Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

11. Übungsblatt

Abgabe bis 26.01.10 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Zeige, daß die Quadraturformel

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4\,f(0) + f\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx \frac{6}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$$

von der Ordnung 5 aber nicht besser ist. (Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,$.)

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Zeige, daß die Legendre-Polynome Orthogonalpolynome zum $L^2(-1,1)$-Skalarprodukt sind. Gib die ersten fünf Legendre-Polynome (bis auf einen Normierungsfaktor) an und bestimme die Nullstellen der Legendre-Polynome vom Grade 3 und 4. Zeige, daß die Legendre-Polynome L_n $(n = 0, 1, \dots)$ der Differentialgleichung

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n-1)L_n(x) = 0\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

genügen.

Es bezeichne x_k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ die Nullstellen von L_n und $p \in \mathcal{P}^{n-1}$ ein beliebiges Polynom vom Grade kleiner oder gleich $n-1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ferner sei $\|\cdot\|$ die durch $(\cdot,\cdot)$ induzierte Norm. Man beweise die Abschätzung

$$\|p\| \leq \sqrt{2} \max_{k=0,\dots,n-1} |p(x_k)|\,.$$

(Hinweis: Man stelle p als auch das spezielle Polynom $q(x) \equiv 1$ als Linearkombination Lagrangescher Polynome mit den Stützstellen x_k dar und nutze die Orthogonalität der Legendre-Polynome.)

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren habe paarweise verschiedene Abszissen c_j $(j = 1, \dots, s)$, und sämtliche Gewichte b_j $(j = 1, \dots, s)$ seien ungleich Null. Zeige, daß dann gilt:

i) aus den Bedingungen $B(s+\nu)$ und $C(s)$ folgt die Bedingung $D(\nu)$;

ii) aus den Bedingungen $B(s+\nu)$ und $D(s)$ folgt die Bedingung $C(\nu)$.