannte (n groß). Deshalb sind herkömmliche Gauß-Löser mit der Aufgabe überfordert.

Geben Sie – unter Ausnutzung der Tridiagonalgestalt von A – einen vereinfachten Gauß-Algorithmus an. Dabei sei angenommen, dass im Verlaufe des Algorithmus keine Division durch 0 auftreten kann.

b) Sei $A_n = \mathrm{tridiag}(b, a, c) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweise die rekursive Vorschrift

$$\det A_n = a \det A_{n-1} - bc \det A_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$\det A_1 = a\,, \quad \det A_2 = a^2 - bc$$

und die explizite Vorschrift

$$\det A_n = \frac{\xi_1^{n+1} - \xi_2^{n+1}}{\xi_1 - \xi_2},$$

wobei $\xi_{1,2}$ die Lösungen der zur Differenzengleichung (1) zugehörigen charakteristischen Gleichung $\xi^2 = a\xi - bc$ sind.

c) Zeige, dass A folgende Eigenwerte besitzt

$$\lambda_k = a - 2\sqrt{bc}\,\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

d) Zeige, dass für $b = c > 0$ die Eigenvektoren von A zu λ_k gegeben sind durch

$$x_k = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), -\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right)^T, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$