

Numerik II

2.Übungsblatt

Abgabe bis 03.11.09 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1:

3 Punkte

Die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population kann unter gewissen Annahmen durch das *SIR-Modell* (Kermack/Mc Kendrick, 1927) mathematisch beschrieben werden. Hierbei wird die Population in drei Klassen unterteilt:

S (susceptibles) ... jene, die für die Krankheit anfällig sind;

I (infectives) ... jene, die die Krankheit übertragen können;

R (removed) ... jene, die aus dem Krankheitsprozeß ausgeschieden sind.

Bezeichnen $S(t)$, $I(t)$ und $R(t)$ die nichtnegative Anzahl der Individuen der entsprechenden Klassen zum Zeitpunkt $t \geq 0$, so wird die zeitliche Entwicklung der Krankheit durch das System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \quad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

mit den Anfangsbedingungen $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ und $R(0) = 0$ beschrieben, wobei $r > 0$, die Infektionsrate, und $\gamma > 0$, die Ausscheidungsrate, als konstant angenommen werden. Eine weitere Grundannahme des Modells ist, daß die Inkubationszeit vernachlässigbar klein ist und so der Übergang $S \rightarrow I$ ohne zeitlichen Verzug erfolgt.

a) Was läßt sich über $S(t) + I(t) + R(t)$ aussagen?

b) Bestimme I als Funktion von S , $I = \phi(S)$, und skizziere $I = \phi(S)$ für verschiedene Anfangswerte I_0 , S_0 .

c) Die Entwicklung einer Epidemie hängt wesentlich vom Schwellenwert $\rho := \gamma/r$ ab. Beweise:

i) $S = S(t)$ ist stets monoton fallend;

ii) $I = I(t)$ ist monoton fallend, falls $S_0 < \rho$;

iii) Es gibt ein $t^* > 0$ mit $I(t^*) > I_0$, falls $S_0 > \rho$. (Man sagt dann, es entwickle sich eine Epidemie.)

d) Bestimme – ausgehend von der Differentialgleichung für I und Teilaufgabe b) – die maximale Anzahl der Infizierten im Verlaufe der Krankheit.

e) Bei einer durch einen Schüler ausgelösten Grippeepidemie in einer englischen Internatsschule mit 763 Schülern wurden vom 22. Januar bis 4. Februar 1978 insgesamt 512 Krankheitsfälle registriert. Die Infektionsrate lag bei $2.18 \cdot 10^{-3}$ pro Tag und die Schranke $\rho = \gamma/r$ betrug 202.

Löse das Anfangswertproblem numerisch unter Verwendung bereits vorinstallierter Routinen (bei MATLAB etwa mit *ode23* oder *ode45*) und veranschauliche den zeitlichen Verlauf von S , I und R . Zeichne auch ein S - I -Diagramm. Vergleiche anschließend mit dem Fall, daß $\rho = 703$ und anfänglich bereits 61 Schüler infiziert waren.

Aufgabe 2:

3 Punkte

Beweise den aus der Vorlesung bekannten Satz von Picard–Lindelöf mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Schreibe eine Programm (vorzugsweise in MATLAB), welches die Eulerschen Polygonzüge zu einem gegebenen Anfangswertproblem, einem geeignet vorgegebenem Zeitintervall und einer Folge äquidistanter Zerlegungen dieses Intervalls, bei der jeweils die Schrittweite halbiert wird, berechnet und graphisch ausgibt. Teste das Programm für die Beispiele aus Aufgabe 2 i), ii) von Blatt 1 sowie ein selbst gewähltes, geeignetes Beispiel und vergleiche die Näherungslösungen mit der/einer exakten Lösung.

(Über die Anforderungen an die Lösung einer derartigen praktischen Aufgabe informiert Jens Kemper in der Übung. Insbesondere ist der Quelltext an jkemper@math.uni-bielefeld.de zu senden.)