

Einführung in die Numerische Mathematik Inhalt der Vorlesung im Sommersemester 2011

I Einführung

- I.1 Gegenstand der Numerischen Mathematik
Mathematische Modellbildung, Fehlerquellen usw.

II Interpolation von Funktionen

II.1 Polynominterpolation

Interpolationsaufgabe; Zugänge nach Vandermonde, Lagrange und Newton; Schema der dividierten Differenzen; Existenz und Eindeutigkeit des interpolierenden Polynoms; Fehlerdarstellung; Fehler bei äquidistanter Zerlegung; Beispiel von Runge; Konvergenz der Folge interpolierender Polynome (ganze Funktionen, Sätze von Faber und Marcinkiewicz); Tschebyschew-Polynome und -Stützstellen; Fehlerabschätzung und Konvergenz bei Tschebyschew-Stützstellen

II.2 Satz von Weierstraß

Bernstein-Polynome; Approximationssatz von Weierstraß; Konvergenz in C^1

II.3 Approximation durch stückweise polynomialen Ansatz (Spline-Interpolation)

Definition Spline; stückweise konstante und stückweise lineare Approximation; Existenz, Fehlerabschätzung und Konvergenz bei kubischen Splines (Momente, quasiuniforme Zerlegung); strikt zeilendiagonaldominante Matrizen

II.4 Trigonometrische Interpolation und diskrete Fourier-Transformation

trigonometrische Polynome; Interpolation und diskrete Fourier-Transformation; schnelle Fourier-Transformation (FFT)

III Numerische Integration (Quadratur)

III.1 Newton-Cotes-Formeln

Konstruktion und Ordnung; Beispiele und Eigenschaften; interpolatorische Quadratur; Fehlerabschätzungen

III.2 Summierte Newton-Cotes-Formeln und Extrapolation

Konstruktion und Eigenschaften; summierte Trapez- und Simpsonregel; Richardson-Extrapolation; Extrapolation in die Null (Romberg-Integration); Fehlerabschätzungen und asymptotische Entwicklung

III.3 Gauß-Quadratur

Orthogonalpolynome; Konstruktion der Gauß-Legendre-Quadratur; Beispiele; Aussagen zur Ordnung; Nichtnegativität der Gewichte; Fehlerabschätzung

III.4 Konvergenz von Quadraturformeln

Satz von Steklov (Polya und Szegö); Satz von Kusmin; Anwendungen; Konvergenz der summierten Trapez- und Simpsonregel; Konvergenz der Gauß-Quadratur

IV Lineare Gleichungssysteme

IV.1 Matrixnormen, Kondition und Störungsresultate

Normen; induzierte Matrixnorm (Norm linearer, beschränkter Operatoren); Beispiele (Spaltensummen-, Zeilensummen-, Spektral-, Frobeniusnorm); elementare Ungleichungen; Störung linearer Gleichungssysteme (rechte Seite, Matrix); Kondition

IV.2 LR-Zerlegung und Gauß-Algorithmus

Gauß-Algorithmus; Aufwand; Durchführbarkeit des Gauß-Algorithmus; LR-Zerlegung (Frobenius-Matrizen); Pivotisierung; Permutationsmatrizen; Existenz und Eindeutigkeit der LR-Zerlegung; LR-Zerlegung von strikt zeilendiagonaldominanten und positiv definiten Matrizen; Bandmatrizen

IV.3 Cholesky-Zerlegung

LL^T -Zerlegung; LDL^T -Zerlegung; Aufwand; Wurzelalgorithmus

IV.4 Householder-Transformation und QR -Zerlegung

Definition und Eigenschaften der Householder-Transformation; rechteckige Matrizen und QR -Zerlegung; Aufwand; Stabilität

V Bestapproximation und Fehlerquadratmethode

V.1 Fehlerquadratmethode

Aufgabenstellung; Existenz und Eindeutigkeit des Ausgleichspolynoms; Vandermonde-Matrix; Berechnung mit Cholesky- und QR -Zerlegung; Fehlerausgleich in anderen Normen; statistische Deutung der Fehlerquadratmethode

V.2 Bestapproximation

Proxima in normierten Räumen; Existenz bei Vorliegen einer kompakten Teilmenge oder eines endlichdimensionalen Unterraums; Einzigkeit bei Vorliegen einer konvexen Menge oder eines strikt normierten Raums; Bestapproximation in Prä-Hilbert-Räumen; Fehlerquadratmethode und Normalgleichungssysteme

VI Nichtlineare Gleichungen und Iterationsverfahren

VI.1 Nichtlineare Gleichungen und verschiedene Verfahren

Nullstellen und Fixpunkte; Konvergenzordnung; Bisektionsverfahren; Regula falsi; Sekantenmethode; Newton-Verfahren

VI.2 Prinzip der kontrahierenden Abbildung

Fixpunktiteration; Banachscher Fixpunktsatz; Konvergenz des Newton-Verfahrens im endlichdimensionalen Fall; Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme und lokale quadratische Konvergenz

VII Fehleranalyse

Rechnerarithmetik und Zahldarstellung; Rundungsfehler und Fehlerfortpflanzung