Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

9. Übungsblatt

Abgabe bis 12.01.10 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128
Wir wünschen frohe Weihnachten und alles Gute für 2010!

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei $\tau > 0$ hinreichend klein und $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ $(d \in \mathbb{N})$. Zeige, daß $(I - \tau B)^{-1}$ existiert und daß gilt

$$(I - \tau B)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau B)^{\nu} \,.$$

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Wende das ϑ-Verfahren mit variablen Zeitschritten als auch das durch die Funktion (Padé-Approximation)

$$r(z) = \frac{1 + \frac{z}{3}}{1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}$$

bestimmte Verfahren auf ein lineares, autonomes Anfangswertproblem an und zeige Stabilität, Konsistenz und diskrete Konvergenz in geeigneten Normen. Bestimme auch eine Potenzreihenentwicklung und deren Konvergenzradius. Zeichne die zugehörigen Funktionen $r = r(z)$ als auch die Exponentialfunktion in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Teste das explizite Euler-Verfahren, das modifizierte Euler-Verfahren und die Methode von Heun für das Anfangswertproblem

$$u'(t) = -2tu(t)^2 \,, \quad t \in [0,1] \,, \quad u(0) = 1 \,.$$

Verifiziere die diskrete Konvergenz der entsprechenden Ordnung in den Normen $\|\cdot\|_{0,\infty}$ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$.

Das modifizierte Euler-Verfahren ist dabei durch die Verfahrensfunktion

$$\varphi(t, v, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v)\right)$$

bestimmt.