Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

3. Übungsblatt

Abgabe bis 10.11.09 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Beweise die folgenden diskreten Versionen zum Gronwallschen Lemma (in Analogie zu den für das Kontinuierliche aus der Vorlesung bekannten Beweisen). Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit der Konvention $\sum_{j=0}^{-1} \ldots := 0$ gilt:

i) Aus

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n-1} a_j\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und $\lambda > 0$ folgt

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n-1} (1+\lambda\tau)^{n-j-1} b_j\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

ii) Aus

$$a_n \leq b_n + \lambda\tau \sum_{j=0}^{n} a_j\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und $\lambda > 0$ mit $\lambda\tau < 1$ folgt

$$a_n \leq b_n + \frac{\lambda\tau}{1-\lambda\tau} \sum_{j=0}^{n} (1-\lambda\tau)^{-n+j} b_j\,, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

iii) Aus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} \leq g_n + \lambda a_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und $1 + \lambda\tau > 0$ folgt

$$a_n \leq (1+\lambda\tau)^n \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (1+\lambda\tau)^{-(j+1)} g_j \right)\,, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

iv) Aus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} \leq g_{n+1} + \lambda a_{n+1}\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und $1 - \lambda\tau > 0$ folgt

$$a_n \le (1-\lambda\tau)^{-n} \left(a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (1-\lambda\tau)^j g_{j+1} \right) , \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Aufgabe 2: **ausnahmsweise 6 Punkte**

Sei $\mathbb{R}^d$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt.
a) Unter welchen Voraussetzungen an $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist das lineare System $u'(t)+Au(t) = f(t)$ $(t \in [0,\infty))$ dissipativ? Bestimme bestmöglich die Konstante μ aus der Definition der starken Dissipativität.
b) Berechne die Lösung des zugehörigen homogenen Systems mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

zur Anfangsbedingung $u(0) = (0,1)^T$ sowohl exakt als auch numerisch mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren (für eine klein genug gewählte Schrittweite). Beschreibe das Verhalten der Lösung, gemessen in der Euklidischen Norm, als auch der einzelnen Lösungskomponenten. Sind die entsprechenden Systeme dissipativ?
c) Kann ein anderes Skalarprodukt gefunden werden, so daß das lineare System mit der ersten Matrix aus Teil b) dissipativ ist?