Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

4. Übungsblatt

Abgabe bis 17.11.09 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Wie lauten die Einzigkeitsaussagen bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen von Osgood, von Nagumo, unter lokaler Lipschitz-Bedingung und unter einseitiger Lipschitz-Bedingung? Gib für jedes Kriterium ein geeignetes Beispiel an, auf das die jeweils anderen Kriterien nicht anwendbar sind.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Seien $T > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$). Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)) \, , \; t \in [0, T] \, , \quad u(0) = u_0 \, ,$$

wobei es zu $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein $L \geq 0$ gebe, so daß für alle $s, t \in [0, T]$ und $v, w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\|f(s, v) - f(t, w)\| \leq L \left(|s - t| + \|v - w\| \right) .$$

Betrachte das ϑ-Verfahren ($\vartheta \in [0, 1]$) auf einer äquidistanten Zerlegung von $[0, T]$ mit $t_n = n\tau$ ($\tau = T/N$, $N \in \mathbb{N}$) zur näherungsweisen Berechnung von $u^n \approx u(t_n)$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) bei gegebenem $u^0 \approx u_0$,

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = (1 - \vartheta) f(t_{n-1}, u^{n-1}) + \vartheta f(t_n, u^n) \, , \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1 \, .$$

Zeige unter geeignet gewählten Voraussetzungen

a) die Wohldefiniertheit des Verfahrens,

b) die von der Wahl der Schrittweite unabhängige Beschränktheit der zeitdiskreten Lösung und ihrer diskreten Ableitung (Differenzenquotient),

c) die stetige Abhängigkeit der zeitdiskreten Lösung vom Anfangswert,

d) eine Fehlerabschätzung erster Ordnung für den Fall $\vartheta \neq 1/2$,

e) eine Fehlerabschätzung zweiter Ordnung für den Fall $\vartheta = 1/2$.