

Einführung in die Numerische Mathematik Sommersemester 2011 Übungsblatt 9

Die Lösungen sind vor dem Tutorium in der Woche vom **14.06.–17.06.2011** abzugeben.

Aufgabe 9.1 [Gleichungssystem mit schlecht konditionierter Matrix] (1 Punkt)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1,0001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,0001 \end{pmatrix}.$$

Stelle die beiden Gleichungen des Systems in einem (x, y) -Diagramm dar. Wie äußert sich die schlechte Kondition des Systems?

Aufgabe 9.2 [Cholesky-Zerlegung] (2 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 25 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -26 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Prüfe die Voraussetzungen für eine Cholesky-Zerlegung von A und bestimme diese, wenn möglich.
- b) Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von A .

Aufgabe 9.3 [Induzierte Matrixnorm] (2 Punkte)

Weise nach, dass die Zeilensummennorm durch die Maximumnorm induziert wird.

Aufgabe 9.4 [Kondition]

(2 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Man zeige: Es gibt eine Permutationsmatrix P mit $B = P^T A P$.
- b) Was lässt sich allgemein über $\text{cond}(A)$ und $\text{cond}(B)$ aussagen, wenn $B = P^T A P$ mit einer Permutationsmatrix P und die Kondition mit einer submultiplikativen Matrixnorm berechnet wird?

Aufgabe 9.5 [Gestörtes Gleichungssystem]

(3 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ und die Inverse von A .
- b) Für die Störung $\delta b = 10^{-3}(-1, 1)^T$ der rechten Seite löse man das gestörte Gleichungssystem $A\hat{x} = b + \delta b$ und bestimme die Störung $\delta x = \hat{x} - x$ sowie deren Summennorm $\|\delta x\|_1$ und Maximumnorm $\|\delta x\|_\infty$.
- c) Man vergleiche linke und rechte Seite der aus der Vorlesung bekannten Abschätzung

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.**Aufgabe 9.6** [Praktische Aufgabe]

Ein bekanntes Beispiel für schlecht konditionierte Matrizen sind die sogenannten Hilbert-Matrizen $H_n = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h_{ij} = (i + j - 1)^{-1}$, z. B.

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme H_4^{-1} unter Verwendung des Gauß-Algorithmus und $\text{cond}(H_4)$ bzgl. der Zeilen- als auch Spaltensummennorm exakt.
- Löse das Gleichungssystem $H_4 x = b$ mit $b = (1, 1, 1, 1)^T$ exakt.
- Löse dasselbe Gleichungssystem auf einem Rechner mit 8 signifikanten Stellen. Vergleiche mit dem exakten Ergebnis.