Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

8. Übungsblatt

Abgabe bis 15.12.09 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei X_τ der aus der Vorlesung bekannte Raum der Gitterfunktionen. Für eine Gitterfunktion $v_\tau = (v^0, \ldots, v^N) \in X_\tau$ sei

$$\|v_\tau\|_{0,\infty} := \max(\|v^0\|, \ldots, \|v^N\|), \quad \|v_\tau\|_{0,1} := \|v^0\| + \sum_{j=1}^{N} \tau_j \|v^j\|,$$

$$\|v_\tau\|_{1,1} := \|v_\tau\|_{0,1} + \sum_{j=1}^{N} \tau_j \left\| \frac{v^j - v^{j-1}}{\tau_j} \right\|.$$

Zeige, daß es eine vom Gitter (also von τ) unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $v_\tau \in X_\tau$ gilt

$$\|v_\tau\|_{0,\infty} \le C \|v_\tau\|_{1,1}.$$

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Zeige – unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensfunktion – Stabilität, Konsistenz und Konvergenz des allgemeinen expliziten Einschrittverfahrens bezüglich $(X_\tau, \|\cdot\|_{1,1})$ und $(Y_\tau, \|\cdot\|_{0,1})$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Zeige – wiederum unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensfunktion – die Stabilität des allgemeinen expliziten Einschrittverfahrens bezüglich $(X_\tau, \|\cdot\|_{0,\infty})$ und $(Y_\tau, \|\cdot\|_{-1,\infty})$. Dabei ist $\|\cdot\|_{-1,\infty}$ die sogenannte Spijker-Norm: Für eine Gitterfunktion $b_\tau = (b^0, \ldots, b^N) \in Y_\tau$ ist (mit der Konvention $\sum_{j=1}^{0} \ldots := 0$)

$$\|b_\tau\|_{-1,\infty} := \max_{n=0,1,\ldots,N} \left\| b^0 + \sum_{j=1}^{n} \tau_j b^j \right\|.$$