Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Numerik II – Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Inhalt und Prüfungsthemen

im Wintersemester 2009/10

1. **Einführung. Anwendungsbeispiele**
   Elementare Lösungstechniken (Trennung der Veränderlichen, Prinzip von Duhamel), Beispiele von Differentialgleichungsproblemen, die sechs großen Fragen.

2. **Existenz und Einzigkeit. Sätze von Picard-Lindelöf und Peano. Eulersches Polygonzugverfahren**
   Beispiele, Integral für stetige Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ (ohne Beweis), Satz von Picard-Lindelöf (mit Beweis), Satz von Banach (ohne Beweis), Satz von Peano (mit Beweis), Satz von Arzelà-Ascoli (ohne Beweis), Eulersches Polygonzugverfahren und dessen Konvergenz (mit Beweis).

3. **Maximal fortgesetzte Lösung. Stabilität. Regularität. Dissipative Systeme**
   Maximal fortgesetzte Lösung und Randverhalten (globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz, ohne Beweis), Regularität (Idee des Bootstrap-Arguments), Lemma von Gronwall (mit Beweis, auch diskret), stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingung und rechter Seite (mit Beweis), dissipative Systeme und stetige Abhängigkeit bei dissipativen Systemen (mit Beweis).

4. **Explizites und implizites Euler-Verfahren, ϑ-Verfahren, Crank-Nicolson-Verfahren**
   Globale Lösbarkeit bei globaler Lipschitz-Bedingung (mit Beweis), Definition der Verfahren, One-leg-Varianten, Analyse der genannten Verfahren (Wohldefiniertheit, stetige Abhängigkeit, gleichmäßige Beschränktheit, Diskretisierungsfehler, jeweils mit Beweis), Anwendung der One-leg-Varianten auf dissipative Systeme (mit Beweis), dazu Hilfsresultat zur Wohldefiniertheit (mit Beweis), Brouwerscher Fixpunktsatz (ohne Beweis)

5. **Satz von Kantorowitsch und Lax: Stabilität, Konsistenz und Konvergenz**
   Allgemeines Approximationsschema für Operatorgleichungen und deren diskrete Ersatzprobleme, Restriktionen und Prolongationen, Stabilität, diskrete Konvergenz, Zusammenhang zwischen Stabilität von Prolongation, Kompatibilität von Restriktion und Prolongation sowie diskreter und kontinuierlicher Konvergenz (mit Beweis), Konsistenz, stabile Approximation, Satz von Kantorowitsch und Lax (mit Beweis).

6. **Stabilität, Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren**
   Approximationsschema zur Betrachtung von Einschrittverfahren, Wahl der Normen auf den Räumen von Gitterfunktionen, Stabilität unter Lipschitz-Bedingung (mit Beweis), Konsistenz und Bedingungen an die Verfahrensfunktion φ (mit Beweis), diskrete Konvergenz als Anwendung des Satzes von Kantorowitsch und Lax, Beispiele (u. a. Verfahren von Heun), allgemeines Einschrittverfahren für lineare, autonome Probleme (erzeugt durch Funktion r, Voraussetzungen an r), Stabilität und Konsistenz unter Bedingungen an r (mit Beweis), Beispiele für rationale Approximation (Padé-Approximation).

7. **Runge-Kutta-Verfahren**
   Definition der Verfahren (Stufen- und Steigungswerte) und Beispiele, Butcher-Tableau, Wohldefiniertheit bei impliziten Verfahren (mit Beweis), Schrittweitensteuerung und eingebettete Verfahren, Konsistenz und “simplifying conditions” (mit Beweis nur für Ordnung 1 und 2),

Stabilität unter Lipschitz-Bedingung (mit Beweis), diskrete Konvergenz als Anwendung des Satzes von Kantorowitsch und Lax.

8. **Gauß-Quadratur und Runge-Kutta-Verfahren**
   Idee der Quadratur, interpolatorische Quadratur, Konsistenz und maximale Ordnung (mit Beweis), Konsistenz bei "simplifying condition" $B(r+1)$, Orthogonalpolynome (Legendre-Polynome), optimale Ordnung der Gauß-Quadratur (mit Beweis), Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren aus der Gauß-Quadratur und deren Konsistenzordnung (mit Beweis).

9. **Lineare Mehrschrittverfahren**
   Beispiele und Konstruktion, erzeugende Polynome, Wohldefiniertheit von impliziten Verfahren, Idee der Prädiktor-Korrektor-Verfahren, Approximationsschema zur Betrachtung linearer Mehrschrittverfahren, Konsistenzbedingungen (mit Beweis), Stabilität unter Lipschitz-Bedingung und Wurzelbedingung (mit Beweis), diskrete Konvergenz als Anwendung des Satzes von Kantorowitsch und Lax. [Nullstabilität, Differenzengleichungen sind nicht Gegenstand der Prüfung.]