Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

1.Übungsblatt

Abgabe bis 27.10.09 um 12 Uhr

Aufgabe 1: Medikation **ausnahmsweise 6 Punkte**

Ein Mensch besteht bekanntlich aus zwei Teilen: dem Verdauungsapparat und dem Blutkreislauf. Dieser Mensch, unser Patient, nimmt nun ein Medikament ein, z. B. den Blutdrucksenker Felodipin (ein Kalziumantagonist), das zuerst in den Verdauungsapparat gelangt und von dort an den Blutkreislauf abgegeben wird. Für die Wirkung eines solchen Medikaments ist die Menge im Blut entscheidend; durch die orale Einnahme kann aber nur die Menge im Verdauungstrakt direkt beeinflußt werden.

Der Wirkstoff wird im Blut abgebaut. Die relative Änderung der Wirkstoffmenge im Blut durch diesen Abbau in einer gewissen Zeitspanne kann dabei als proportional zu dieser Zeitspanne angesehen werden, sofern diese kurz genug ist. Gleiches gilt für den Transport des Medikaments vom Verdauungsapparat in den Blutkreislauf.

(i) Wir nehmen zuerst an, der Patient bekomme nur einmal eine Dosis Felodipin verabreicht. Wie sieht das Differentialgleichungssystem aus, das die Stoffmengen im Blut und in der Verdauung beschreibt? Löse das System und skizziere den Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut.

(ii) Ein Blutdrucksenker wird normalerweise nicht nur einmal, sondern in regelmäßigen Abständen in gleichen Dosen eingenommen. Was passiert mit dem Wirkstoffpegel im Blut auf lange Sicht?

(iii) Nach Injektion direkt in die Blutbahn ist bei Felodipin nach 14 Stunden noch die Hälfte der injizierten Dosis im Blut nachweisbar. Bei einmaliger oraler Verabreichung ist nach 1 Stunden die Hälfte der Wirkstoffmenge ins Blut übergegangen.[1]
Ein solches Medikament wird der Bequemlichkeit zuliebe häufig nur einmal täglich eingenommen. Unser Patient soll auf einen Wirkstoffspiegel von maximal 20 mg (nach der Einnahme) „eingestellt“ werden. Wie hoch muß die tägliche Dosis sein?

[1] Diese Geschwindigkeit kann sich allerdings, z.B. bei der gleichzeitigen Einnahme von Grapefruitsaft, deutlich erhöhen!

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Bestimme jeweils eine Lösung:

(i) $u' = tu^{-1}(1+u^2), \qquad u(0) = 1;$

(ii) $u' + 2u = \sin(t), \qquad u(0) = 0;$

(iii) $u' + Au = f, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0) = u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Vorgelegt sei das Anfangsrandwertproblem für die räumlich eindimensionale Wärmeleitgleichung

$$u_t - \varkappa u_{xx} = f \text{ in } (0,1) \times (0,T)\,, \quad \kappa > 0\,, \tag{1}$$

mit homogenen Dirichlet-Randdaten, d. h. $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$, und der anfänglichen Temperaturverteilung $u(\cdot, 0) = u_0$.

a) Stelle das Anfangswertproblem für das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf, wenn im Ort durch die folgende sogenannte Finite-Differenzen-Methode diskretisiert wird: Gesucht sind Näherungen $c_j \approx u(x_j, \cdot)$ zur äquidistanten Zerlegung von $[0,1]$ mit den Knoten $x_j = j/(M+1)$ $(j = 0, 1, \ldots, M+1)$. Dabei ergeben sich c_0 und c_{M+1} aus den Randbedingungen und c_j $(j = 1, \ldots, M)$ aus der Ortsdiskretisierung von (1), wenn die zweite Ableitung wie folgt approximiert wird:

$$u_{xx}(x_j, \cdot) \approx \frac{c_{j+1} - 2c_j + c_{j-1}}{h^2}\,, \quad h := \frac{1}{M+1}\,.$$

b) Wie verhalten sich die Eigenwerte der Masse- und Steifigkeitsmatrix für $M \to \infty$? (Hinweis zur Eigenwertberechnung: Die Steifigkeitsmatrix ist eine sogenannte tridagonale Toeplitz-Matrix.)