

# Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie II

## Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Hurewicz-Satz (2-6)

Satz von Poincaré (2)

Satz von Hurewicz (3)

Satz von Whitehead (4)

Hurewicz-Abbildung (5-6)

Homotopie-Additions-Satz (7-16)

Abbildungs-Grad (7-8)

Homotopie-Additions-Satz (10)

Modifizierte Homotopiegruppen (11)

Die  $n$ -te Homotopiegruppe der  $n$ -Sphäre (17-21)

erste Berechnung (20)

zweite Methode (Differenzierbarkeit) (20)

dritte Methode (Simpliziale Approximation) (21)

Beweis des Hurewicz-Satzes (22-29)

Ein Unterkomplex des singulären Komplexes (22-24)

Bemerkung: Adjungiertheit von "singulärem Komplex" und "geometrischer Realisierung" (25)

Variante des Beweises (Skizze) (30-33)

Faserbündel (34-36)

Räume über  $B$  (34)

lokale Trivialisierung (34)

Bündel-Isomorphismus (35)

Varianten: Vektorbündel, etc. (36)

Schnitt (36)

Hopf-Faserung (37-40)

Homotopiegruppen der Hopf-Faserung (37)

Projektiver Raum (38)

Prinzipalbündel (38)

Homotopie-Liftungs-Eigenschaft, Faserungen (41-47)

HLE (41-42)

Hurewicz-Faserung, Serre-Faserung (42)

lange exakte Folge einer Faserung (42)

HLEP (44)

Faserbündel sind Faserungen (45)

Vergleich verschiedener Fasern (47)

Induzierte Faserungen	(48-49)
Faserprodukt (oder “Pullback”)	(48)
Abbildungsräume	(50-55)
Funktionen und partielle Funktionen	(50)
metrische Abbildungsräume	(50)
kompakt-offene Topologie	(51)
Exponentialgesetz	(51)
Wege-Räume, Schleifen-Räume	(56-59)
Serre-Faserung von Abbildungsräumen	(56)
Homotopiegruppen des Schleifenraumes	(57)
Ersetzen einer Abbildung durch eine Faserung	(58)
Homotopie-Faser	(59)
Relative Homotopiegruppen einer Abbildung	(60-63)
relative Homotopiegruppen sind die Homotopiegruppen der Homotopie-Faser	(62)
CW-Approximationen, Co-Skelette	(64-69)
Moore-Postnikov-Turm	(68)
Eilenberg-MacLane-Räume	(69; 79, 81)
Fundamentalgruppen von CW-Komplexen	(70-78)
freie Gruppe	(70)
Gruppen-Präsentation	(71)
Fundamentalgruppe eines 1-dimensionalen CW-Komplexes	(72, 77)
maximaler Baum	(76)
Untergruppen freier Gruppen	(76)
Jede Gruppe ist Fundamentalgruppe	(78)
Vorgegebene Homotopiegruppen	(79-88)
Eilenberg-MacLane-Räume	(79, 81)
Beispiel: $\pi_2(S^1 \vee S^2)$	(79, 81)
Vorgegebene Homotopiegruppen mit vorgegebener Operation der Fundamentalgruppe	(84, 88)
Mannigfaltigkeiten, Poincaré-Vermutung	(89-94)
2-Mannigfaltigkeiten	(89)
Homologie-Sphären	(90)
Poincaré-Vermutung	(92)
höher-dimensionale Poincaré-Vermutung	(93)
exotische Sphären	(93)
h-Kobordismen	(94)
Whitehead-Gruppe	(95-102)
elementare Erweiterungen, einfache Homotopie-Äquivalenz	(96)
geometrische Definition der Whitehead-Gruppe	(98)
algebraische Definition der Whitehead-Gruppe	(102)

# Algebraische Topologie II

## Einführung

Es geht hier um *Homotopietheorie*. Stichworte sind:

*Hurewicz-Satz*

(Beziehung zwischen Homotopiegruppen und Homologiegruppen),

*Faserungstheorie*

(auf die Weise kommen die langen exakten Folgen von Homotopiegruppen in die Welt),

*u.a.*

## Hurewicz-Satz

Sei  $X$  ein Raum. Wir wollen von *Homotopiegruppen* reden, also wählen wir einen Basispunkt  $x_0 \in X$ . Der Satz, um den es hier geht, wurde von seinem Autor, eben Hurewicz, im wesentlichen gleichzeitig mit der Definition der Homotopiegruppen publiziert. Der Satz gibt eine erste numerische Information über die Homotopiegruppen, indem er diese mit den entsprechenden *Homologiegruppen* in Beziehung setzt (die sind ja oft sehr einfach zu berechnen). Im Falle der *ersten* Homotopiegruppe (der Fundamentalgruppe) ist der Satz noch älter und stammt vom Erfinder der Fundamentalgruppe, Poincaré.

Von der  $n$ -ten Homotopiegruppe  $\pi_n(X, x_0)$  haben wir eine (kanonische) Abbildung in die  $n$ -te Homologiegruppe  $H_n(X)$ , wie wir uns in Kürze klarmachen werden; diese Abbildung wird als die *Hurewicz-Abbildung* bezeichnet. Der Hurewicz-Satz nun ist die Aussage, daß diese Abbildung in manchen Fällen ein Isomorphismus ist (oder zumindest so etwas ähnliches).

**Satz** (Hurewicz). *Sei  $X$  ein einfach-zusammenhängender Raum (oder, was dasselbe ist,  $X$  ist weg-zusammenhängend und die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  ist trivial). Sei  $n \geq 2$  eine Zahl, und es gelte, daß die Homotopiegruppen  $\pi_i(X, x_0)$  für  $i \leq n-1$  sämtlich trivial sind. Dann sind auch die entsprechenden Homologiegruppen  $H_i(X)$  für  $i \leq n-1$  sämtlich trivial, und die Abbildung*

$$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

*ist ein Isomorphismus.*

In dem ausgeschlossenen Fall  $n = 1$  kann man eine ganz so einfache Formulierung nicht erwarten, denn  $H_1(X)$  ist ja eine abelsche Gruppe, aber  $\pi_1(X)$  muß durchaus nicht abelsch sein. Man wird sich also damit behelfen müssen, daß man die kanonische Faktorisierung über die abelsch gemachte Fundamentalgruppe betrachtet,

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X) .$$

**Satz** (Poincaré). *Sei  $X$  ein weg-zusammenhängender Raum. Die Abbildung*

$$\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X)$$

*ist ein Isomorphismus.*

Von großem Interesse ist auch eine Version des Satzes für *relative* (Homotopie- und Homologie-) Gruppen. Auch da ist es notwendig, einen eventuellen schädlichen Einfluß der Fundamentalgruppe zur Kenntnis zu nehmen und entsprechend dann auch in Rechnung zu stellen.

Sei nämlich  $A$  ein Unterraum von  $X$ ; der Basispunkt  $x_0$  liege in  $A$ . Wir sind an der Situation interessiert, wo  $A$  und  $X$  beide weg-zusammenhängend sind und wo beide dieselbe Fundamentalgruppe haben (d.h. wo die Abbildung  $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  ein Isomorphismus ist). In dem Fall ist die Menge  $\pi_1(X, A; x_0)$  trivial (= ein-elementig); das wird uns der Notwendigkeit entheben, diese Menge (die ja keine Gruppe sein muß) jemals ernsthaft zu betrachten. Die erste möglicherweise nicht verschwindende relative Homotopiegruppe ist also  $\pi_2(X, A; x_0)$ . Dies ist, wie wir wissen, tatsächlich eine Gruppe, wenn auch eine möglicherweise nicht-abelsche; die höheren relativen Homotopiegruppen (von Nr. 3 an) sind alle abelsch.

Es ist aber nicht nur die Frage "abelsch oder nicht", die hier relevant ist. Es geht auch um die *Operation der Fundamentalgruppe*: die Fundamentalgruppe von dem Unterraum  $A$  operiert ja durch Automorphismen auf der relativen Homotopiegruppe  $\pi_n(X, A; x_0)$ . Andererseits ist es so (wie wir nachprüfen werden), daß die Hurewicz-Abbildung diese Operation "nicht sieht"; d.h. wenn  $\alpha \in \pi_n(X, A; x_0)$  und  $w \in \pi_1(A; x_0)$ , dann haben  $\alpha$  einerseits und das durch die Operation von  $w$  entstehende Element  $w(\alpha)$  andererseits dasselbe Bild unter der Hurewicz-Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow H_n(X, A) .$$

Wir wollen mit  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$  nun diejenige Quotientengruppe der abelsch gemachten Gruppe bezeichnen, die durch das *Trivialisieren* der Operation entsteht (tatsächlich bekommt man auch im Fall  $n = 2$  automatisch schon eine *abelsche* Quotientengruppe, sobald man nur die Operation trivialisiert, 'abelsch-machen' wäre also nicht nötig; dies Detail wollen wir aber nicht verfolgen). Die Hurewicz-Abbildung faktorisiert nun als

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A; x_0)^\dagger \longrightarrow H_n(X, A) .$$

**Satz** (Hurewicz). *Sei  $A$  Unterraum von  $X$ , wobei  $A$  und  $X$  weg-zusammenhängend sind und  $\pi_1(A; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_0)$  ein Isomorphismus. Sei  $n \geq 2$  eine Zahl, und es gelte, daß die relativen Homotopiegruppen  $\pi_i(X, A; x_0)$  für  $i \leq n-1$  sämtlich trivial sind. Dann sind auch die entsprechenden Homologiegruppen  $H_i(X, A)$  für  $i \leq n-1$  sämtlich trivial, und die Abbildung*

$$\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \longrightarrow H_n(X, A)$$

*ist ein Isomorphismus.*

Wohlgermerkt, die Voraussetzung des Satzes betrifft die relativen Homotopiegruppen  $\pi_i(X, A; x_0)$  selbst und nicht etwa die reduzierten Gruppen  $\pi_i(X, A; x_0)^\dagger$ . Das macht es plausibel, daß der Satz in dieser Form nicht besonders nützlich für Anwendungen ist. Daß man den Satz überhaupt in dieser allgemeinen Form zur Kenntnis nimmt, hat in erster Linie beweistechnische Gründe (wie wir sehen werden).

Der für die Anwendungen wichtige Fall ist der, wo die Fundamentalgruppe trivial ist. In dem Fall macht der Satz eine Aussage über die relativen Homotopiegruppen selbst, denn bei trivialer Fundamentalgruppe ist natürlich zwischen  $\pi_n(X, A; x_0)$  und  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$  kein Unterschied.

Es ist auf den ersten Blick überraschend, daß die böse Einschränkung der Allgemeinheit (“triviale Fundamentalgruppe”) trotzdem Schlußfolgerungen im allgemeinen Fall zuläßt. Das liegt an dem Trick mit der *universellen Überlagerung*. Wir illustrieren den Trick mit einer berühmten Formulierung des Whitehead-Satzes.

**Satz** (Whitehead). *Seien  $X$  und  $Y$  (weg-)zusammenhängende CW-Komplexe. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Die folgenden drei Aussagen sind zueinander äquivalent.*

- (1)  *$f$  ist eine Homotopie-Äquivalenz.*
- (2)  *$f$  induziert Isomorphismen der Homotopiegruppen.*
- (3)  *$f$  induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen und, zweitens, einen Isomorphismus der Homologiegruppen der universellen Überlagerungen,  $H_n(\tilde{X}) \rightarrow H_n(\tilde{Y})$ .*

BEWEIS (Skizze). O.B.d.A. (Ersetzen von  $Y$  durch den Abbildungs-Zylinder der (o.B. d.A. zellulären) Abbildung  $f$ ) können wir annehmen, daß die Abbildung  $f$  eine *zelluläre Inklusion* ist. Die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2) ist uns schon bekannt. Wir benutzen den Hurewicz-Satz (sowie andere uns schon bekannte Dinge) um die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) einzusehen. — Ob wir nun (2) oder (3) als gegeben ansehen, in jedem Fall ist es auf Grund unserer Annahmen richtig, daß die Abbildung  $f$  einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert.

Bei CW-Komplexen wie  $X$  und  $Y$  existieren die universellen Überlagerungen  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$ . Auch die Räume  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  haben zueinander isomorphe Fundamentalgruppen (nämlich triviale).

Sei  $x_0 \in X$  ein Basispunkt, sei  $y_0$  der Bildpunkt  $y_0 = f(x_0)$ . Sei  $\tilde{x}_0$  irgendeine Liftung von  $x_0$  (d.h. ein Punkt in  $\tilde{X}$  über  $x_0$ ), und sei  $\tilde{y}_0$  irgendeine Liftung von  $y_0$ . Auf Grund des allgemeinen Liftungs-Satzes wissen wir, daß eine (und auch nur eine) Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  existiert, mit  $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ , so daß  $\tilde{f}$  Liftung von  $f$  ist, d.h., so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutiert. Nach einer anderen Anwendung des Liftungs-Satzes wissen wir, daß die vertikalen Abbildungen Isomorphismen der Homotopiegruppen induzieren (für  $n \geq 2$ ),

$$\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, x_0) \quad , \quad \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, y_0) \quad .$$

Vergleich der langen exakten Folgen der Homotopiegruppen für die Raumpaare  $(\tilde{Y}, \tilde{X})$   $(Y, X)$  zeigt deshalb, daß sich die obige Nr. 2 übersetzt in die folgende Nr. 2',

- (2') die relativen Homotopiegruppen  $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$  sind sämtlich trivial.

Wegen der langen exakten Folge der Homologiegruppen andererseits übersetzt sich die obige Nr. 3 in die folgende Nr. 3',

- (3') die relativen Homologiegruppen  $H_n(\tilde{Y}, \tilde{X})$  sind sämtlich trivial.

Auf Grund des Hurewicz-Satzes nun sind die Aussagen (2') und (3') zueinander äquivalent. Denn wir sind im einfach-zusammenhängenden Fall. Sei  $k$  eine Zahl  $\geq 2$ . Es gelte, daß  $\pi_i(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$  trivial ist für alle  $i \leq k-1$ . Nach dem Hurewicz-Satz ist dann auch  $H_i(\tilde{Y}, \tilde{X})$  trivial für alle  $i \leq k-1$ . Ferner ist  $\pi_k(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$  isomorph zu  $H_k(\tilde{Y}, \tilde{X})$ ; das heißt,  $\pi_k(\tilde{Y}, \tilde{X}; \tilde{x}_0)$  ist genau dann trivial, wenn  $H_k(\tilde{Y}, \tilde{X})$  es ist. Wir haben also ein induktives Argument.  $\square$

Was die Geschichte so faszinierend macht, ist die Tatsache, daß es nur scheinbar so ist, als sei die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  nicht mehr da. In Wirklichkeit ist sie immer noch da — oder, wenn man so will, eine Re-Inkarnation von ihr in Form einer isomorphen Kopie; nämlich die Decktransformationengruppe der universellen Überlagerung  $\tilde{X}$ . In der Situation des gerade beschriebenen Arguments sind die Homotopiegruppen  $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  und Homologiegruppen  $H_n(\tilde{X})$  mit einer interessanten zusätzlichen Struktur versehen (die in dem obigen Argument nicht verwendet wurde, die aber oft eine wichtige Rolle spielt). Nämlich alle diese Gruppen kommen versehen mit einer Operation von  $\pi_1(X, x_0)$  oder, wenn man es etwas algebraischer formulieren will, sie sind Moduln über dem Gruppenring dieser Gruppe.

Für die Beschreibung der Hurewicz-Abbildung behandeln wir zuerst den relativen Fall, wo wir also eine Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

konstruieren wollen. Die Homologie soll hier Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  haben, der abelschen Gruppe (oder dem Ring) der ganzen Zahlen. Tatsächlich werden wir etwas mehr benötigen als die Tatsache, daß  $\mathbb{Z}$  eine abelsche Gruppe ist. Nämlich wir benötigen zusätzlich noch die Kenntnis dessen, daß von den beiden erzeugenden Elementen das eine vor dem anderen ausgezeichnet ist (nämlich  $+1$  vor  $-1$ ); die Ringstruktur von  $\mathbb{Z}$  ergibt das. Wir brauchen das dafür, daß wir einem singulären Simplex  $x$  nun auf ganz bestimmte Weise eine singuläre Kette zuordnen können, nämlich  $1 \cdot x$ .

Sei  $[\alpha] \in \pi_n(X, A; x_0)$ . Sei  $\alpha$  ein Repräsentant von  $[\alpha]$ , also eine Abbildung des  $n$ -Balles in den Raum  $X$ , mit gewissen Eigenschaften (nämlich der Basispunkt wird in den Basispunkt abgebildet, und der ganze Rand wird in den Unterraum  $A$  abgebildet). Wir machen jetzt einen Um-Schreibe-Trick. Nämlich wir stellen fest, daß wir statt des "Standard-Balles" ebensogut auch das "Standard-Simplex" verwenden können. So gesehen, ist unser  $\alpha$  jetzt eine Abbildung  $\alpha : \nabla^n \rightarrow X$ . Damit ist  $\alpha$  auch ein singuläres  $n$ -Simplex. Aus diesem singulären Simplex verschaffen wir uns eine singuläre Kette,

$$1 \cdot \alpha,$$

und das ist schon die gewünschte Konstruktion, wie wir uns jetzt überlegen. Nach Hypothese bildet ja die Abbildung  $\alpha$  den ganzen Rand  $\partial(\nabla^n)$  in den Unterraum  $A$  ab; oder, was dasselbe bedeutet, jedes der Rand-Simplizes von  $\nabla^n$  wird nach  $A$  abgebildet. Deshalb ist die Kette

$$\text{" Rand von } 1 \cdot \alpha \text{ "}$$

eine singuläre Kette in dem Unterraum  $A$ . Folglich ist diese Kette trivial in dem relativen Kettenkomplex. Das heißt, die Kette  $1 \cdot \alpha$  ist ein *Zykel* in dem relativen Kettenkomplex. Diese Kette repräsentiert also eine Homologiekategorie in  $H_n(X, A)$ ; wir bezeichnen diese Homologiekategorie mit  $h(\alpha)$  (der Buchstabe “ $h$ ” steht für ‘Hurewicz’).

Wir wollen wissen, daß die Homologiekategorie  $h(\alpha)$  nur von der Homotopiekategorie von  $\alpha$  abhängt. Das geht am bequemsten mit einem weiteren Umschreibe-Trick. Nämlich bezeichne  $\iota$  die identische Abbildung auf  $\nabla^n$ . Dann ist  $h(\iota)$  ein (erzeugendes) Element von  $H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n))$ , und

$$h(\alpha) = \alpha_*(h(\iota)) ,$$

wo  $\alpha_* : H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n)) \rightarrow H_n(X, A)$  die von der Abbildung  $\alpha$  induzierte Abbildung in der Homologie ist. Wir können nun darauf verweisen, daß ja die Abbildung  $\alpha_*$  nur von der Homotopiekategorie von  $\alpha$  abhängt. Wir haben somit eine Abbildung

$$\pi_n(X, A; x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

konstruiert.

Die Konstruktion der Hurewicz-Abbildung im absoluten Fall kann man gratis aus dem relativen Fall bekommen. Dazu benutzt man einfach die Isomorphismen

$$\pi_n(X, x_0) \approx \pi_n(X, \{x_0\}; x_0) \quad \text{und} \quad H_n(X) \approx H_n(X, \{x_0\}) \quad (\text{für } n \geq 1) .$$

Alternativ könnte man im absoluten Fall auch so vorgehen, daß man sich zunächst aus dem obigen  $\iota$  ein Element  $\tau \in H_n(S^n)$  verschafft (über eine Identifizierung von  $S^n$  mit  $\nabla^n/\partial(\nabla^n)$  und den Isomorphismus  $H_n(\nabla^n/\partial(\nabla^n)) \approx H_n(\nabla^n, \partial(\nabla^n))$ , für  $n \geq 1$ ). Danach wird für eine Klasse  $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ , und einen Repräsentanten  $\alpha$  von  $[\alpha]$ , das Hurewicz-Bild von  $\alpha$  dann definiert als  $h(\alpha) = \alpha_*(h(\tau))$ , das Bild von  $\tau$  unter der Abbildung  $\alpha_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(X)$ .

Eigentlich sollten wir auch noch nachweisen, daß die Hurewicz-Abbildung *additiv* ist. Den Nachweis lassen wir hier weg, werden ihn aber später nachholen.

**BEMERKUNG** (Inoffizielle Mitteilung). Folgendes ist eine faszinierende Interpretation der Hurewicz-Abbildung. Aus einer simplizialen Menge  $X$ ,  $[n] \mapsto X_n$ , kann man durch Linearisierung eine *simpliziale abelsche Gruppe*  $\mathbb{Z}[X]$  machen,  $[n] \mapsto \mathbb{Z}[X_n]$ . Mit einer solchen simplizialen abelschen Gruppe kann man zwei Dinge tun. Zum einen kann man ihr einen Kettenkomplex  $C$  zuordnen und damit auch Homologiegruppen  $H_*(C)$ . Zum andern ist eine simpliziale abelsche Gruppe, per Vergessen, auch eine simpliziale Menge. Deshalb hat sie eine geometrische Realisierung  $|\mathbb{Z}[X]|$  und diese wiederum hat Homotopiegruppen  $\pi_*|\mathbb{Z}[X]|$ . Man hat nun die folgende Tatsache, deren detaillierte Erörterung hier zu weit gehen würde (sie gehört in den später zu behandelnden Rahmen der *Faserungen*). Nämlich es gibt einen *kanonischen Isomorphismus*  $H_*(C) \cong \pi_*|\mathbb{Z}[X]|$ . Unter diesem Isomorphismus entspricht die Hurewicz-Abbildung der Abbildung von Homotopiegruppen  $\pi_*|X| \rightarrow \pi_*|\mathbb{Z}[X]|$ , die induziert ist von der (kanonischen) Inklusion von simplizialen Mengen  $X \rightarrow \mathbb{Z}[X]$ . Nämlich in Dimension  $n$  ist die Inklusion diejenige, die die Menge  $X_n$  identifiziert mit der Menge der Erzeugenden der abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}[X_n]$ ; das heißt, das Element  $x$  geht auf das (erzeugende) Element  $1 \cdot x$ .  $\square$



### Homotopie-Additions-Satz

Sei  $D^m$  der  $m$ -Ball und  $\partial D^m$  sein Rand (wo  $m \geq 1$ ). Eine *Orientierung* von  $D^m$  ist die Auswahl eines erzeugenden Elementes von  $H_m(D^m, \partial D^m)$ . Das heißt, daß von den beiden erzeugenden Elementen in der abelschen Gruppe  $H_m(D^m, \partial D^m)$  ( $\approx \mathbb{Z}$ ) nunmehr eines als ausgezeichnet betrachtet wird.

Das Standard- $m$ -Simplex  $\nabla^m$  ist *orientiert* (d.h. mit einer Orientierung versehen); das liegt daran, daß, nach Konvention, die Menge seiner Ecken eine *angeordnete Menge* ist (wir haben das oben in etwas anderer Form zur Kenntnis genommen). Die Wahl einer Orientierung von  $D^m$  kann man interpretieren als die Auswahl einer topologischen Äquivalenz (besser: einer Homotopie-Äquivalenz von Paaren) von  $(D^m, \partial D^m)$  zu  $(\nabla^m, \partial \nabla^m)$ . Das liegt daran, daß es, bis auf Homotopie, genau zwei solcher Homotopie-Äquivalenzen von  $(D^m, \partial D^m)$  zu  $(\nabla^m, \partial \nabla^m)$  gibt (vgl. das folgende Lemma). Nach Wahl einer Orientierung von  $D^m$  ist von diesen beiden Homotopie-Äquivalenzen eine ausgezeichnet; nämlich diejenige, die, in der  $m$ -ten relativen Homologie, das erzeugende Element auf das erzeugende Element abbildet (und nicht auf das negativ-inverse davon).

Das nun folgende Lemma kodifiziert eine kleine Buchführung, die wir später benötigen werden. Dabei wird eine Abbildung (von Paaren) zwischen orientierten  $n$ -Bällen als eine "Abbildung vom Grad  $k$ " bezeichnet, wenn die Orientierungsklasse in der Quelle abgebildet wird auf das  $k$ -fache Vielfache der Orientierungsklasse im Ziel. Wir sind hier interessiert an dem Fall  $k = \pm 1$ . Wir notieren noch, daß bei einer *Selbst-Abbildung* von  $(D^m, \partial D^m)$  dieser "Abbildungs-Grad" nicht abhängt von der Auswahl der Orientierungsklasse (denn wenn man die Orientierungsklasse wechselt, dann gibt das zwei Vorzeichen; die heben sich dann weg).

**Lemma** (Grad-1-Lemma). Sei  $n \geq 1$ . Wenn  $n \geq 2$ , dann gelte es als bekannt, daß  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$ . Sei  $f$  eine Abbildung von  $(D^n, \partial D^n)$  auf sich vom Grad  $\pm 1$ . Es gibt eine Homotopie (von Paaren) von der Abbildung  $f$  entweder zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung, je nachdem ob der Grad gleich  $+1$  oder  $-1$  ist.

BEMERKUNG. Die kurios aussehende Voraussetzung "Wenn  $n \geq 2$ , dann gelte es als bekannt, ..." ist uns für  $n = 2$  tatsächlich bekannt (Ausrechnung der Fundamentalgruppe der 1-Sphäre). Für  $n \geq 3$  gibt es eine vollkommen harmlose Erklärung für die Voraussetzung: sie ist Teil der Buchführung in einem induktiven Argument; dies wird später im einzelnen erläutert werden.

BEWEIS DES LEMMAS. Der Fall  $n = 1$  ist für das folgende eine (triviale) Ausnahme, wir behandeln diesen Fall vorweg. Eine Selbst-Abbildung von  $(D^1, \partial D^1)$ , bei der beide

Endpunkte auf denselben Punkt gehen, ist offenbar null-homotop; was nicht sein darf. Also bildet  $f$  die Endpunkte von  $D^1$  verschieden ab; dabei gibt es zwei Fälle: Vertauschung der Endpunkte oder keine Vertauschung. Im ersten Fall ist  $f$  homotop zu einer Spiegelung (und hat Grad  $-1$ ), im zweiten Fall ist es homotop zur identischen Abbildung (und hat Grad  $+1$ ).

Sei jetzt  $n \geq 2$ . Da der Raum  $D^n$  zusammenziehbar ist (d.h. homotopie-äquivalent zum ein-punktigen Raum), wird eine Abbildung von Paaren  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$  genau dann eine Homotopie-Äquivalenz von Paaren sein, wenn die beteiligte Abbildung  $\partial D^n \rightarrow \partial D^n$  ihrerseits eine Homotopie-Äquivalenz ist; und sie wird genau dann als Abbildung von Paaren homotop zur Identität bzw. zu einer Spiegelung sein, wenn das entsprechende für die Abbildung  $\partial D^n \rightarrow \partial D^n$  der Fall ist.

Nun ist die Rand-Abbildung (aus der langen exakten Folge der Homologiegruppen)

$$H_n(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\partial D^n)$$

ein Isomorphismus (vorausgesetzt  $n \geq 2$ ). Mit Hilfe des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n, \partial D^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \\ H_n(D^n, \partial D^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

folgt deshalb, daß auch die eingeschränkte Abbildung  $f|_{S^{n-1}}$  einen Isomorphismus  $H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$  induziert; und, daß diese eingeschränkte Abbildung dasselbe Orientierungsverhalten hat wie  $f$  selbst. (Dabei ist die  $S^{n-1}$  durch Wahl einer der beiden Erzeugenden in  $H_{n-1}(S^{n-1})$  mit einer Orientierungsklasse versehen; es ist nicht nötig, hierfür das Bild der Orientierungsklasse aus  $H_n(D^n, \partial D^n)$  unter der Rand-Abbildung  $\delta$  zu nehmen.)

Per Hypothese des Lemmas wissen wir, daß  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$ . Andererseits wissen wir auch, daß  $H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$  und daß die Abbildung

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{h} H_{n-1}(S^{n-1})$$

surjektiv ist (dafür genügt es zu wissen, daß das Bild ein erzeugendes Element enthält). Aber eine surjektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist automatisch schon ein Isomorphismus. Also ist  $h$  ein Isomorphismus.

Wir haben erhalten, daß die Homotopieklassen punktierter (d.h. basispunkt-erhaltender) Abbildungen der  $S^{n-1}$  auf sich schon durch das charakterisiert sind, was sie in der Homologie tun. Es folgt, daß dasselbe dann auch für Homotopieklassen *unpunktierter* Abbildungen gilt (denn wegen dem Weg-Zusammenhang kann man ja jede solche Homotopieklasse auch durch eine punktierte Abbildung repräsentieren).

Damit eine Abbildung der  $S^{n-1}$  auf sich überhaupt eine Chance haben kann, eine Homotopie-Äquivalenz zu sein, muß die induzierte Abbildung in der Homologie ein erzeugendes Element wieder auf ein erzeugendes Element abbilden. Solcher erzeugenden Elemente gibt es zwei in  $H_{n-1}(S^{n-1})$ , nämlich die Orientierungsklasse und deren

negativ-inverses. Es gibt also, bis auf Homotopie, höchstens zwei Selbst-Abbildungen der  $S^{n-1}$ , die Homotopie-Äquivalenzen sein können (oder, was im gegenwärtigen Fall auf dasselbe hinausläuft, die Isomorphismen in der Homologie induzieren können). Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie die Orientierungsklasse entweder auf sich selbst abbilden oder auf ihre negativ-inverse. Natürlich gibt es diese beiden Homotopieklassen wirklich. Sie sind repräsentiert von der identischen Abbildung einerseits und von einer “Spiegelung” andererseits.

Die Selbst-Abbildung der  $S^{n-1}$ , die wir oben Anlaß hatten zu betrachten, hatte die Eigenschaft, daß die Orientierungsklasse aus  $H_{n-1}(S^{n-1})$  entweder auf sich selbst oder auf ihre negativ-inverse abgebildet wurde, je nachdem ob der Grad der Abbildung  $f$  gleich  $+1$  war oder gleich  $-1$ . Es folgt, daß diese Selbst-Abbildung entweder zur identischen Abbildung homotop ist oder zu einer Spiegelung; je nachdem welcher Fall vorliegt. Daraus folgt weiter, wie schon angemerkt, daß dann auch die Selbst-Abbildung des Paares  $(D^n, \partial D^n)$  homotop ist, als Abbildung von Paaren, entweder zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung.  $\square$

Die Unterscheidung zwischen *orientierungserhaltend* und *orientierungsumkehrend* kann man zu einem gewissen Grade auf eine “lokale” Situation übertragen: Seien  $B$  und  $C$   $m$ -dimensionale Bälle, beide orientiert. Wir betrachten eine Abbildung  $f : B \rightarrow C$  mit der Eigenschaft, daß  $f$  das Innere von  $B$  per topologischer Äquivalenz auf eine offene Teilmenge von  $C$  abbildet. (Der “Satz von der topologischen Invarianz der Dimension” sagt, daß die geforderte Eigenschaft schon aus einer schwächer aussehenden folgt; nämlich aus der Bedingung, daß die Einschränkung von  $f$  auf das Innere von  $B$  injektiv ist.)

Eine solche Abbildung hat nun entweder den *lokalen Grad*  $+1$  oder den *lokalen Grad*  $-1$ . Dazu überlegen wir uns, daß man aus  $f$  einen Isomorphismus von  $H_m(B, \partial B)$  zu  $H_m(C, \partial C)$  bekommen kann; dieser Isomorphismus bildet das ausgezeichnete Element in  $H_m(B, \partial B)$  dann auf ein erzeugendes Element in  $H_m(C, \partial C)$  ab, also entweder auf das ausgezeichnete Element oder auf dessen negativ-inverses.

Um den Isomorphismus zu bekommen, wählt man einen inneren Punkt  $x$  in  $B$ , man hat dann Isomorphismen

$$H_m(B, \partial B) \xrightarrow{\approx} H_m(B, B-x) \xleftarrow{\approx} H_m(\overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{B}-x) \xrightarrow{f_*} H_m(f(\overset{\circ}{B}), f(\overset{\circ}{B})-f(x))$$

(über die Inklusionen homotopie-äquivalenter Räume und die Tatsache, daß  $\overset{\circ}{B} \rightarrow f(\overset{\circ}{B})$  topologische Äquivalenz ist) und auch (wegen dem Ausschneidungs-Satz)

$$H_m(f(\overset{\circ}{B}), f(\overset{\circ}{B})-f(x)) \longrightarrow H_m(C, C-f(x)) \xleftarrow{\approx} H_m(C, \partial C) .$$

Der Isomorphismus hängt von der Wahl von  $x$  nicht ab. Denn zu  $x$  und  $x'$  kann man einen Ball  $V$  im Innern von  $B$  finden, der  $x$  und  $x'$  enthält, und man kann dann vergleichen über einen Isomorphismus mit  $H_m(\overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{B}-V)$ .

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem Homotopie-Additions-Satz.

**Satz** (Homotopie-Additions-Satz). Sei  $n \geq 1$ . Seien  $f_i : D^n \rightarrow D^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , endlich viele Abbildungen, deren jede auf dem Innern von  $D^n$  eine topologische Äquivalenz induziert,

$$\overset{\circ}{D}^n \xrightarrow{\approx} f_i(\overset{\circ}{D}^n),$$

und so daß die Bilder  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  sich paarweise nicht treffen. Sei  $\epsilon_i$  (aus  $\{\pm 1\}$ ) der lokale Grad der Abbildung  $f_i$ . Seien  $X$  und  $A$  weg-zusammenhängende Räume,  $A$  Unterraum von  $X$ ; wenn  $n = 1$ , dann bestehe  $A$  nur aus dem Basispunkt,  $A = \{x_0\}$ . Sei  $g : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$  eine Abbildung mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß der ganze Unterraum von  $D^n$ , der gegeben ist durch das Komplement der Vereinigung der  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$ , in den Unterraum  $A$  abgebildet wird. Es bestimmt dann jede der Abbildungen  $g$  und  $g \circ f_i$  ein wohldefiniertes Element von  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ , und für diese Elemente gilt die Beziehung

$$[g] = \sum_{i=1}^k \epsilon_i [g \circ f_i]$$

in  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ .

BEWEIS. Der Beweis geht durch eine Art Induktion nach  $n$ . Dabei behandeln wir gleichzeitig einen Spezialfall des Hurewicz-Satzes, nämlich die Behauptung, daß die Hurewicz-Abbildung im absoluten Fall, und zwar im ganz speziellen Fall einer Sphäre, ein Isomorphismus ist.

Die logische Struktur des Beweises ist dabei so. Der erste hier zu behandelnde Fall ist  $n = 1$ . Wenn  $n > 1$ , dann werden wir im Beweis die Tatsache als Hilfsmittel verwenden, daß wir  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x_0)$  schon kennen. Später, im Anschluß an den Beweis, werden wir uns überlegen, daß wir mit Hilfe des Satzes in der oben formulierten Form dann auch herausbekommen können, was die nächste Homotopiegruppe  $\pi_n(S^n, x_0)$  ist.

In Vorbereitung des Arguments nehmen wir zunächst eine andere, basispunktfreie Beschreibung von  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$  zur Kenntnis. Dazu definieren wir eine abelsche Gruppe  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  (ein Basispunkt wird für die Definition nicht benötigt) und zeigen anschließend, daß  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$  und  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  in Wirklichkeit dasselbe sind.

Die Konstruktion von  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  geht in vier Schritten. Im ersten Schritt versehen wir den  $n$ -Ball  $D^n$  mit einer Orientierung und betrachten die Menge der Abbildungen von Paaren,  $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$ . Im zweiten Schritt gehen wir zu Homotopieklassen solcher Abbildungen über. Im dritten Schritt betrachten wir die von der Menge der Homotopieklassen erzeugte abelsche Gruppe (die Koeffizientengruppe ist  $\mathbb{Z}$ , die Gruppe der ganzen Zahlen). Im vierten Schritt schließlich gehen wir von der so erhaltenen abelschen Gruppe zu einer Quotientengruppe über; dabei benutzen wir die von der folgenden Vorschrift erzeugte Äquivalenzrelation: es soll gelten

$$[f] = [f_1] + [f_2]$$

wenn die Abbildungen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f$  in einer bestimmten, jetzt zu beschreibenden Beziehung stehen. Die Beziehung ist diejenige, die bei der Definition der "Addition" in

den Homotopiegruppen  $\pi_n(\dots)$  verwendet wurde. Wir könnten die dort verwendeten Formeln übernehmen. Es geht aber auch deskriptiv: nämlich, es soll  $f$  auf einem “zusammengesetzten” Ball (linke Hälfte und rechte Hälfte) definiert sein, wobei die “Trennfläche” zwischen “links” und “rechts” ebenfalls in den Unterraum  $A$  abgebildet wird; die Abbildung  $f_1$  ist nun die Einschränkung von  $f$  auf die “linke Hälfte”, und die Abbildung  $f_2$  ist die Einschränkung auf die “rechte Hälfte”. Die Verwendung des Terms *Einschränkung* setzt (implizit) voraus, daß eine Identifizierung von  $D^n$  mit seiner “linken” bzw. “rechten” Hälfte spezifiziert ist; das geht über eine injektive Abbildung  $D^n \rightarrow D^n$  der oben betrachteten Art, und zwar über eine solche vom lokalen Grad  $+1$ .

**Lemma** (Modifizierte Homotopiegruppen). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \cong \pi_n(X, A)^\ddagger.$$

( Dabei ist vorausgesetzt, daß  $X$  und  $A$  wegzusammenhängend sind. Es ist auch vorausgesetzt, daß  $\pi_n(X, A; x_0)$  eine Gruppe ist. Das bedeutet, daß entweder  $n \geq 2$  ist. Oder daß  $n \geq 1$  ist — vorausgesetzt, daß  $A$  nur aus einem einzigen Punkt besteht. )

BEWEIS. Einer Abbildung  $f : (D^n, \partial D^n; s_0) \rightarrow (X, A; x_0)$  kann man (durch Vergessen des Basispunktes) eine Abbildung  $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$  zuordnen; das definiert, auf Repräsentantenebene, eine Abbildung von links nach rechts. Die Zuordnung ist verträglich mit “Homotopie” (weil die rechts eingebaut ist) und mit “Addition” (weil die rechts so definiert wurde). Also hat man zumindest eine Abbildung von  $\pi_n(X, A; x_0)$  zu  $\pi_n(X, A)^\ddagger$ . Diese Abbildung ist verträglich mit “abelsch-machen” (denn rechts hat man schon eine abelsche Gruppe) und sie ist auch verträglich mit dem Herauskürzen der Operation (denn wenn über die Basispunkt-Bedingung, so wie rechts, nicht mehr Buch geführt wird, so ist die Operation eines geschlossenen Weges  $w$  auf einem Repräsentanten  $f$ , durch ‘Vorschalten’ des Weges  $w$ , nichts anderes als das Resultat einer Homotopie, ändert also nicht die Klasse von  $f$  rechts). Man bekommt also insgesamt eine Abbildung  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \rightarrow \pi_n(X, A)^\ddagger$ .

Auch nicht viel schwieriger ist es, eine Abbildung in der anderen Richtung, von rechts nach links, zu definieren. Zunächst wird es genügen, diese Abbildung auf den erzeugenden Elementen anzugeben (die Fortsetzung ist dann automatisch, wegen der links vorhandenen abelschen-Gruppen-Struktur). Sei  $[f]$  ein solches erzeugendes Element, also die Homotopieklasse einer Abbildung von Paaren,  $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$ . Die Abbildung  $f$  wird im allgemeinen nicht die Basispunkt-Bedingung zu erfüllen, die wir für Repräsentanten links verlangen. Wir können sie aber durch eine äquivalente (d.h. homotope) Abbildung ersetzen, die die Basispunkt-Bedingung erfüllt; das liegt einfach daran, daß ja, nach Voraussetzung, der Raum  $A$  wegzusammenhängend ist. Als Bild von  $[f]$  nehmen wir nun das von letzterer Abbildung repräsentierte Element. Als Element von  $\pi_n(X, A; x_0)$  wäre dies Element möglicherweise nicht wohldefiniert (wegen der benötigten Deformation könnten zwei verschiedene Auswahlen dieser Deformation zu zwei Elementen von  $\pi_n(X, A; x_0)$  führen, die nicht gleich sind, sondern die nur auseinander hervorgehen durch die Operation eines Elementes von  $\pi_1(A, x_0)$ ). Das

erhaltene Element ist aber wohldefiniert nach dem Trivialisieren der Operation; also in  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger$ .

Schließlich müssen wir noch nachprüfen, daß die Konstruktion kompatibel ist mit dem Übergang zur Quotienten-abelschen-Gruppe auf der rechten Seite. Das heißt, in der oben beschriebenen Situation der drei Abbildungen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f$ , die Anlaß gab zu der Relation  $[f] = [f_1] + [f_2]$ , müssen wir nachprüfen, daß die entsprechende Relation auch für die links konstruierten Bilder gilt. Das liegt aber einfach an der Möglichkeit, die benötigte Auswahl in kompatibler Weise zu machen: wenn man sich nicht dumm anstellt, so wird die benötigte Konstruktion für  $f$  (“Anhängen an den Basispunkt”) so sein, daß sie gleichzeitig auch für  $f_1$  und  $f_2$  funktioniert; das heißt, daß die Resultate der Konstruktion dann in der Beziehung zueinander stehen, die die Komposition in  $\pi_n(\dots)$  beschreibt.

Es ist klar (oder?), daß die beiden so definierten Abbildungen tatsächlich zueinander invers sind.  $\square$

Nach der durch das Lemma erzielten Umformulierung,  $\pi_n(X, A; x_0)^\dagger \cong \pi_n(X, A)^\ddagger$ , ist nun sichergestellt, daß die in dem Homotopie-Additions-Satz genannten Abbildungen  $g$  und  $g \circ f_i$  tatsächlich Elemente dieser abelschen Gruppe beschreiben. Es bleibt zu zeigen, daß die Relation

$$[g] = \sum_{i=1}^k \epsilon_i [g \circ f_i]$$

erfüllt ist. Wir zeigen das durch Induktion über die Zahl  $k$ . Der Induktions-Anfang (der Fall  $k = 1$ ) und der Induktions-Schritt (der Fall  $k > 1$ ) sind beide nicht-trivial. In beiden Fällen besteht die Arbeit darin, die Situation mittels geeigneter Homotopien zu vereinfachen.

Nämlich im Falle  $k > 1$ , also beim Induktions-Schritt, möchte man haben, daß die Bilder  $f_i(D^n)$  alle “sehr klein” sind. Mit Hilfe einer “Trennwand” kann man die Gesamtheit der Bilder dann in zwei Teilfamilien zerlegen (eine Familie “links” von der Trennwand, die andere “rechts”) und bekommt auf die Weise ein induktives Argument.

Im Falle  $k = 1$ , also beim Induktions-Anfang, möchte man hingegen haben, daß das Bild  $f_1(D^n)$  “sehr groß” ist; nämlich ganz  $D^n$ . Auf die Weise wird  $f_1$  manipulierbar.

In beiden Fällen ist es für die beabsichtigten Deformationen der  $f_i$  nötig, vorher den Bereich  $g^{-1}(A)$  geeignet zu vergrößern (mit Hilfe einer Homotopie von  $g$ ). So wird sichergestellt, daß die schließlichen Homotopien der  $f_i$  sämtlich aufgefaßt werden können als Homotopien von Paaren von Abbildungen

$$(D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, g^{-1}(A)).$$

Das hat den Effekt, daß die resultierenden Homotopien der Abbildungen  $g \circ f_i$  dann ebenfalls Homotopien von Abbildungen von Paaren sind, nämlich von Abbildungen  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$ , wie es sich gehört.

Das nun folgende Lemma erledigt die vorbereitende Deformation der Abbildung  $g$ . Wir werden des öfteren auf “den Ball  $D^n$ ” zu verweisen haben. Da der sozusagen

zweimal vorkommt (als Quelle und als Ziel der Abbildungen  $f_i$ ) ist es notwendig, der Gefahr von Mißverständnissen vorzubeugen. Dazu verwenden wir eine etwas kuriose Sprechweise: es wird von dem “Quellen- $D^n$ ” und von dem “Ziel- $D^n$ ” die Rede sein.

**Lemma.** Für jedes  $i = 1, \dots, k$  sei  $Z_i$  ein vorgegebener Ball in dem Ziel- $D^n$ , der enthalten ist im Bild  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$ . Es gibt eine Homotopie von  $g$  zu  $g'$ , wobei diese Homotopie auf dem Komplement der Vereinigung der  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  konstant ist, so daß die Abbildung  $g'$  die Eigenschaft hat, daß sie auch noch den Unterraum  $f_i(D^n) - \overset{\circ}{Z}_i$  (für jedes  $i$ ) nach  $A$  abbildet.

BEWEIS. Da man die Bilder  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  einzeln, und nacheinander, hernehmen kann, wird es genügen, das folgende zu zeigen: Sei  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sei, für dieses eine  $i$ ,  $Z_i$  ein vorgegebener Ball in dem Ziel- $D^n$ , der enthalten ist im Bild  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$ . Es gibt eine Homotopie von  $g$  zu  $g'$ , wobei diese Homotopie auf dem Komplement von  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  konstant ist, so daß die Abbildung  $g'$  die Eigenschaft hat, daß sie auch noch den Unterraum  $f_i(D^n) - \overset{\circ}{Z}_i$  (für dieses  $i$ ) nach  $A$  abbildet.

Zur Bequemlichkeit der Beschreibung benutzen wir die Tatsache, daß es zu einem vorgegebenen inneren Punkt von  $D^n$  immer eine topologische Äquivalenz von  $D^n$  auf sich gibt, die auf dem Rand von  $D^n$  die Identität ist, und die den Mittelpunkt von  $D^n$  in den vorgegebenen Punkt abbildet. Es ist deshalb keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nun annehmen, daß das Urbild  $f_i^{-1}(Z_i)$  den Mittelpunkt von dem Quellen- $D^n$  in seinem Innern enthält; und damit auch einen konzentrischen Ball,  $Q_i$ , in dem Quellen- $D^n$ .

Für die Zwecke der Beschreibung der Homotopie fassen wir das Ziel- $D^n$  jetzt als einen *zusammengeklebten Raum* auf. Nämlich wir stellen uns vor, daß das Quellen- $D^n$  angeklebt ist an den Teil von dem Ziel- $D^n$ , der durch das Komplement

$$D^n - f_i(\overset{\circ}{D}^n)$$

gegeben ist; letzteres ist ein *abgeschlossener* Unterraum von dem Ziel- $D^n$ , und das Ankleben geschieht mit Hilfe derjenigen Anhefte-Abbildung, die gegeben ist durch die Einschränkung von  $f_i$  auf den Rand von dem Quellen- $D^n$ . Die Homotopie ist nun leicht zu beschreiben: auf dem Komplement  $D^n - f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  tut sie nichts (d.h. dort ist sie eine konstante Homotopie), und auf dem Quellen- $D^n$  ist sie diejenige Homotopie von der zusammengesetzten Abbildung  $g \circ f_i$ , die gegeben ist durch radiales Hinausschieben; nämlich das Komplement  $D^n - \overset{\circ}{Q}_i$  wird in den Rand von  $D^n$  geschoben (die Homotopie zieht das Ring-Gebiet  $D^n - \overset{\circ}{Q}_i$  durch eine Deformationsretraktion auf seinen äußeren Rand  $\partial D^n$  [den Rand von dem Quellen- $D^n$ ] zusammen; die Schluß-Abbildung der Homotopie induziert einen Homöomorphismus von  $Q_i$  auf das Quellen- $D^n$ ).

Wohlgemerkt, die gerade beschriebene Homotopie ändert *nicht* die Abbildung  $f_i$ . Vielmehr ändert sie die Abbildung  $g$  auf dem Ziel- $D^n$  in der Weise, daß das Komplement von  $D^n - f_i(\overset{\circ}{Q}_i)$  (und damit auch das Komplement von  $\overset{\circ}{Z}_i$ ) durch die geänderte Abbildung  $g'$  nunmehr ganz in den Unterraum  $A$  von  $X$  abgebildet werden.  $\square$

DER FALL  $k = 1$ .

Wie auch im Beweis des Lemmas schon, so können wir ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es in dem Ziel- $D^n$  einen konzentrischen Ball  $Z_1$  gibt, der in dem Bild  $f_1(\overset{\circ}{D}^n)$  liegt. Und nach dem Lemma können wir die Abbildung  $g$  durch eine homotope Abbildung  $g'$  ersetzen mit der Eigenschaft  $g'(D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \subset A$ .

(Die Homotopie von  $g$  zu  $g'$  war auf dem Komplement von  $f_1(\overset{\circ}{D}^n)$  konstant. Die induzierte Homotopie von  $g \circ f_1$  zu  $g' \circ f_1$  ist deshalb auf  $\partial D^n$  konstant; deshalb darf auch  $g \circ f_1$  durch  $g' \circ f_1$  ersetzt werden.)

Sei  $Z$  ein kleinerer konzentrischer Ball in  $Z_1$ . Von dem Ring-Gebiet  $D^n - \overset{\circ}{Z}$  gibt es eine Abbildung auf sich,

$$p : D^n - \overset{\circ}{Z} \longrightarrow D^n - \overset{\circ}{Z} ,$$

die auf den Randkomponenten  $\partial D^n$  und  $\partial Z$  die Identität ist und die den Teil  $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$  ganz in die Randkomponente  $\partial D^n$  abbildet (z.B. kann man  $D^n - \overset{\circ}{Z}$  so mit  $S^{n-1} \times [0, 1]$  identifizieren, daß  $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$  auf die "rechte Hälfte"  $S^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$  geht;  $p$  ist dann induziert durch eine Abbildung des Intervalls  $[0, 1]$  auf sich, die die "rechte Hälfte" kollabiert). Und bei geeigneter Wahl der Abbildung  $p$  (z.B. so, wie gerade angedeutet) gibt es eine Homotopie

$$P : (D^n - \overset{\circ}{Z}) \times [0, 1] \longrightarrow D^n - \overset{\circ}{Z} ,$$

zwischen  $p$  und der identischen Abbildung von  $D^n - \overset{\circ}{Z}$ , wobei die Homotopie auf den Randkomponenten  $\partial D^n$  und  $\partial Z$  konstant ist, und wo die Homotopie auch noch die für uns wichtige Eigenschaft hat, daß

$$(*) \quad P( (D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \times [0, 1] ) \subset D^n - \overset{\circ}{Z}_1 .$$

Sei die Abbildung  $q : D^n \rightarrow D^n$  definiert als die "offensichtliche" Fortsetzung von  $p$  (Fortsetzung mit der identischen Abbildung auf  $Z$ ), und sei ebenso auch die Homotopie  $Q$  definiert als die "offensichtliche" Fortsetzung von  $P$  (Fortsetzung mit der konstanten Homotopie auf  $Z$ ).

Sei die Abbildung  $f_1'$  definiert als

$$f_1' := q \circ f_1 .$$

Die Homotopie  $Q$  induziert eine Homotopie von  $f_1$  zu  $f_1'$ , die nicht auf  $\partial D^n$  konstant zu sein braucht. Wegen der Bedingung (\*) ist sie aber zumindest eine Homotopie von Abbildungen von Paaren:

$$(D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1) .$$

Folglich, da  $D^n - \overset{\circ}{Z}_1$  durch  $g'$  ganz nach  $A$  abgebildet wird, ist die resultierende Homotopie von  $g' \circ f_1$  zu  $g' \circ f_1'$  ebenfalls eine Homotopie von Abbildungen von Paaren:

$$(D^n, \partial D^n) \longrightarrow (X, A) .$$

Wir dürfen also  $g' \circ f_1$  durch  $g' \circ f_1'$  ersetzen.



**Behauptung.** Die Abbildung  $f_1' : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$  ist homotop, als Abbildung von Paaren, zur identischen Abbildung oder zu einer Spiegelung, je nachdem ob der lokale Grad von  $f_1$  gleich  $+1$  oder gleich  $-1$  ist.

Mit der Behauptung ist die Behandlung des Falles  $k = 1$  abgeschlossen. Denn im Falle des lokalen Grades  $+1$  folgt  $[g' \circ f_1'] = [g']$ , und im Falle des lokalen Grades  $-1$  folgt  $[g' \circ f_1'] = -[g']$ , da das Vorschalten einer Spiegelung den Übergang zum negativ-inversen repräsentiert.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Sei  $x \in D^n$  innerer Punkt. Die Orientierungsklasse in  $H_n(D^n, \partial D^n)$  ergibt eine ebensolche in (der isomorphen Gruppe)  $H_n(D^n, D^n - x)$ . Die Voraussetzung des lokalen Grades  $\pm 1$  besagt (insbesondere), daß  $f_1$  eine Abbildung von Paaren induziert,  $(D^n, D^n - x) \rightarrow (D^n, D^n - f_1(x))$  und weiter auch einen Isomorphismus in der relativen Homologie, wobei die Orientierungsklasse auf die Orientierungsklasse, bzw. auf deren negativ-inverse abgebildet wird. Sei  $x$  nun so gewählt, daß  $f_1(x)$  ein innerer Punkt von  $Z_1$  ist. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n, D^n - x) & \xleftarrow{\approx} & H_n(D^n, \partial D^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(D^n, D^n - f_1(x)) & \xleftarrow{\approx} & H_n(D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1) \end{array}$$

wo die horizontalen Pfeile von Inklusionen induziert sind und die vertikalen Pfeile von der Abbildung  $f_1$ . Also ist auch der rechte vertikale Pfeil,  $f_{1*} : H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1)$ , ein Isomorphismus; und zwar vom selben Orientierungsverhalten wie der linke vertikale Pfeil (wobei wir die Orientierungsklasse in  $H_n(D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1)$  durch Transport entlang dem unteren horizontalen Pfeil bekommen haben). Nun sind aber  $f_1$  und  $f_1'$  homotop als Abbildungen von Paaren  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1)$ . Also ist auch  $f_1' * : H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(D^n, D^n - \overset{\circ}{Z}_1)$  ein Isomorphismus, wieder mit demselben Orientierungsverhalten; deshalb  $f_1' * : H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(D^n, \partial D^n)$  ebenfalls. Wir sind nun fertig mit einer Anwendung von dem “Grad-1-Lemma”.  $\square$

DER FALL  $k > 1$ .

**Behauptung.** In jedem der Bilder  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  sei ein Punkt  $u_i$  gegeben und zu jedem der  $u_i$  eine Umgebung  $U_i$  in dem Ziel- $D^n$ . Es gibt eine (hier zulässige) Homotopie der Abbildungen  $g$  und  $f_i$  zu Abbildungen  $g'$  und  $f_i'$  derart, daß, für jedes  $i$ , das Bild  $f_i'(D^n)$  enthalten ist in  $U_i$ .

Aus der Behauptung erhalten wir den Induktions-Schritt für eine Induktion über  $k$  auf die folgende Weise. Wir wählen eine Zerlegung von dem Ziel- $D^n$  in eine “linke Hälfte” und eine “rechte Hälfte”. Wenn dann  $g_1$  die Einschränkung von  $g$  auf die “linke Hälfte” bezeichnet, und entsprechend auch  $g_2$  diejenige auf die “rechte”, so gilt nach Definition der Addition in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$ ,

$$[g] = [g_1] + [g_2],$$

vorausgesetzt, daß die Trennfläche zwischen “links” und “rechts” durch die Abbildung  $g$  ganz in den Unterraum  $A$  von  $X$  abgebildet wurde.

Auf diesem Hintergrund nun wählen wir irgendeine Zerlegung in “links” und “rechts”, wie gerade beschrieben (aber zunächst noch ohne auf die Abbildung  $g$  zu achten), und wir wählen in jedem der Bilder  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$  irgendeinen Punkt  $u_i$ . Die erste Bedingung dabei ist, daß jeder der Punkte  $u_i$  entweder im Innern der “linken Hälfte” liegen soll oder aber im Innern der “rechten Hälfte”. Die zweite Bedingung ist, daß sowohl “links” als auch “rechts” jeweils mindestens einer der Punkte liegen soll. Es ist klar (oder?), daß man eine Trennung in “links” und “rechts” so finden kann, daß das geht.

Als nächstes wählen wir für jeden der Punkte  $u_i$  eine Umgebung  $U_i$  in  $f_i(\overset{\circ}{D}^n)$ . Und zwar soll  $U_i$  ganz innerhalb der “linken Hälfte” liegen, wenn  $u_i$  dort liegt; bzw. ganz innerhalb der “rechten Hälfte”, wenn  $u_i$  dort liegt.

Wir machen nun diejenige Modifikation, deren Existenz durch die Behauptung gesichert ist. Für die modifizierten Abbildungen  $g'_1$ ,  $g'_2$  und  $g'$  ist die oben angesprochene Voraussetzung nun erfüllt: die Abbildung  $g'$  bildet die “Trennwand” ganz nach  $A$  ab. Es ist also

$$[g'] = [g'_1] + [g'_2].$$

Andererseits können wir aber auch die Induktionsvoraussetzung über  $k$  nun sowohl auf die “linke Hälfte” als auch auf die “rechte Hälfte” anwenden. Folglich gilt in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$ ,

$$[g'_1] = \sum_{i \in I_1} \epsilon_i [g' \circ f'_i] \quad \text{und} \quad [g'_2] = \sum_{i \in I_2} \epsilon_i [g' \circ f'_i],$$

wo  $I_1$  die Indexmenge der “links” liegenden Punkte  $u_i$  bezeichnet; und  $I_2$  entsprechend die der “rechts” liegenden.

Der Induktions-Schritt ist damit fertig; bis auf den noch nachzutragenden:

**BEWEIS DER BEHAUPTUNG.** Zur Bequemlichkeit der Beschreibung dürfen wir annehmen, daß, für jedes  $i$ , der Punkt  $u_i$  das Bild von dem Mittelpunkt des Quellen- $D^n$  unter der Abbildung  $f_i$  ist. Sei  $Q_i$  eine konzentrische-Ball-Umgebung von dem Mittelpunkt in dem Quellen- $D^n$ , die enthalten ist in  $f_i^{-1}(U_i)$ . Nach dem obigen Lemma können wir, nach einer Modifikation von  $g$  zu  $g'$ , annehmen, daß das Komplement der Vereinigung der  $f_i(\overset{\circ}{Q}_i)$  durch  $g'$  ganz nach  $A$  abgebildet wird; für jedes  $i$  wird insbesondere deshalb  $D^n - \overset{\circ}{Q}_i$  durch  $f_i$  nach  $g'^{-1}(A)$  abgebildet.

Wir ändern jetzt  $f_i$  durch das Vorschalten einer Homotopie von Abbildungen von dem Quellen- $D^n$  in sich. Die vorzuschaltende Homotopie kontrahiert das Quellen- $D^n$  auf den Ball  $Q_i$ . Wenn die Homotopie in der nächstliegenden Weise ausgeführt wird, dann hat sie zwei Eigenschaften, die wir verlangen; nämlich einmal soll die Deformation von  $\partial D^n$  nur durch das Ring-Gebiet  $D^n - \overset{\circ}{Q}_i$  erfolgen, und zum andern soll die End-Abbildung der Homotopie ein Homöomorphismus von  $D^n$  auf  $Q_i$  sein. Die beschriebene Homotopie gibt die gewünschte Modifikation von  $f_i$  zu  $f'_i$ .  $\square$

## Die $n$ -te Homotopiegruppe der $n$ -Sphäre.

Beim Beweis des Homotopie-Additions-Satzes in der Dimension  $n$  haben wir als Hilfsmittel die Ausrechnung  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, s_0) \approx \mathbb{Z}$  benutzt (was wir für  $n-1 = 1$  schon wußten, für  $n-1 \geq 2$  aber noch nicht). Damit der Beweis des Homotopie-Additions-Satzes vollständig ist, müssen wir also z.B. noch zeigen, daß die Aussage des Satzes in der Dimension  $n$  umgekehrt nun benutzt werden kann für die Herleitung dessen, daß auch  $\pi_n(S^n, s_0) \approx \mathbb{Z}$  richtig ist. Das soll jetzt gemacht werden.

Tatsächlich ist das, was wir jetzt machen wollen, eigentlich überflüssig. Denn die Berechnung  $\pi_n(S^n, s_0) \approx \mathbb{Z}$  folgt ja auch aus dem Hurewicz-Satz in der Dimension  $n$  (den wir in Kürze aus dem Homotopie-Additions-Satz in der Dimension  $n$  herleiten werden). Der “überflüssige” Beweis ist aber etwas direkter.

Für den gegenwärtigen Beweis werden wir den Teil dieser Aussage als schon bekannt voraussetzen, der besagt, daß  $\mathbb{Z}$  sozusagen eine *untere Schranke* für die Gruppe ist. Das folgt aus der Kenntnis dessen, daß der Hurewicz-Homomorphismus überhaupt existiert und aus der (schon beschriebenen) Tatsache, daß die Abbildung

$$\pi_n(S^n, \{s_0\}; s_0) \longrightarrow H_n(S^n, \{s_0\}) \approx \mathbb{Z}$$

*surjektiv* ist: die Kollaps-Abbildung  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (S^n, \{s_0\})$  repräsentiert ein Element links, und dies Element geht (vermöge einer Identifizierung  $D^n \approx \nabla^n$ ) auf ein Element rechts, das die rechte Gruppe erzeugt.

Wir müssen hier also nur noch nachweisen, daß  $\mathbb{Z}$  auch eine *obere Schranke* für die Gruppe ist. Dazu werden wir zeigen, daß es in der Gruppe ein Element gibt (es ist das eben beschriebene), das die Gruppe *erzeugt*; d.h. jedes andere Element ist ein Vielfaches von diesem einen. — Es ist plausibel, daß der Homotopie-Additions-Satz für die Herleitung dieser Art von Aussage ein nützliches Hilfsmittel sein wird.

Für Raumpaare wie  $(S^n, \{s_0\})$  (oder auch  $(D^n, \partial D^n)$  wenn  $n \geq 2$ ) ist kein Unterschied zwischen  $\pi_n(X, A; x_0)$  und  $\pi_n(X, A)^\ddagger$ . Wenn wir also ein Element dieser Gruppe repräsentieren wollen, so ist die Buchführung über den Basispunkt nicht nötig. Wir betrachten einen solchen Repräsentanten

$$f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (S^n, \{s_0\}) .$$

Unser Ziel wird es sein, diesen Repräsentanten in geeigneter Weise zu vereinfachen. Dazu gibt es mehrere Methoden, und wir werden auch mehrere von diesen Methoden beschreiben, bzw. skizzieren.

1. METHODE. Wir knüpfen an den Beweis des Zelluläre-Approximation-Satzes an oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, den Beweis dessen, daß  $\pi_k(S^n, \{s_0\}) = 0$  für  $k < n$ .

Wir wählen eine Überdeckung von  $S^n$  durch zwei geeignete offene Mengen  $U$  und  $V$ ; nämlich die etwas vergrößerte südliche Halbkugel einerseits und die etwas vergrößerte nördliche Halbkugel andererseits. Es sind also  $U$  und  $V$  beide zusammenziehbar, und ihr Durchschnitt ist homotopie-äquivalent zu  $S^{n-1}$ ; den Punkt  $s_0$  stellen wir uns vor als den Mittelpunkt von  $U$ .

Unterteilungen sind bequemer für einen Würfel zu beschreiben als für eine Kugel. Deshalb ersetzen wir  $D^n$  durch den  $n$ -dimensionalen Würfel  $[0, 1]^n$ . Unser Repräsentant ist also nun eine Abbildung

$$f : ([0, 1]^n, \text{Rand}) \longrightarrow (S^n, \{s_0\}) .$$

Nach dem Lebesgue'schen Überdeckungs-Satz gibt es eine Unterteilung von  $[0, 1]^n$  in  $n$ -dimensionale Teilwürfel gleicher Größe, so daß jeder von diesen Teilwürfeln entweder ganz nach  $U$  abgebildet wird oder ganz nach  $V$  (oder, natürlich, eventuell sogar in den Durchschnitt dieser beiden).

Wir ändern nun  $f$  ab durch ein induktives Verfahren, bei dem wir der Reihe nach sämtliche bei der Unterteilung beteiligten Würfel betrachten; also nicht nur die in der Dimension  $n$ , sondern auch die in den Dimensionen  $0, 1, 2$ , und so weiter. Ein solcher Würfel heiße "schlecht", wenn er durch die Abbildung  $f$  nicht in den Unterraum  $U$  abgebildet wird. Unser Ziel bei der Abänderung wird es sein, möglichst keine schlechten Würfel zu haben; jedenfalls keine solchen der Dimension  $< n$ .

Dazu betrachten wir einen schlechten Würfel kleinster Dimension. Wenn diese Dimension gleich  $n$  ist, dann tun wir nichts; die Dimension sei also gleich  $k$ , wo  $k < n$ . Der Würfel heiße  $W$ . Die Situation ist nun so, daß  $W$  entweder ganz nach  $U$  abgebildet wird oder ganz nach  $V$ ; andererseits ("schlecht") aber auch nicht ganz nach  $U$ . Also wird  $W$  ganz nach  $V$  abgebildet.

Sei  $W'$  ein Würfel im Rand von  $W$ . Dann hat  $W'$  kleinere Dimension als  $W$  und ist folglich nicht schlecht;  $W'$  wird also durch  $f$  ganz nach  $U$  abgebildet. Andererseits, als Teilmenge von  $W$ , wird  $W'$  auch ganz nach  $V$  abgebildet.  $W'$  wird also in den Durchschnitt  $U \cap V$  abgebildet. Wir schließen, daß der ganze Rand  $\partial W$  in den Durchschnitt  $U \cap V$  abgebildet wird.

Nun ist  $k < n$ , und wir wissen, daß jede Abbildung

$$(D^k, \partial D^k) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$$

durch eine auf  $\partial D^k$  konstante Homotopie ganz in den Unterraum  $\partial D^n$  deformiert werden kann. Bis auf Homotopie liegt diese Situation hier vor. Also schließen wir, daß es eine auf  $\partial W$  konstante Homotopie gibt von der eingeschränkten Abbildung

$$(W, \partial W) \longrightarrow (V, U \cap V)$$

zu einer Abbildung in den Unterraum  $U \cap V$ .

Wir machen die gerade beschriebene Modifikation nun für alle schlechten Würfel der Dimension  $k$ . Das gibt die gewünschte Modifikation von der Abbildung  $f$  insoweit, als das  $k$ -Skelett betroffen ist. Bevor wir nächste Dimension in Angriff nehmen können,

müssen wir zunächst die eben ausgeführte partielle Homotopie erweitern. Das machen wir durch eine weitere Induktion.

Sei  $\overline{W}$  ein Würfel der Dimension  $k+1$ , der den Würfel  $W$  im Rand enthält (oder einen anderen von den  $k$ -Würfeln, auf denen die Abbildung gerade modifiziert wurde). Dann ist auch  $\overline{W}$  ein “schlechter” Würfel, da er ja einen solchen im Rande enthält,  $\overline{W}$  wird also ganz in den Unterraum  $V$  abgebildet. Um die Homotopie auf  $\overline{W}$  zu erweitern, wird es also genügen, die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für das Paar  $(\overline{W}, \partial\overline{W})$  zu zitieren, angewandt auf die Abbildung

$$(\overline{W}, \partial\overline{W}) \longrightarrow V ,$$

und wenn wir das in dieser Weise tun, dann wird sich an der Eigenschaft nichts ändern, daß eben  $\overline{W}$  ganz nach  $V$  abgebildet wird.

Wir machen diese Modifikation mit allen Würfeln der Dimension  $k+1$ , danach mit denen der Dimension  $k+2$ , und so weiter, bis  $n$ . Danach können wir dann die oben beschriebene Modifikation für die  $(k+1)$ -Würfeln in Angriff nehmen, falls auch  $k+1 < n$ . Und so weiter.

Schließlich haben wir erreicht, daß es keine schlechten Würfel der Dimension  $< n$  mehr gibt; d.h. daß das ganze  $(n-1)$ -Skelett von unserem unterteilten Würfel  $W$  nun in den Unterraum  $U$  abgebildet wird. Dabei ist es bis zum Schluß immer noch richtig, daß jeder von den  $n$ -dimensionalen Teilwürfeln entweder ganz nach  $U$  abgebildet wird oder ganz nach  $V$ .

Wir können den Homotopie-Additions-Satz nun auf das von der so modifizierte Abbildung repräsentierte Element von  $\pi_n(S^n, \{s_0\})^\ddagger \approx \pi_n(S^n, U)^\ddagger$  anwenden. Der Satz sagt uns, daß dieses Element eine Summe von anderen ist; nämlich von denjenigen Elementen, deren jedes repräsentiert ist (bis eventuell auf einen Faktor  $-1$ ) von der Einschränkung der Abbildung auf einen der “schlechten”  $n$ -Würfel.

Es wird nun genügen, von *diesen* Elementen nachzuweisen, daß jedes von ihnen ein Vielfaches von dem Standard-Element ist; denn dann folgt das natürlich auch für die Summe.

Sei  $W_0$  einer der “schlechten”  $n$ -Würfel. Aus der obigen Herleitung ergibt sich, und das ist der Punkt von der ganzen Argumentation, daß die Abbildung von  $(W_0, \partial W_0)$  nach  $(S^n, U)$  faktorisiert über eine Abbildung

$$(W_0, \partial W_0) \longrightarrow (V, U \cap V) .$$

Nun ist aber  $V$  zusammenziehbar, und  $U \cap V$  ist homotopie-äquivalent zu  $S^{n-1}$ . Über die lange exakte Folge der Homotopiegruppen sehen wir also, daß  $\pi_n(V, U \cap V)^\ddagger$  isomorph zu  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, \{s_0\})^\ddagger$  ist; was, wie wir schon wissen,  $\approx \mathbb{Z}$  ist (und auch erzeugt vom Bild des “Standard-Elements” in  $\pi_n(V, U \cap V)^\ddagger$ ). Wir sind damit fertig.  $\square$

Die beiden anderen jetzt zu skizzierenden Methoden machen nicht eine derart “individuelle” Betrachtung wie die erste Methode. Vielmehr werden Sätze allgemeiner Art zitiert um zusätzliche Struktur ins Spiel zu bringen (simpliciale Struktur bzw. Differenzierbarkeit). Danach geht es jeweils ganz schnell (mit einem kleinen Trick).

2. METHODE. (Skizze: *Differenzierbarkeit*). Wenn von Abbildungen

$$f : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (S^n, \{s_0\})$$

die Rede ist, dann kann man sich daran erinnern, daß die beteiligten Räume ja nicht nur *topologische Räume* sind, sondern sogar auch *differenzierbare Mannigfaltigkeiten*. Es ist also sinnvoll, hier von *differenzierbaren Abbildungen* zu reden. Man kann sich deshalb fragen, was es für einen Unterschied machen würde, wenn man grundsätzlich auf Differenzierbarkeit bestehen würde. Das heißt, bei einem Repräsentanten, wie dem obigen  $f$ , würde man darauf bestehen, daß es sich um eine differenzierbare Abbildung handelt; und bei den Homotopien zwischen Repräsentanten würde man ebenfalls auf Differenzierbarkeit bestehen. Die Frage nach dem Unterschied nun läßt sich ganz lapidar beantworten: es würde überhaupt keinen Unterschied machen.

Das liegt daran, daß man stetige Abbildungen systematisch durch differenzierbare Abbildungen approximieren kann. Das ist ein nicht-trivialer Sachverhalt, wenn auch vielleicht nicht sehr überraschend. Die technische Durchführung ist, grob gesprochen, so geregelt, daß man zunächst das Approximationsproblem "lokal" behandelt. Dafür zuständig ist der Satz von Stone-Weierstraß. Dieser Satz macht eine Aussage darüber, wie man stetige Funktionen auf einem kompakten Teilgebiet des  $\mathbb{R}^n$  approximieren kann durch Funktionen aus einer (geeigneten) vorgegebenen Algebra von Funktionen; z.B. differenzierbare Funktionen. Nachdem der lokale Fall dann abgehandelt ist, braucht man nur noch zu klären, wie man lokale Verbesserungen "zusammenkleben" kann (das Stichwort dazu ist: *Partition der Eins*).

Es sei nun angenommen, daß das obige  $f$  eine differenzierbare Abbildung ist (oder, etwas technischer und genauer: eine  $C^\infty$ -Abbildung). Wir sind dann berechtigt, den Satz von Sard zu zitieren. Der Satz sagt, daß die singulären Werte von  $f$  das Maß 0 haben, daß insbesondere deshalb die regulären Werte von  $f$  überall dicht sind. Dabei wird  $y \in S^n$  als *regulärer Wert* bezeichnet, wenn sein Urbild  $f^{-1}(y)$  nur "reguläre Punkte" enthält; und als *singulärer Wert*, wenn das Urbild  $f^{-1}(y)$  mindestens einen "singulären Punkt" enthält. Ein Punkt  $x$  heißt dabei *regulärer Punkt*, wenn erstens  $x$  innerer Punkt von  $D^n$  ist und wenn zweitens die *abgeleitete Funktion*  $f'_x$ , die Vektorraum-Abbildung

$$f'_x : (\text{Tangentialraum an } x) \longrightarrow (\text{Tangentialraum an } f(x)),$$

*surjektiv* ist. Der Punkt heißt *singulärer Punkt* im andern Fall (d.h. wenn er Randpunkt ist oder wenn die abgeleitete Funktion *nicht* surjektiv ist).

Im vorliegenden Fall haben die Tangentialräume bei  $x$  und bei  $f(x)$  dieselbe Dimension, nämlich  $n$ ; wenn  $f'_x$  surjektiv ist, so ist es deshalb schon ein Isomorphismus. Also sagt der Implizite-Funktionen-Satz (oder sein Spezialfall, der Inverse-Funktionen-Satz), daß an einem regulären Punkt  $x$  die Abbildung  $f$  ein *lokaler Diffeomorphismus* ist; d.h. es gibt eine offene Umgebung  $U(x)$ , so daß die eingeschränkte Abbildung

$$f|U(x) : U(x) \longrightarrow f(U(x))$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei nun  $y$  ein regulärer Wert. Dann sind in dem Urbild  $f^{-1}(y)$  nur endlich viele Punkte. Denn andernfalls (Kompaktheit von  $D^n$ ) hätten diese Punkte einen Häufungspunkt; der müsste dann selbst in dem Urbild liegen, könnte andererseits aber kein regulärer Punkt sein (denn bei einem lokalen Diffeomorphismus kann diese Häufungspunkt-Situation nicht vorliegen).

Es folgt, daß der reguläre Punkt  $y$  eine Umgebung  $V(y)$  hat, so daß das Urbild  $f^{-1}(V(y))$  aus endlich vielen Teilen besteht, deren jeder per Diffeomorphismus auf  $V(y)$  abgebildet wird.

Wir ersetzen  $V(y)$  durch eine kleinere Ball-Umgebung und sind dann sofort in der Situation, wo wir den Homotopie-Additions-Satz und das Grad-1-Lemma anwenden können.  $\square$

3. METHODE. (Skizze: *Simpliziale Approximation*). Man kann  $S^n$  und  $D^n$  als Simplicialkomplexe auffassen (oder, technischer und genauer: für  $S^n$  wählt man eine feste topologische Äquivalenz zu einem endlichen Simplicialkomplex; und für  $D^n$  auch).

Nun sind Simplicialkomplexe sehr starr: es gibt nur wenige Abbildungen zwischen zwei solchen, die *simpliziale Abbildungen* sind (d.h. es wird jedes Simplex in ein Simplex abgebildet; dabei gehen Ecken in Ecken, und die Abbildung ist affin). Offensichtlich gibt es z.B. zwischen endlichen Simplicialkomplexen auch nur endlich viele simpliziale Abbildungen. Man hat also im allgemeinen gar keine Chance, jede stetige Abbildung durch eine homotope simpliziale Abbildung zu ersetzen; jedenfalls dann, wenn man darauf Wert legt, immer dieselbe simpliziale Struktur zu verwenden.

Diese Kalamität verschwindet aber, wenn man die simpliziale Struktur für verhandelbar erklärt (zumindest für ein bißchen). Und zwar muß man in systematischer Weise zulassen, daß ein Simplicialkomplex ersetzt werden darf durch eine *Unterteilung* davon. Eine Abbildung zwischen Simplicialkomplexen wird nun als *semi-linear* bezeichnet, wenn zwar nicht die Abbildung selbst simplizial ist; wenn aber Unterteilungen von Quelle und Ziel existieren, so daß zumindest die Abbildung der unterteilten Komplexe dann simplizial ist. Es ist hierfür auch die Bezeichnung PL-Abbildung gebräuchlich (die Vorsilbe "PL" kommt her von "piecewise linear").

Der *Satz über Simpliciale Approximation* sagt, daß jede stetige Abbildung zwischen endlichen Simplicialkomplexen ersetzt werden kann durch eine homotope PL-Abbildung. (Es gibt auch eine vernünftige relative Version von dieser Aussage.)

Wenn wir nun von der Abbildung  $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (S^n, \{s_0\})$  annehmen dürfen, daß sie *semilinear* ist, so sind wir wieder ganz schnell fertig: wir nehmen ein höchst-dimensionales (also  $n$ -dimensionales) Simplex in  $S^n$  (und zwar von der Unterteilung-simplizialen-Struktur). Dieses Simplex hat dann (natürlich) nur endlich viele Urbilder, und für jedes von diesen wird das Innere per topologischer Äquivalenz abgebildet.

Die Schlußbemerkung ist (fast) dieselbe wie beim vorigen mal.  $\square$

**Beweis des Hurewicz-Satzes.**

Bezeichne  $\nabla^n$  das geometrische *Standard-Simplex*,

$$\nabla^n = \{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \}.$$

Für einen Raum  $X$  war der *singuläre Komplex*  $S(X)$  definiert als die simpliziale Menge

$$S(X) : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}), \quad [n] \longmapsto S(X)_n,$$

wo  $S(X)_n$  die Menge der Abbildungen

$$S(X)_n = \{ f : \nabla^n \longrightarrow X \mid f \text{ stetig} \}$$

bezeichnet.

**DEFINITION.** Sei  $A$  Unterraum von  $X$ , sei  $k \geq 0$  eine natürliche Zahl. Die Untersimpliziale-Menge  $S(X, A; k)$  von  $S(X)$  ist definiert durch

$$S(X, A; k)_n = \{ f : \nabla^n \longrightarrow X \mid f(\text{Sk}_k(\nabla^n)) \subset A \}$$

wo  $\text{Sk}_k(\nabla^n)$  das *k-Skelett* von  $\nabla^n$  bezeichnet; das heißt, die Vereinigung aller derjenigen Seiten von  $\nabla^n$ , deren Dimension  $\leq k$  ist.

**Lemma.** Wenn die Inklusion  $A \rightarrow X$  *k-zusammenhängend* ist, dann ist  $S(X, A; k)$  *Deformationsretrakt* von  $S(X)$ . (Das heißt, es gibt eine simpliziale Homotopie von der identischen Abbildung auf  $S(X)$  zu einer Retraktion von  $S(X)$  zu  $S(X, A; k)$ , wobei die Homotopie auf  $S(X, A; k)$  konstant ist.)

**BEMERKUNG.** Bei CW-Komplexen gilt davon auch die Umkehrung: Wenn  $S(X, A; k)$  *Deformationsretrakt* von  $S(X)$  ist, dann ist die Inklusion  $A \rightarrow X$  *k-zusammenhängend*. Das folgt z.B. aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\simeq} & |S(A)| & \xleftarrow{=} & |S(A)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xleftarrow{\simeq} & |S(X)| & \xleftarrow{\quad} & |S(X, A; k)| \end{array}$$

wo, wie wir (für CW-Komplexe) wissen, die beiden mit “ $\simeq$ ” bezeichneten Abbildungen Homotopie-Äquivalenzen sind; und der rechte untere Pfeil auch (nach der gerade gemachten Hypothese). Denn wenn  $|S(X, A; k)|$  als CW-Komplex relativ zu  $|S(A)|$  betrachtet wird, so gibt es (offensichtlich) keine Zellen der Dimension  $\leq k$ . Solche Zellen würden ja denjenigen Simplizes (genauer: nicht-ausgearteten Simplizes) der Dimension  $\leq k$  entsprechen, die *nicht* in  $S(A)$  liegen, und davon gibt es in  $S(X, A; k)$  keine.  $\square$



BEWEIS DES LEMMAS. Bezeichne  $\Delta^m$  die simpliziale Menge *Standard- $m$ -Simplex*. Die gesuchte Homotopie ist eine Abbildung von simplizialen Mengen,

$$S(X) \times \Delta^1 \rightarrow S(X) ,$$

die die folgende Bedingung erfüllt (“Homotopie von der Identität zu ...”). Wenn ‘0’ und ‘1’ die beiden Exemplare  $\Delta^0$  in  $\Delta^1$  bezeichnen, so soll gelten, daß die Einschränkung der Abbildung auf  $S(X) \times 0$  die “Identität” (kanonische Identifizierung) sein soll; und die Einschränkung der Abbildung auf  $S(X) \times 1$  eine Abbildung nach  $S(X, A, k)$ , deren Einschränkung auf  $S(X, A, k) \times 1$  die “Identität” (kanonische Identifizierung) ist.

Die simpliziale Menge  $S(X)$  kann (wie jede andere simpliziale Menge auch) erhalten werden durch Zusammenkleben von simplizialen Mengen des Typs *Standard- $n$ -Simplex*,

$$S(X) = \bigcup_n S(X)_n \times \Delta^n / \sim .$$

Deshalb können wir die gesuchte Homotopie auch auffassen als eine Abbildung

$$\bigcup_n S(X)_n \times \Delta^n \times \Delta^1 \longrightarrow S(X) ,$$

die eine Bedingung erfüllt (s. oben) und die mit der induzierten Äquivalenzrelation kompatibel ist. Anders formuliert, wir suchen für jedes  $n$  und für jedes Element  $f$  in  $S(X)_n$  eine Abbildung

$$\phi_f : \Delta^n \times \Delta^1 \longrightarrow S(X) ,$$

die für das erzeugende  $n$ -Simplex  $\iota$  von  $\Delta^n$  die Werte

$$\phi_f(\iota \times 0) = f \quad \text{und} \quad \phi_f(\iota \times 1) \in S(X, A, k)_n$$

annimmt (und<sup>1</sup>  $\phi_f = \bar{f} \circ \text{pr}_1$ , wenn  $f \in S(X, A, k)_n$ ), und wo die Gesamtheit dieser Abbildungen mit den von  $S(X)$  herkommenden Struktur-Abbildungen kompatibel ist.

Nun entspricht eine Abbildung  $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow S(X)$  in kanonischer Weise einer Abbildung  $\nabla^n \times \nabla^1 \rightarrow X$ . In der nachfolgenden Bemerkung wird dazu eine allgemeine Begründung gegeben; hier ist eine andere, auf den speziellen Fall zugeschnittene (vgl. die frühere Diskussion zum Thema “geometrische Realisierung von  $\Delta^n \times \Delta^1$ ”): Das Prisma  $\nabla^n \times \nabla^1$  hat eine Struktur als geordneter Simplizialkomplex, die der Zerlegung von  $\Delta^n \times \Delta^1$  in simpliziale Mengen vom Typ *Standard-Simplex* entspricht. Deshalb induziert eine Abbildung  $\nabla^n \times \nabla^1 \rightarrow X$  ein kompatibles System singulärer Simplizes in  $X$ , was wiederum einer Abbildung  $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow S(X)$  entspricht.

Wir haben damit folgende Umformulierung. Wir suchen für jedes  $n$  und für jedes Element  $f$  in  $S(X)_n$  eine Abbildung

$$\psi_f : \nabla^n \times \nabla^1 \longrightarrow X ,$$

mit den Einschränkungen

$$\psi_f | (\nabla^n \times 0) = f \quad \text{und} \quad \psi_f | (\nabla^n \times 1) \in S(X, A, k)_n$$

(und auch  $\psi_f = f \circ \text{pr}_1$ , wenn  $f \in S(X, A, k)_n$ ), und so daß die Gesamtheit dieser Abbildungen mit den von  $S(X)$  herkommenden Struktur-Abbildungen kompatibel ist.

---

<sup>1</sup>hier bezeichnet  $\bar{f} : \Delta^n \rightarrow S(X)$  die charakteristische Abbildung von dem Simplex  $f$

Wir konstruieren das System von Abbildungen durch Induktion über  $n$ ; der Induktionsanfang ist der (triviale) Fall  $n = -1$ . Was die Kompatibilitätsbedingungen angeht, so wird es genügen, auf die Kompatibilität mit den *Rand-Abbildungen* einerseits und die Kompatibilität mit den *Ausartungs-Abbildungen* andererseits zu achten; das liegt daran, daß ja jede Struktur-Abbildung als die Komposition von einer Rand- und einer Ausartungs-Abbildung geschrieben werden kann.

Sei  $f \in S(X)_n$ . Wenn  $f$  ausgeartet ist, dann existiert ein nicht-ausgeartetes singuläres Simplex  $f' : \nabla^{n'} \rightarrow X$  und es existiert ein "Ausartungs-Operator", d.h. eine (surjektive) Abbildung  $\sigma : [n] \rightarrow [n']$ , so daß  $f = \sigma^*(f')$ ; oder, was dasselbe bedeutet,  $f$  ist die Komposition

$$f : \nabla^n \xrightarrow{\sigma_*} \nabla^{n'} \xrightarrow{f'} X ;$$

ferner sind sowohl  $\sigma$  als auch  $f'$  durch  $f$  eindeutig bestimmt. Wir *definieren* nun in dieser Situation  $\psi_f$  als die Komposition

$$\psi_f : \nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{\sigma_* \times \text{Id}} \nabla^{n'} \times \nabla^1 \xrightarrow{\psi_{f'}} X .$$

Die geforderte Kompatibilität mit Ausartungen ist dann automatisch erfüllt, soweit  $f$  und irgendein anderes Simplex von kleinerer Dimension betroffen sind.

Sei nun  $f$  nicht-ausgeartet. Die Kompatibilität mit den Rand-Abbildungen und die anderen Bedingungen auch (soweit sie  $f$  betreffen) können wir umformulieren in die folgenden drei Vorgaben an die Abbildung  $\psi_f$ .

"Die Homotopie startet bei der Identität" bedeutet, die eingeschränkte Abbildung  $\psi_f | (\nabla^n \times 0)$  ist gleich  $f$ .

Die "Kompatibilität mit Rand-Abbildungen" bedeutet, daß  $\psi_f$  über dem ganzen Rand  $\partial \nabla^n$  vorgegeben ist; d.h. die eingeschränkte Abbildung  $\psi_f | (\partial \nabla^n \times \nabla^1)$  ist vorgegeben.

"Die Homotopie endet in  $S(X, A, k)$ " bedeutet für  $n > k$  gar nichts. Denn für  $n > k$  ist das  $k$ -Skelett von  $\nabla^n$  schon ganz in dem Rand  $\partial \nabla^n$  enthalten. Deshalb ist die diesbezügliche Bedingung schon durch die induktiven Vorgaben (zusammen mit der Kompatibilität mit den Rand-Abbildungen) gewährleistet. In dem Fall wird es also genügen,  $\psi_f$  als eine Komposition

$$\nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{r} \nabla^n \times 0 \cup \partial \nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{v} X$$

zu definieren, wo  $r$  eine Retraktions-Abbildung bezeichnet und wo  $v$  die durch die anderen Vorgaben fixierte Abbildung ist.

Im Falle  $n \leq k$  dagegen bedeutet die letzte Bedingung, daß die eingeschränkte Abbildung  $\psi_f | (\nabla^n \times 1)$  eine Abbildung in den Unterraum  $A$  sein soll. Die Abbildung

$$\nabla^n \times 0 \cup \partial \nabla^n \times \nabla^1 \xrightarrow{v} X$$

können wir interpretieren als eine "Test"-Abbildung  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$  für die Frage, ob (oder ob nicht) die Inklusion  $A \rightarrow X$   $k$ -zusammenhängend ist (wegen  $n \leq k$ ). Wegen des vorausgesetzten  $k$ -Zusammenhangs geht der Test erfolgreich; was bedeutet, daß  $\psi_f$  existiert.  $\square$

BEMERKUNG. Im vorigen Beweis wurde benutzt, daß einer Abbildung  $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow S(X)$  in kanonischer Weise eine Abbildung  $\nabla^n \times \nabla^1 \rightarrow X$  entspricht. Da  $\nabla^n \times \nabla^1$  isomorph ist zu der geometrischen Realisierung  $|\Delta^n \times \Delta^1|$ , folgt diese Aussage auch aus dem folgenden Sachverhalt. Sei  $X$  ein topologischer Raum, sei  $W$  eine simpliziale Menge. Einer Abbildung  $W \rightarrow S(X)$  entspricht dann, in kanonischer Weise, eine Abbildung  $|W| \rightarrow X$ . Anders gesagt, es gibt einen ganz bestimmten Isomorphismus von Mengen,

$$\text{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(W, S(X)) \approx \text{Hom}_{(\text{top.Räume})}(|W|, X).$$

Dieser Isomorphismus hat zudem noch die Eigenschaft, daß er *natürlich* ist; d.h. das aus einer Abbildung  $w : W \rightarrow W'$  resultierende Quadrat von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(W, S(X)) & \xrightarrow{\approx} & \text{Hom}_{(\text{top.Räume})}(|W|, X) \\ \uparrow w^* & & \uparrow |w|^* \\ \text{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(W', S(X)) & \xrightarrow{\approx} & \text{Hom}_{(\text{top.Räume})}(|W'|, X) \end{array}$$

ist *kommutativ*; und ähnlich auch für eine Abbildung  $x : X \rightarrow X'$ .

Man sagt für diesen wichtigen Sachverhalt auch, daß die beiden Funktoren

$$(\text{s. Mengen}) \xrightarrow{|\dots|} (\text{top. Räume})$$

und

$$(\text{s. Mengen}) \xleftarrow{S(\dots)} (\text{top. Räume})$$

zueinander *adjungierte Funktoren* sind. Etwas pedantischer (und auch korrekter; der Sachverhalt ist ja nicht symmetrisch), kann man noch die Vokabeln “links” und “rechts” hier einbauen (sie beziehen sich auf die Stellung in “ $\text{Hom}(-, -)$ ”). Man sagt also dann,  $|\dots|$  ist *links-adjungiert* zu  $S(\dots)$ ; und  $S(\dots)$  ist *rechts-adjungiert* zu  $|\dots|$ .

Um den Adjunktions-Isomorphismus zu bekommen, kann man z.B. so vorgehen, daß man die früher diskutierte *Evaluations-Abbildung*,  $\text{ev} : |S(X)| \rightarrow X$ , verwendet. Man definiert nämlich eine Abbildung

$$\text{Hom}_{(\text{s.Mengen})}(W, S(X)) \longrightarrow \text{Hom}_{(\text{top.Räume})}(|W|, X)$$

dadurch, daß man der Abbildung  $f : W \rightarrow S(X)$  die zusammengesetzte Abbildung

$$|W| \xrightarrow{|f|} |S(X)| \xrightarrow{\text{ev}} X$$

zuordnet. Man muß dann noch ein paar Dinge nachprüfen; was wir hier aber nicht tun wollen.  $\square$

**Lemma.** *Wenn die Inklusion  $A \rightarrow X$   $k$ -zusammenhängend ist, dann sind die relativen Homologiegruppen  $H_*(X, A)$  dieselben wie die des Kettenkomplexes (Unterkomplex des relativen Kettenkomplexes)*

$$n \longmapsto \mathbb{Z}[S(X, A, k)_n] / \mathbb{Z}[S(A)_n].$$

BEWEIS. Das ist eine Konsequenz aus dem vorigen Lemma. Denn nach diesem ist die Inklusion von simplizialen Mengen

$$([n] \mapsto S(X, A, k)_n) \longrightarrow ([n] \mapsto S(X)_n)$$

eine simpliziale Homotopie-Äquivalenz, induziert deshalb eine Ketten-Homotopie-Äquivalenz und folglich auch Isomorphismen der Homologiegruppen. Es folgt, daß in dem Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[S(A).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S(X, A, k).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S(X, A, k).] / \mathbb{Z}[S(A).] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[S(A).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S(X).] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S(X).] / \mathbb{Z}[S(A).] \end{array}$$

zwei der vertikalen Pfeile (nämlich links und in der Mitte) Isomorphismen auf der Homologie sind. Wegen der langen exakten Folge der Homologiegruppen für die obere, bzw. die untere Zeile, und wegen dem Fünfer-Lemma, folgt nun, daß auch der rechte vertikale Pfeil Isomorphismen auf der Homologie induziert.  $\square$

**Satz.** Seien  $X$  und  $A$  weg-zusammenhängende Räume, wo  $A$  Unterraum von  $X$  ist. Die Inklusion von  $A$  in  $X$  sei  $(m-1)$ -zusammenhängend. Dann ist die Abbildung

$$\pi_m(X, A)^\ddagger \longrightarrow H_m(X, A)$$

ein Isomorphismus.

BEWEIS. Bezeichne  $E_m(X, A)$  die abelsche Gruppe, die erzeugt ist von den Abbildungen von Raumpaaren,  $f: (D^m, \partial D^m) \rightarrow (X, A)$ .

Von dieser abelschen Gruppe ist  $\pi_m(X, A)^\ddagger$  ein Quotient. Bezeichne  $E'$  den Kern der Quotienten-Abbildung. Es ergibt sich aus der Definition von  $\pi_m(X, A)^\ddagger$ , daß  $E'$  diejenige Untergruppe ist, die von den folgenden beiden Typen von Elementen erzeugt wird: Wenn  $f$  und  $f'$  homotop sind (per Homotopie von Paaren), dann ist  $[f] - [f']$  in  $E'$ ; und in der "Summen"-Situation (diskutiert bei der Definition von  $\pi_m(X, A)^\ddagger$ ) ist das Element  $[f] - [f_1] - [f_2]$  in  $E'$ .

Wenn wir andererseits uns  $D^m$  mit dem Standard-Simplex  $\nabla^m$  identifiziert denken, so ist ein  $f$  der obigen Art dasselbe wie ein singuläres  $m$ -Simplex in  $X$ , das allerdings die zusätzliche Eigenschaft hat, daß der Rand ganz in  $A$  liegt; mit anderen Worten, es handelt sich um ein Element der Menge  $S(X, A; m-1)_m$ . Auf diese Weise wird  $E_m(X, A)$  also identifiziert mit der durch Linearisierung erhaltenen Gruppe  $\mathbb{Z}[S(X, A; m-1)_m]$ . Diese Gruppe nun hat als Quotient die  $m$ -te Kettengruppe von dem Kettenkomplex

$$\mathbb{Z}[S(X, A, m-1).] / \mathbb{Z}[S(A).]$$

Diese  $m$ -Kettengruppe besteht (offenbar) nur aus Zykeln, hat also ihrerseits als Quotient die  $m$ -te Homologiegruppe von dem Kettenkomplex (von der wir nach dem vorigen Lemma wissen, daß sie dasselbe wie  $H_m(X, A)$  ist). Bezeichne  $E''$  den Kern der Quotienten-Abbildung. Nach der gerade gegebenen Herleitung wissen wir, daß  $E''$  diejenige Untergruppe ist, die von den folgenden beiden Typen von Elementen erzeugt

wird: Wenn das Bild von  $f$  ganz in  $A$  liegt, dann ist  $[f] \in E''$ ; und wenn  $\tilde{f}$  ein Element von  $S(X, A, m-1)_{m+1}$  ist, dann ist der Rand von  $\tilde{f}$ ,

$$\sum_i (-1)^i d_i(\tilde{f}),$$

ebenfalls in  $E''$ .

Der Satz wird bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß diese beiden als Kerne von Quotienten-Abbildungen auftretenden Gruppen in Wirklichkeit zueinander *gleich* sind,

$$E' \stackrel{!}{=} E'';$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, sobald wir die folgenden beiden Behauptungen nachgewiesen haben.

[ Behauptung 1 läuft dabei darauf hinaus, zu zeigen, daß  $\pi_m(X, A)^\ddagger \rightarrow H_m(X, A)$  eine wohldefinierte Abbildung ist; oder, was dasselbe bedeutet, daß die Hurewicz-Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus von abelschen Gruppen ist — die Additivität davon hatten wir bisher ja noch nicht gezeigt. ]

BEHAUPTUNG 1. *Die Elemente von  $E'$  sind trivial in  $E_m(X, A) / E''$  ( $\approx H_m(X, A)$ ).*

BEHAUPTUNG 2. *Die Elemente von  $E''$  sind trivial in  $E_m(X, A) / E'$  ( $\approx \pi_m(X, A)^\ddagger$ ).*

BEWEIS VON BEHAUPTUNG 1. Es genügt, den Nachweis für erzeugende Elemente zu führen. Einmal, wenn  $f$  homotop zu  $f'$  ist, dann ist zu zeigen, daß  $[f] - [f'] = 0$  ist in der Quotientengruppe  $H_m(X, A)$ ; oder, was dasselbe bedeutet,  $[f] = [f']$ . Dies wurde aber schon gezeigt im Anschluß an die Definition der Hurewicz-Abbildung.

Zum andern ist zu zeigen, daß in der “Summen”-Situation gilt  $[f] - [f_1] - [f_2] = 0$  in der Quotientengruppe oder, äquivalent dazu,  $[f] = [f_1] + [f_2]$ . Das wurde noch nicht gezeigt und soll jetzt nachgeholt werden.

Es gibt einen *universellen Fall*: einen (einzigsten) speziellen Fall, auf dessen Behandlung wir uns zurückziehen können. Dazu betrachten wir einen  $m$ -dimensionalen Würfel  $W$  zusammen mit einer Unterteilung von  $W$  in zwei Teile  $W_1$  und  $W_2$  (“linke Hälfte” und “rechte Hälfte”). Es ist also  $W$  die Vereinigung dieser beiden Teile, und der Durchschnitt von  $W_1$  und  $W_2$  ist ein Würfel der Dimension  $m-1$ , der im Rand von beiden liegt. Sei  $U$  der Unterraum von  $W$ , der gegeben ist durch die Vereinigung der Ränder von  $W_1$  und  $W_2$ . Das Paar  $(W, U)$  ist unser universeller Fall, wie wir sogleich nachprüfen werden.

Sei nämlich der Ball  $D^m$  mit einer Orientierung versehen. Wir wählen eine Identifizierung  $w: D^m \xrightarrow{\approx} W$ . Wir wählen zusätzlich auch Identifizierungen  $w_1: D^m \rightarrow W_1$  und  $w_2: D^m \rightarrow W_2$ , und zwar machen wir das so, daß die Inklusionen von  $W_1$  und  $W_2$  in  $W$  beide den lokalen Grad  $+1$  haben. Die angesprochene *Universalität* des Paares  $(W, U)$  bedeutet das folgende. In der “Summen”-Situation für ein Tripel von Abbildungen,  $(f, f_1, f_2)$ , gibt es eine Abbildung

$$F: (W, U) \longrightarrow (X, A)$$

so daß bis auf Homotopie (Homotopie von Abbildungen von Paaren) gilt

$$f = F \circ w \quad , \quad f_1 = F \circ w_1 \quad , \quad f_2 = F \circ w_2 \quad .$$

Es wird deshalb genügen, zu zeigen, daß  $[w] = [w_1] + [w_2]$  in  $H_m(W, U)$  gilt. Denn das impliziert, per Transport entlang der Abbildung  $F_* : H_m(W, U) \rightarrow H_m(X, A)$ , dann auch die gewünschte Beziehung  $[f] = [f_1] + [f_2]$

Wir benötigen die Kenntnis dessen, daß es eine direkte-Summen-Zerlegung gibt,

$$H_m(W, U) \approx H_m(W_1, \partial W_1) \oplus H_m(W_2, \partial W_2) \quad .$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies einzusehen. Z.B. folgt es aus der Tatsache, daß die Homologie von einem relativen CW-Komplex aus dem zellulären Kettenkomplex berechnet werden kann:  $H_m(W, U)$  ist die freie abelsche Gruppe auf zwei Erzeugenden, und die Erzeugenden entsprechen den beiden Zellen, kommen insbesondere also her von  $H_m(W_1, \partial W_1)$  und von  $H_m(W_2, \partial W_2)$ .

Wegen der direkte-Summen-Zerlegung ist das Element  $[w]$  eine Summe

$$[w] = \alpha_1 [w_1] + \alpha_2 [w_2] \quad .$$

Wir müssen uns davon überzeugen, daß die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beide  $= 1$  sind. Wir behandeln den Fall von  $\alpha_1$ . Der Fall von  $\alpha_2$  geht genauso.

Die Inklusionen  $W_1 \rightarrow W$  und  $\partial W_1 \rightarrow \partial W_1 \cup W_2$  sind Homotopie-Äquivalenzen. Deshalb ist die Abbildung  $H_m(W_1, \partial W_1) \rightarrow H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$  ein Isomorphismus. D.h. die zusammengesetzte Abbildung  $H_m(W_1, \partial W_1) \rightarrow H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$  in dem Diagramm

$$H_m(W_1, \partial W_1) \longrightarrow H_m(W, U) \longrightarrow H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$$

ist ein Isomorphismus. Die zusammengesetzte Abbildung

$$H_m(W_2, \partial W_2) \longrightarrow H_m(W, U) \longrightarrow H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$$

andererseits ist trivial (offensichtlich; denn sie faktorisiert über  $H_m(W_2, W_2)$ ). Es folgt, daß die Abbildung  $H_m(W, U) \rightarrow H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$  die Projektion auf den Summanden  $H_m(W_1, \partial W_1)$  von  $H_m(W, U)$  ist. Das Bild von  $[w]$  in  $H_m(W, \partial W_1 \cup W_2)$  ist also  $\alpha_1 [w_1]$ . Nun sind die Abbildungen  $w$  und  $w_1$  aber homotop, als Abbildungen von Paaren, wenn man sie als Abbildungen  $(D^m, \partial D^m) \rightarrow (W, \partial W_1 \cup W_2)$  betrachtet. Deshalb ist  $\alpha_1$  gleich 1.  $\square$

BEWEIS VON BEHAUPTUNG 2. Wieder genügt es, den Nachweis für erzeugende Elemente zu führen. Zunächst ist zu zeigen, wenn das Bild von  $f$  ganz in  $A$  enthalten ist, dann ist  $[f] = 0$  in der Quotientengruppe  $\pi_m(X, A)^\ddagger$ ; das ist aber klar: da das Bild von  $f$  in  $A$  liegt, induziert eine Kontraktion von  $D^m$  eine Homotopie von  $f$  zu einer trivialen Abbildung (und zwar eine Homotopie von Abbildungen von Paaren).

Zum andern, wenn  $\tilde{f}$  ein Element von  $S(X, A, m-1)_{m+1}$  ist, dann ist zu zeigen, daß der Rand von  $\tilde{f}$ ,

$$\sum_i (-1)^i d_i(\tilde{f}) \quad ,$$



**Zusatz S. 29**

Die Aussage (kurz nach dem ersten Display): “ Dieses Element ist 0; das kommt von der Existenz der Abbildung  $\tilde{f}$  auf  $\nabla^{m+1}$ . ” bedarf einer Rechtfertigung. Eine solche Rechtfertigung bekommt man, sobald man weiß, daß die Abbildung

$$(B, \text{Sk}_{m-1}(B)) \longrightarrow (\partial\nabla^{m+1}, \text{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1}))$$

homotop ist (als Abbildung von Paaren) zu einer Abbildung, wo der Teil  $\partial B$  von  $\text{Sk}_{m-1}(B)$  auf einen einzigen Punkt geht.

Dafür genügt es zu wissen, daß die Abbildung

$$\partial B \longrightarrow \text{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$$

nullhomotop ist. Das folgt aus diesem: In  $\text{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$  gibt es einen Unterraum  $T$  mit den Eigenschaften: Der Rand  $\partial B$  bildet nach  $T$  ab. Und  $T$  ist *zusammenziehbar* (homotopie-äquivalent zum einpunktigen Raum).

Der Unterraum  $T$  ist definiert als eine Vereinigung von  $(m-1)$ -Seiten in  $\nabla^{m+1}$ ,

$$T = \bigcup_{j \geq i+2} \delta_j(\delta_i(\nabla^{m-1})) .$$

Das sind *alle*  $(m-1)$ -Seiten von  $\nabla^{m+1}$  bis auf diejenigen, die für das Zusammenkleben von dem Ball  $B$  verwendet worden sind. Daraus ergibt sich sofort, daß der Rand  $\partial B$  nach  $T$  hinein abbildet. — Die Zusammenziehbarkeit von  $T$  ergibt sich durch eine andere Konstruktion davon.

Wenn  $A$  ein Simplicialkomplex ist und  $B$  davon ein Unterkomplex, dann sagt man, daß  $B$  aus  $A$  durch eine *Schälung* entsteht (englisch: *shelling*), wenn es genau zwei Simplexe gibt:  $a^d$  und  $b^{d-1}$  (oder kurz:  $a$  und  $b$ ; der obere Index bezeichnete die Dimension), die in  $A$ , aber nicht in  $B$  vorkommen; dabei ist vorausgesetzt, daß  $b$  Seite von  $a$  ist und es ist verlangt, daß  $b$  eine *freie Seite* von dem Simplicialkomplex  $A$  ist; was (nach Definition) bedeutet, daß  $b$  in keinem andern Simplex außer  $a$  enthalten ist.

Wenn  $B$  aus  $A$  durch eine Schälung entsteht, dann ist offenbar  $B$  ein Deformationsretrakt von  $A$  (ein ‘starker’ Deformationsretrakt), also auch homotopie-äquivalent dazu.

Wir bekommen jetzt  $T$  auf die folgende Weise. Erst lassen wir aus der Rand-sphäre  $\partial\nabla^{m+1}$  das  $m$ -Simplex  $\delta_{m+1}(\nabla^m)$  weg. Was übrigbleibt, ist die Vereinigung der (anderen)  $m$ -Seiten:

$$\bigcup_{i \leq m} \delta_i(\nabla^m) .$$

Das ist ein Ball. Dieser Ball wird jetzt sukzessive heruntergeschält.

Die erste Schälung entfernt das  $m$ -Simplex  $\delta_m(\nabla^m)$  und das  $(m-1)$ -Simplex

$$\delta_m(\delta_m(\nabla^{m-1})) = \delta_{m+1}(\delta_m(\nabla^{m-1})) .$$

Die nächste Schälung entfernt  $\delta_{m-1}(\nabla^m)$  und  $\delta_m(\delta_{m-1}(\nabla^{m-1}))$ . Und so weiter.

Was schließlich übrigbleibt, das ist  $T$ .



in der Quotientengruppe  $\pi_m(X, A)^\ddagger$  trivial ist. Das ist die Stelle, wo der Homotopie-Additions-Satz benötigt wird.

Um den Satz anzuwenden, ersetzen wir die  $m$ -dimensionale Randsphäre  $\partial\nabla^{m+1}$  durch einen  $m$ -dimensionalen Ball  $B$ . Dieses  $B$  verschaffen wir uns durch ‘‘Aufschneiden’’ der Randsphäre. Besser gesagt, wir zerlegen die Randsphäre zunächst in ihre Stücke, die Randseiten  $\delta_i(\nabla^m)$ . Dann setzen wir diese Stücke wieder zusammen, *aber nur teilweise* (wir führen nicht alle Verklebungen aus, die wir bräuchten, um die Randsphäre zu rekonstruieren).

Die Seite  $\delta_i(\nabla^m)$  ist nach Definition diejenige, die die  $i$ -te Ecke nicht enthält. Für zwei Indizes  $i$  und  $j$  (wo  $i \neq j$ ) treffen sich die beiden Seiten in  $\partial\nabla^{m+1}$  in einer gemeinsamen Seite der Dimension  $m-1$  (es ist die, die nicht die Ecken  $i$  und  $j$  enthält).

Für die Konstruktion von  $B$  ordnen wir die Seiten  $\delta_i(\nabla^m)$  in einer Reihe an, nach der Reihenfolge ihrer Indizes: erst 0, dann 1, dann 2, und so weiter. Für jedes Paar  $(i, i+1)$  wird nun  $\delta_i(\nabla^m)$  mit  $\delta_{i+1}(\nabla^m)$  verklebt entlang der genannten  $(m-1)$ -dimensionalen Seite (derjenigen, die nicht die Ecken  $i$  und  $i+1$  enthält). *Es werden sonst keine Verklebungen vorgenommen.*

Die Vereinigung der Ränder  $\delta_i(\partial\nabla^m)$  gibt einen Unterraum von  $B$ , den wir mit  $\text{Sk}_{m-1}(B)$  bezeichnen. Er bildet ab (vermöge der Quotienten-Abbildung  $B \rightarrow \partial\nabla^{m+1}$ ) auf den entsprechenden Unterraum  $\text{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})$  in  $\partial\nabla^{m+1}$ . Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung

$$(B, \text{Sk}_{m-1}(B)) \longrightarrow (\partial\nabla^{m+1}, \text{Sk}_{m-1}(\partial\nabla^{m+1})) \xrightarrow{\tilde{f}} (X, A).$$

Nach Wahl einer Orientierung von  $B$  repräsentiert die resultierende Abbildung von  $(B, \partial B)$  zu  $(X, A)$  ein Element von  $\pi_m(X, A)^\ddagger$ . Dieses Element ist 0; das kommt von der Existenz der Abbildung  $\tilde{f}$  auf  $\nabla^{m+1}$ . Nach dem Homotopie-Additions-Satz ist andererseits dieses Element nun tatsächlich gleich einer Summe

$$\sum_i \epsilon_i d_i(\tilde{f}),$$

wo jedes der  $\epsilon_i$  entweder gleich +1 ist oder gleich -1.

Wie wir in einem Moment sehen werden, sind die Elemente tatsächlich *abwechselnd* gleich +1 oder -1; d.h.  $\epsilon_i$  und  $\epsilon_{i+1}$  sind *verschieden* (für jedes  $i$ ). Das bedeutet, daß die letztere Summe nun tatsächlich (bis eventuell aufs Vorzeichen) gleich der uns interessierenden Summe  $\sum(-1)^i d_i(\tilde{f})$  sein wird, so daß diese folglich auch = 0 sein muß.

Die Verschiedenheit der lokalen Grade bei den Inklusionen von  $\delta_i(\nabla^m)$  und  $\delta_{i+1}(\nabla^m)$  in  $B$  sieht man so. Bis auf die  $i$ -te, bzw.  $(i+1)$ -te Ecke haben diese beiden Inklusionen von  $\nabla^m$  in  $B$  alle Ecken gemeinsam, *und zwar einschließlich deren Numerierung*. Andererseits liegen die  $i$ -te Ecke und die  $(i+1)$ -te Ecke zu verschiedenen Seiten von dem Durchschnitt  $\delta_i(\nabla^m) \cap \delta_{i+1}(\nabla^m)$  in  $B$ . Deshalb benötigt man bei dem Vergleich der Bilder von  $\delta_i(\nabla^m)$  und  $\delta_{i+1}(\nabla^m)$  eine *Spiegelung*; und die gibt das Vorzeichen.  $\square$

### Variante des Beweises (Skizze)

**Satz.**  $(X, A)$  sei relativer CW-Komplex, die Inklusion  $A \rightarrow X$  sei  $(n-1)$ -zusammenhängend. Es gibt einen relativ  $A$  homotopie-äquivalenten CW-Komplex  $(X', A)$ , der keine Zellen in den Dimensionen  $< n$  hat.

BEWEIS. Das wurde vorher gezeigt mit Hilfe von simplizialen Mengen. Hier soll ein direktes geometrisches Argument beschrieben werden. Es beruht auf dem *Austauschtrick* (dieser stammt aus der Theorie der *Whitehead-Torsion*). Der Austauschtrick hat seinen Namen daher, daß bei seiner Verwendung die Anzahl der Zellen nicht vergrößert wird. Es werden jeweils nur die Zellen einer gewissen Dimension  $k$  "ausgetauscht" gegen Zellen einer anderen, größeren Dimension (nämlich  $k+2$ ).

Wenn  $X$  keine Zellen in Dimension  $< n$  hat, so ist für den Satz nichts zu tun. Andernfalls sei  $k$  definiert als die kleinste Dimension, in der es Zellen von  $X$  gibt. Es ist  $0 \leq k \leq n-1$ .

Wir werden den Fall einer einzigen  $k$ -Zelle behandeln. Der Fall mehrerer Zellen geht (fast) wörtlich genauso; man muß dann nur die  $k$ -Zellen mit Namen versehen (d.h. man muß an einige der nachfolgenden Symbole jeweils einen Index anhängen).

Sei  $\chi: D^k \rightarrow X$  die charakteristische Abbildung einer (oder, für uns, "der")  $k$ -Zelle. Nach Voraussetzung ist das  $(k-1)$ -Skelett von  $X$  gleich dem Unterraum  $A$ . Deshalb können wir diese charakteristische Abbildung auch schreiben als eine Abbildung von Paaren,

$$\chi: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (X, A).$$

Nach der Voraussetzung des  $(n-1)$ -Zusammenhangs gibt es von der Abbildung  $\chi$  eine Homotopie, relativ  $\partial D^k$ , zu einer Abbildung  $\rho: D^k \rightarrow A$ .

Die Existenz dieser Homotopie ist äquivalent zu der folgenden Tatsache. Es gibt eine Abbildung  $\sigma: D^{k+1} \rightarrow X$  mit den folgenden Eigenschaften: Die Komposition

$$D^k \xrightarrow{\text{Identifizierung}} D_+^k \xrightarrow{\sigma} X$$

ist gleich der charakteristischen Abbildung  $\chi$ , und die Komposition

$$D^k \xrightarrow{\text{Identifizierung}} D_-^k \xrightarrow{\sigma} X$$

ist gleich der Abbildung  $\rho$ . Hier bezeichnet  $D_+^k$  die "nördliche" Hemisphäre im Rand von  $D^{k+1}$ ; und  $D_-^k$  die "südliche".

Wir bilden den *reduzierten* Abbildungszylinder der Abbildung  $\sigma$ ,

$$X' = \partial D^{k+1} \cup_{\partial D^{k+1} \times [0,1]} D^{k+1} \times [0,1] \cup_{D^{k+1} \times \{1\}} X$$

(die Anhefte-Abbildung  $D^{k+1} \times \{1\} \rightarrow X$  ist durch  $\sigma$  gegeben).

Als Abbildungszylinder (bzw. reduzierter Abbildungszylinder) ist  $X'$  homotopieäquivalent zu dem Unterraum  $X$ . Wir können also  $X$  durch  $X'$  ersetzen. Die Zellenstruktur von  $X'$  ist so:  $X'$  entsteht aus  $X$  durch das Anheften von zwei Zellen, je einer in den Dimensionen  $k+1$  und  $k+2$  (die beiden Zellen zusammen bilden eine "elementare Erweiterung" von  $X$  zu  $X'$ ).

In  $X'$  gibt es einen Unterkomplex  $B$ , der aus dem Raum  $A$  entsteht durch das Anheften von genau zwei Zellen: der ursprünglichen  $k$ -Zelle und der gerade hinzugekommenen  $(k+1)$ -Zelle. Das Anheften vermöge  $\sigma$  war derart, daß auch diese beiden Zellen zusammen eine "elementare Erweiterung" bilden, von  $A$  zu  $B$ . Insbesondere ist  $A$  Deformationsretrakt von  $B$ . Wir wählen eine (Deformations-) Retraktion  $B \rightarrow A$ .

Mit dieser Abbildung machen wir die Verklebe- (oder vielleicht besser: Kollaps-) Konstruktion

$$X_2 = X_1 \cup_B A .$$

Nach dem Klebe-Lemma ist die Abbildung  $X_1 \rightarrow X_2$  eine Homotopieäquivalenz.

Die  $k$ -Zelle von  $X$  befand sich in  $B$ . Sie wird beim Übergang zu  $X_1 \cup_B A$  daher vernichtet. Und zwar wird sie vernichtet zusammen mit der hinzugekommenen  $(k+1)$ -Zelle. Die ebenfalls hinzugekommene  $(k+2)$ -Zelle hingegen bleibt erhalten.  $\square$

**Satz.** *Der CW-Komplex  $X$  entstehe aus dem Raum  $A$  durch Anheften von  $n$ -Zellen (und von keinen Zellen sonst). Es ist*

$$\pi_n(X, A)^\ddagger \xrightarrow{\approx} H_n(X, A) ,$$

*und zwar ist dies die freie abelsche Gruppe, die frei erzeugt ist von den  $n$ -Zellen.*

BEWEIS. Das folgende Argument ist eine Verallgemeinerung dessen, mit dem vorher die  $n$ -te Homotopiegruppe der  $n$ -Sphäre ausgerechnet wurde.

Wir wissen, daß  $H_n(X, A)$  die gegebene Beschreibung hat (die freie abelsche Gruppe, erzeugt von den  $n$ -Zellen). Das folgt aus der Möglichkeit, die singuläre Homologie mit Hilfe des zellulären Kettenkomplexes zu beschreiben. Denn in unserer Situation ist der zelluläre Kettenkomplex von dem relativen CW-Komplex  $(X, A)$  ein recht banales Objekt: die  $n$ -te Kettengruppe ist die schon angesprochene freie abelsche Gruppe, und die anderen Kettengruppen sind sämtlich trivial.

Als nächstes notieren wir, daß die Abbildung  $\pi_n(X, A)^\ddagger \rightarrow H_n(X, A)$  *surjektiv* ist. Die charakteristische Abbildung von jeder der Zellen definiert ein Element in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$ . Per Änderung des Modells für den  $n$ -Ball können wir die charakteristische Abbildung umschreiben als eine vom  $n$ -Simplex,  $\alpha: (\nabla^n, \partial\nabla^n) \rightarrow (X, A)$ . Wie früher auch schon, so ist die singuläre Kette  $1 \cdot \alpha$  nun ein *relativer Zykel*. Dieser Zykel ist im Bild der Hurewicz-Abbildung (nach deren Definition), und er repräsentiert das zu der fraglichen Zelle gehörende erzeugende Element in  $H_n(X, A)$ .

Die Gruppe  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  enthält eine zu der Gruppe  $H_n(X, A)$  isomorphe Kopie, nämlich diejenige Untergruppe, die von den schon angesprochenen Elementen erzeugt wird: den Elementen, die repräsentiert sind von den Anhefte-Abbildungen der Zellen.

Sobald man nachgewiesen hat, daß diese Untergruppe schon alles ist (d.h. die ganze Gruppe), so hat man damit auch gezeigt, daß die Abbildung  $\pi_n(X, A)^\ddagger \rightarrow H_n(X, A)$  injektiv ist; und folglich ein Isomorphismus.

Es bleibt also zu zeigen, daß jedes Element von  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  sich schreiben läßt als eine Summe von den spezifizierten Elementen (und von deren additiv-inversen). Der Nachweis davon ist eine leichte Modifikation dessen, was im Falle der  $n$ -Sphäre für den analogen Zweck gemacht wurde.

Sei  $V_i$  ein konzentrischer offener  $n$ -Ball in der  $i$ -ten Zelle von  $X$ . Sei  $U$  eine offene Menge in  $X$ , die  $A$  enthält und auch aus jeder der Zellen einen äußeren konzentrischen Ring. Diese Dinge seien so bestimmt, daß die Mengen  $V_i$  und  $U$  zusammen eine offene Überdeckung von  $X$  bilden; daß die Inklusion  $A \rightarrow U$  eine Homotopieäquivalenz ist; und daß, für jedes  $i$ , der Durchschnitt  $U \cap V_i$  ein Ring-Gebiet ist (also  $\approx S^{n-1} \times (0, 1)$ ).

Die Elemente von  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  sind, nach Definition, Äquivalenzklassen von formalen Summen von Repräsentanten  $\alpha: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$ . Es wird nun genügen, nur von Elementen, die von *Repräsentanten* (nicht formalen Summen von solchen) repräsentiert sind, zu zeigen, daß sie in der fraglichen Untergruppe liegen.

Sei  $\alpha: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, A)$  ein solcher Repräsentant. Mit einer Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes (oder auch mit einer der beiden anderen bei der Behandlung der  $n$ -Sphäre skizzierten Methoden) können wir  $\alpha$  ersetzen durch eine homotope Abbildung,  $g$ , die die folgende Eigenschaft hat. Es gibt endlich viele Inklusionen  $f_j: D^n \rightarrow D^n$ , so daß die verschiedenen Bilder  $f_j(D^n)$  sich höchstens an ihren Rändern treffen, und so daß folgendes gilt:

(i) Für jedes  $j$  hat die Abbildung  $g \circ f_j$  ihr Bild ganz in einem der  $V_i$ .

(ii) Das Komplement von  $\bigcup_j f_j(\overset{\circ}{D}^n)$  wird durch  $g$  ganz nach  $U$  abgebildet.

Eine Anwendung des Homotopie-Additions-Satzes in  $\pi_n(X, U)^\ddagger \approx \pi_n(X, A)^\ddagger$  zeigt dann, daß die Klasse  $[g]$  eine Summe ist (mit eventuellen Vorzeichen  $\pm 1$ ) von den Elementen  $[g \circ f_j]$ . Wie bei der  $n$ -Sphäre schon, so schließen wir auch hier jetzt wieder mit dem Hinweis auf die spezielle Eigenschaft, daß die letzteren Repräsentanten ja in Wirklichkeit Abbildungen

$$g \circ f_j: (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (V_{i_j}, U \cap V_{i_j})$$

sind. □

**Satz.** Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex ohne Zellen in den Dimensionen  $< n$ . Die Abbildung

$$\pi_n(X, A)^\ddagger \xrightarrow{\approx} H_n(X, A)$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Sowohl für  $\pi_n$  als auch für  $H_n$  ist es richtig, daß die Inklusion des  $n$ -Skeletts eine *Surjektion* dieser Gruppe induziert (im Falle von  $\pi_n$  folgt das aus dem zellulären

Approximations-Satz; im Falle von  $H_n$  folgt es aus der Existenz des zellulären Kettenkomplexes). Wegen dem vorigen Satz wissen wir also, daß  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  und  $H_n(X, A)$  beide Quotienten von ein- und derselben abelschen Gruppe sind (der freien abelschen Gruppe, erzeugt von den  $n$ -Zellen). Wegen der Existenz der Abbildung von  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  zu  $H_n(X, A)$  wissen wir auch, daß  $H_n(X, A)$  Quotientengruppe von  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  ist. Es bleibt nur noch zu klären, daß, umgekehrt, auch  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  Quotientengruppe von  $H_n(X, A)$  ist; oder, anders gesagt, daß diejenigen Relationen, die in  $H_n(X, A)$  gelten, auch in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  erfüllt sind.

Die Theorie des zellulären Kettenkomplexes sagt, daß es in der vorliegenden Situation (keine  $(n-1)$ -Zellen) eine exakte Folge gibt

$$\mathbb{Z}[\{(n+1)\text{-Zellen}\}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\{n\text{-Zellen}\}] \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow 0 ;$$

wo, wie auch sonst,  $\mathbb{Z}[M]$  die von einer Menge  $M$  erzeugte freie abelsche Gruppe bezeichnet.

Genauer ist es so, daß für jede  $(n+1)$ -Zelle die Anhefte-Abbildung  $\beta: S^n \rightarrow n$ -Skelett ein erzeugendes Element  $\iota \in H_n(S^n)$  auf ein Element  $\beta_*(\iota)$  in

$$H_n(\text{Sk}_n(X), A) \approx \mathbb{Z}[\{n\text{-Zellen}\}]$$

abbildet. Diese Bilder, für die verschiedenen Anhefte-Abbildungen, erzeugen den Kern der Abbildung  $\mathbb{Z}[\{n\text{-Zellen}\}] \rightarrow H_n(X, A)$ . Was wir zu tun haben, ist also, zu zeigen, daß solche Elemente  $\beta_*(\iota)$  auch in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  schon  $= 0$  sind.

Wir fassen die Sphäre  $S^n$  als das Bild einer surjektiven Abbildung  $q: D^n \rightarrow S^n$  auf ( $S^n$  ist der Quotientenraum  $D^n/\partial D^n$ , und  $q$  ist die zugehörige Quotienten-Abbildung); und zwar tun wir das in der Weise, daß die Abbildung  $g = \beta \circ q$  den Rand  $\partial D^n$  nach  $A$  abbildet.

Die Abbildung  $g$  unterwerfen wir nun wieder der vorbereitenden Manipulation für eine Anwendung des Homotopie-Additions-Satzes, wie im vorigen Beweis beschrieben. Die nachfolgende Anwendung des Satzes ergibt dann die Gleichheit zweier Terme in  $\pi_n(\text{Sk}_n(X), A)^\ddagger$ , nämlich

$$(1) \text{ eine Summe lokaler Terme } , \quad (2) \quad [g] = \text{Klasse von } g .$$

Von dem zweiten Term wissen wir, daß er in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  trivial wird: das liegt daran, daß die Abbildung  $\beta$  ja gerade verwendet werden soll, um eine  $(n+1)$ -Zelle anzuheften! Von dem ersten Term wissen wir andererseits, daß er das fragliche Element  $\beta_*(\iota)$  beschreibt. Mit Dank an den Homotopie-Additions-Satz nehmen wir folglich zur Kenntnis, daß auch dieses Element in  $\pi_n(X, A)^\ddagger$  trivial wird.  $\square$

## Faserbündel

Sei  $B$  ein Raum, der *Basisraum* für das folgende. Es ist eine in der Topologie (und auch anderswo) wichtige Idee, ein *Bündel* von Räumen zu betrachten: je einen Raum  $F_b$  für jeden Punkt  $b \in B$ . Die Räume  $F_b$  heißen die *Fasern* des Bündels.

Zwar werden verschiedene Fasern keine Punkte gemeinsam haben. Man wird aber naturgemäß i.a. nicht daran interessiert sein, die Gesamtheit der Fasern als sozusagen unabhängig voneinander anzusehen. Der *Totalraum* des Bündels,

$$E = \bigcup_{b \in B} F_b,$$

wird vielmehr ein Raum sein, der zwar als Menge die disjunkte Vereinigung der Fasern ist, als Raum i.a. aber eben *nicht*.

Zusätzlich wird man auch noch daran interessiert sein, daß die Fasern  $F_b$  mit dem Punkt  $b$  in einer “vernünftigen” Weise variieren; z.B. in “lokal trivialer Weise”, wie das unten erläutert werden wird.

Wir fangen noch einmal von vorne an.

DEFINITION. Sei  $B$  ein Raum. Ein *Raum über  $B$*  ist ein Paar  $(E, p)$  bestehend aus einem Raum  $E$  und einer Abbildung von Räumen,  $p: E \rightarrow B$ . Der Unterraum  $F_b := p^{-1}(b)$  von  $E$  wird als die *Faser von  $(E, p)$  über  $b$*  bezeichnet.

DEFINITION. Ein *Faserbündel über  $B$*  ist ein Raum  $(E, p)$  über  $B$ , der die folgende Bedingung der *lokalen Trivialität* erfüllt: Zu jedem Punkt  $b \in B$  gibt es eine Umgebung  $U$ , so daß das Urbild  $p^{-1}(U)$  isomorph ist zu dem Produktraum  $U \times F_b$ , und zwar mit einem *Isomorphismus  $u$  über  $B$* ; d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{u} & U \times F_b \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

ist kommutativ (wo  $\text{pr}_1$  die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet).

Statt “Faserbündel” ist hier auch die Bezeichnung “lokal triviales Faserbündel” gebräuchlich, um die wichtige Bedingung hervorzuheben. Die Terminologie erklärt sich im übrigen so. Ein Produktraum  $B \times F$  zusammen mit der ersten Projektion  $\text{pr}_1: B \times F \rightarrow B$  ist ein triviales Beispiel für ein Faserbündel und wird demgemäß auch als *das triviale Faserbündel mit Faser  $F$  und Basis  $B$*  bezeichnet. Die Bedingung oben

sagt nun gerade, daß *lokal* jedes Faserbündel von diesem Typ ist. Die obigen Daten (Umgebung  $U$  von  $b$  und Isomorphismus  $u$ ) nennt man auch eine *lokale Trivialisierung*.

Die Existenz einer lokalen Trivialisierung bei  $b$  impliziert insbesondere, daß alle Fasern in der Nähe von  $b$  zu der Faser  $F_b$  isomorph sind. Es folgt, daß zu gegebenem  $b_0$  die Menge derjenigen  $b$ , wo  $F_b$  zu  $F_{b_0}$  isomorph ist, eine *offene* Menge bildet. Wenn also  $B$  sich nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegen läßt (m.a.W. wenn  $B$  *zusammenhängend* ist), so folgt, daß *alle*  $F_b$  zueinander isomorph sind.

Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß bei einem Faserbündel *alle* Fasern zueinander isomorph sind. Man ist dann auch berechtigt, von der *typischen Faser*,  $F$ , zu reden.

Sei  $(E, p, B)$  ein Faserbündel, bei dem alle Fasern zueinander isomorph sind; mit typischer Faser  $F$ . Es gibt dann eine Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $B$ , zusammen mit einer lokalen Trivialisierung über jedem der  $U_i$ .

In Analogie zur Beschreibung einer Mannigfaltigkeit durch einen *Atlas* gibt dies Anlaß zur Beschreibung eines Faserbündels durch einen *Bündel-Atlas*.

Darunter versteht man die folgenden Daten: eine (zulässige) Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $B$ ; über jedem der  $U_i$  das triviale Bündel  $U_i \times F$ ; und für jedes Paar von Indizes,  $(i, j)$ , eine *Verklebe-Abbildung* durch einen Bündel-Isomorphismus

$$U_i \times F \supset (U_i \cap U_j) \times F \xrightarrow{\approx} (U_i \cap U_j) \times F \subset U_j \times F ;$$

wobei man für jedes Tripel  $(i, j, k)$  noch eine naheliegende Kompatibilität dieser Bündel-Isomorphismen über dem Durchschnitt  $U_i \cap U_j \cap U_k$  verlangt (nämlich von den drei zu den Paaren  $(i, j)$ ,  $(i, k)$ ,  $(j, k)$  gehörenden Bündel-Isomorphismen ist einer [in der obigen Auflistung der mittlere] das Kompositum der beiden andern).

Ein *Bündel-Isomorphismus*  $(U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$  ist ein *fasern-erhaltender* Isomorphismus, d.h. es wird verlangt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j \times F & \xrightarrow{\approx} & U_i \cap U_j \times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{=} & U_i \cap U_j \end{array}$$

kommutativ ist.

Moralisch gesehen, sind die Daten des Bündel-Isomorphismus dazu äquivalent, daß man für jeden Punkt  $b \in U_i \cap U_j$  einen Isomorphismus  $F \rightarrow F$  hat, mit der Kompatibilitätsbedingung, daß die resultierende Abbildung

$$U_i \cap U_j \rightarrow \text{Iso}(F, F)$$

*stetig* ist. Diese Formulierung setzt aber voraus, daß man weiß, daß  $\text{Iso}(F, F)$  in vernünftiger Weise ein *Raum* (nicht nur eine Menge) ist. Solche Dinge gehören zu dem Thema "Abbildungs-Räume", das wir in Kürze diskutieren werden.

Bei der Idee des “Faserbündels” gibt es viele Varianten. Sie kommen u.a. daher, daß man sich vorstellen kann, daß die Faser des Bündels mit zusätzlicher Struktur versehen ist. Wir illustrieren das am Beispiel des  $\mathbb{R}^n$ .

Bei den Struktur-Abbildungen für die Bündel-Isomorphismen,  $U_i \cap U_j \rightarrow \text{Iso}(F, F)$ , hat man nämlich die Möglichkeit,  $\text{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , die topologischen Isomorphismen von  $\mathbb{R}^n$  auf sich, durch etwas anderes (kleineres) zu ersetzen, z.B.:

—  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , Diffeomorphismen; das führt auf *differenzierbare  $\mathbb{R}^n$ -Bündel* (n.b.: die Basis  $B$  muß dafür *nicht* eine Mannigfaltigkeit sein, geschweige denn eine differenzierbare Mannigfaltigkeit; wenn sie es ist, hat man die Möglichkeit für noch eine weitere Variante);

—  $\text{Vekt}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , Vektorraum-Isomorphismen; das führt auf *Vektorbündel*;

—  $\text{Eukl}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , Euklidische-Vektorraum-Isomorphismen; das führt auf *euklidische Vektorbündel* (jede der Fasern ist nicht nur ein Vektorraum, sondern hat zusätzlich eine euklidische Struktur (ein positiv definites symmetrisches Skalarprodukt); solche Bündel werden manchmal auch als *orthogonale Bündel* bezeichnet).

Sei  $(E, p, B)$  ein Faserbündel. Unter einem *Schnitt* des Bündels versteht man eine Abbildung  $s: B \rightarrow E$  mit der Eigenschaft, daß  $p \circ s = \text{Id}_B$ . Mit anderen Worten, es ist verlangt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{=} & E \\ s \uparrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

kommutiert.

Bei einem trivialen Bündel ist ein Schnitt

$$\begin{array}{ccc} B \times F & \xrightarrow{=} & B \times F \\ s \uparrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

äquivalent zu der Angabe einer Abbildung  $f: B \rightarrow F$ . Denn aus dem Schnitt  $s$  bekommt man die Abbildung  $f = \text{pr}_2 \circ s$ , und umgekehrt kann man den Schnitt aus dieser Abbildung offenbar rekonstruieren.

Insofern kann man den Begriff des Schnitts auffassen als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Abbildung.

BEISPIELE. (1) Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist, nach Definition, ein Schnitt von dem Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$ .

(2) Ein *nirgends verschwindendes Vektorfeld* auf  $M$  kann ebenfalls beschrieben werden als ein Schnitt von einem Faserbündel (nicht Vektorbündel in diesem Fall); nämlich als ein Schnitt von dem Bündel  $TM \setminus M$  über  $M$  (“Tangentialbündel minus Nullschnitt”). Ein solcher Schnitt muß nicht existieren; ein Beispiel dafür ist  $M = S^2$ , die 2-Sphäre.



## Die Hopf-Faserung

Es handelt sich dabei um ein Faserbündel mit Basis  $S^2$ , Totalraum  $S^3$  und Faser  $S^1$ . Es war dieses Faserbündel, das seinerzeit zu der spektakulären Entdeckung geführt hat (durch H. HOPF), daß die höheren Homotopiegruppen von Sphären *nicht* trivial zu sein brauchen. Diese Tatsache sieht man am leichtesten ein über die lange exakte Folge der Homotopiegruppen einer Faserung, die wir in Kürze kennenlernen werden. Wegen dieses allgemeinen Sachverhalts hat man im vorliegenden Fall eine exakte Folge von Homotopiegruppen (die Basispunkte lassen wir in der Notation fort)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}S^2 \longrightarrow \pi_n S^1 \longrightarrow \pi_n S^3 \longrightarrow \pi_n S^2 \longrightarrow \pi_{n-1}S^1 \longrightarrow \cdots .$$

Nun wissen wir, daß  $\pi_m S^1 = 0$  für  $m > 1$ . Als Spezialfall bekommen wir für  $n \geq 3$  deshalb eine exakte Folge

$$0 = \pi_n S^1 \longrightarrow \pi_n S^3 \longrightarrow \pi_n S^2 \longrightarrow \pi_{n-1} S^1 = 0 ,$$

mithin einen Isomorphismus  $\pi_n S^3 \approx \pi_n S^2$  (wenn  $n \geq 3$ ) und insbesondere deshalb den Isomorphismus

$$\pi_3 S^2 \approx \pi_3 S^3 \approx \mathbb{Z} .$$

Wegen  $\pi_n S^k = 0$  für  $n < k$  bekommen wir als Nebenprodukt auch noch eine exakte Folge

$$0 = \pi_2 S^3 \longrightarrow \pi_2 S^2 \longrightarrow \pi_1 S^1 \longrightarrow \pi_1 S^3 = 0 ,$$

also einen Isomorphismus  $\pi_2 S^2 \approx \pi_1 S^1$ ; was eine neue Art von Berechnung von  $\pi_2 S^2$  bedeutet.

Was nun die Hopf-Faserung angeht, so ist es nicht eigentlich die  $S^2$ , die die Basis von dem Faserbündel ist. Vielmehr ist es ein dazu isomorpher Raum,  $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ , der *komplex-projektive Raum* der (komplexen!) Dimension 1.

Es ist auch nicht so, daß die Hopf-Faserung ein Einzelstück wäre. Vielmehr ist sie ein Stück in einer ganzen Serie von Hopf-Faserungen. Wir sind zwar in erster Linie an dem schon beschriebenen speziellen Fall interessiert, doch ist es übersichtlicher, wenn man zumindest einige der Dinge in ihrer allgemeinen Form zur Kenntnis nimmt. Deshalb wollen wir das auch so tun.

Es sei  $K$  ein Körper. Wir sind hier interessiert an dem Fall  $K = \mathbb{C}$  (Körper der komplexen Zahlen). Auch die entsprechende Diskussion für  $K = \mathbb{R}$  (Körper der reellen Zahlen) ist von großem Interesse für die Topologie, wenn auch für uns im Moment nicht gar so sehr.

Es bezeichne  $K^n$  den *affinen  $n$ -dimensionalen Raum über  $K$* , d.h. die Menge der  $n$ -Tupel über  $K$ . (Dabei wollen wir uns nicht daran stören, daß wir das Wort “Raum” selbst dann benutzen, wenn der Körper  $K$ , und damit auch die Menge  $K^n$ , nicht mit einer Topologie daherkommen — die Algebraischen Geometer tun das schließlich auch.)

Der *projektive Raum von  $K^n$* , Notation  $\mathbb{P}(K^n)$ , ist definiert als der *Raum der Geraden in  $K^n$* ; wobei eine *Gerade* einen 1-dimensionalen Unter-Vektorraum von dem Vektorraum  $K^n$  bezeichnet. Ein 1-dimensionaler Unter-Vektorraum nun ist festgelegt durch die Angabe eines einzigen von 0 verschiedenen Elementes in  $K^n$ . Umgekehrt bestimmt der 1-dimensionale Unter-Vektorraum dieses erzeugende Element aber nur bis auf Multiplikation mit einem von 0 verschiedenen Element von  $K$ .

Man kann also  $\mathbb{P}(K^n)$ , zumindest als Menge, identifizieren mit einer Menge von Äquivalenzklassen in  $K^n \setminus 0$  (der ganze Vektorraum ohne den Null-Punkt). Die Äquivalenzrelation ist dabei so, wie oben beschrieben: man darf multiplizieren mit Elementen von  $K^*$ , der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente in  $K$ . Also

$$\mathbb{P}(K^n) = (K^n \setminus 0) / K^* .$$

Statt  $\mathbb{P}(K^n)$  werden wir auch schreiben  $K\mathbb{P}^{n-1}$ .

Die alternative Schreibweise hat den folgenden vernünftigen Grund. Im Falle  $K = \mathbb{R}$  ist  $\mathbb{R}^n$  eine reelle Mannigfaltigkeit der reellen Dimension  $n$ . Der zugehörige projektive Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  ist, wie die unten folgende Betrachtung zeigen wird, eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension um 1 kleiner ist; also von der reellen Dimension  $n-1$ . Folglich bietet  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  sich als Notation an: der reell-projektive Raum der reellen Dimension  $n-1$ .

Ähnlich auch im Falle  $K = \mathbb{C}$ . Es ist  $\mathbb{C}^n$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension  $n$ . Der zugehörige projektive Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexe Dimension um 1 kleiner ist; also gleich  $n-1$ . Deshalb die Notation  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ .

**DEFINITION.** Sei  $G$  eine (topologische) Gruppe, die auf einem Raum  $E$  operiert. Es sei vorausgesetzt, daß die Operation *frei* ist (d.h. für alle  $x \in E$  und  $g \in G$  kann  $x \cdot g = x$  nur dann vorkommen, wenn  $g$  das Eins-Element der Gruppe ist). Sei  $B$  definiert als der *Raum der Bahnen* (der Quotientenraum, bestehend aus den Äquivalenzklassen, die gegeben sind durch die Operation der Gruppe). Es sei vorausgesetzt, daß die (Quotienten-) Abbildung  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel ist (d.h. die lokale-Trivialitäts-Bedingung erfüllt). Dann werden diese Daten ( $G$ , Aktion,  $E$ , Projektion,  $B$ ) als ein  *$G$ -Prinzipalbündel* bezeichnet.

**Satz.** Im Falle  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  definiert die Aktion von  $K^*$  auf  $K^n \setminus 0$  ein  $K^*$ -Prinzipalbündel, mit Totalraum  $K^n \setminus 0$  und Basisraum  $K\mathbb{P}^{n-1}$ .

**BEWEIS.** Daß die Operation *frei* ist, ist klar. Es ist aber nicht ganz selbstverständlich, daß die lokale-Trivialitätsbedingung erfüllt ist. Wir prüfen sie nach durch explizites Hinschauen.

Dazu sei für  $1 \leq i \leq n$  der Unterraum  $X_i$  in  $K^n \setminus 0$  (dem Raum der  $n$ -Tupel mit dem weggelassenen Null-Tupel) definiert durch die Bedingung, daß an der  $i$ -ten Stelle des Tupels *nicht* die 0 steht. Es ist dann  $K^n \setminus 0 = \bigcup_i X_i$ .

Sei  $Y_i$  das Bild von  $X_i$  in  $B (= K\mathbf{P}^{n-1})$ . Wenn ein Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  in  $X_i$  liegt, dann ist "Division durch  $x_i$ " eine erlaubte Operation. Also kann man zu dem (bezüglich der Aktion äquivalenten) Tupel  $(y_1, \dots, y_n)$  übergehen, wo

$$y_k := \frac{x_k}{x_i}, \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Das resultierende Tupel hat an der  $i$ -ten Stelle eine 1. Die restlichen Stellen sind andererseits *eindeutig bestimmt* durch die Äquivalenzklasse von  $(x_1, \dots, x_n)$  (denn die Brüche  $\frac{x_k}{x_i}$  "sehen" die Aktion von  $K^*$  nicht mehr). Man bekommt also eine Bijektion

$$\phi_i : Y_i \xrightarrow{\approx} K^{n-1}.$$

Die Bijektionen  $\phi_i$  insgesamt, also für  $1 \leq i \leq n$ , ergeben einen *Atlas* für eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (reell, bzw. komplex, je nachdem ob  $K$  gleich  $\mathbb{R}$  oder gleich  $\mathbb{C}$  ist). Das erfordert eine (leichte) Nachprüfung, die wir hier weglassen.

Schließlich, wenn wir das unterdrückte  $x_i$  auch noch erinnern, das heißt mit der Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto ((y_1, \dots, y_n), x_i),$$

bekommen wir einen Diffeomorphismus von dem Urbild von  $Y_i$ , das heißt, von  $X_i$ , zu dem Produktraum  $Y_i \times K^*$ .  $\square$

Sei weiterhin  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ . Es bezeichne  $\mathbb{S}(K^n)$  die Einheits-Sphäre in  $K^n$ . Im reellen Fall ist das die Sphäre  $S^{n-1}$ . Im komplexen Fall ist es auch eine Sphäre, und zwar von der Dimension  $2n-1$ . Denn sei  $z = a + bi$  die Darstellung einer komplexen Zahl durch ihren Realteil und ihren Imaginärteil. Es ist

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Wenn wir also die Einheits-Sphäre

$$\mathbb{S}(\mathbb{C}^n) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \|z\|^2 \stackrel{(\text{def})}{=} z_1 \cdot \bar{z}_1 + \dots + z_n \cdot \bar{z}_n = 1 \right\}$$

in dem unterliegenden  $\mathbb{R}^{2n}$  des  $\mathbb{C}^n$  anschauen, so bekommen wir die Beschreibung

$$\mathbb{S}(\mathbb{C}^n) = \left\{ ((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in \mathbb{R}^{2n} \mid a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2 = 1 \right\},$$

d.h., es handelt sich um die ganz normale Sphäre  $S^{2n-1}$ .

Bezeichne  $\mathbf{G}(K)$  die Untergruppe von  $K^*$ , die aus den Zahlen vom Betrag 1 besteht; im reellen Fall also die Gruppe  $\{\pm 1\}$ , und im komplexen Fall die Gruppe

$$S^1 = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid |s|^2 = s \cdot \bar{s} = 1 \right\}.$$

Die Operation von  $K^*$  auf  $K^n \setminus 0$  induziert eine Operation von  $\mathbf{G}(K)$  auf  $\mathbb{S}(K^n)$ . Das ist klar im reellen Fall. Im komplexen Fall ist es eigentlich auch klar. Denn wenn  $|s| = 1$ , dann ist

$$\|s z\|^2 = s z_1 \bar{s} \bar{z}_1 + \dots + s z_n \bar{s} \bar{z}_n = (s \bar{s})(z_1 \bar{z}_1) + \dots + (s \bar{s})(z_n \bar{z}_n) = \|z\|^2.$$

**Satz.** Die Aktion von  $\mathbf{G}(K)$  auf  $\mathbb{S}(K^n)$  definiert ein  $\mathbf{G}(K)$ -Prinzipalbündel, mit Totalraum  $\mathbb{S}(K^n)$  und Basisraum  $K\mathbf{P}^{n-1}$ .

BEWEIS. Mit den Notationen des vorigen Beweises ist es richtig, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(K^n) \cap X_i &\longrightarrow Y_i \times \mathbf{G}(K) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left( (y_1, \dots, y_n), \frac{x_i}{|x_i|} \right), \end{aligned}$$

eine Äquivalenz ist. Die Umkehr-Abbildung ist dadurch gegeben, daß man zunächst das Tupel  $(x_1', \dots, x_n')$  definiert durch  $x_k' = y_k \cdot s$  ( $= y_k \cdot \frac{x_i}{|x_i|}$ ) und dieses Tupel in einem zweiten Schritt dann auf Länge 1 normiert.

Daß die zusammengesetzte Abbildung links die Identität ergibt, liegt daran, daß der Vektor  $(x_1', \dots, x_n')$  sich von dem ursprünglichen Vektor  $(x_1, \dots, x_n)$  nur unterscheidet durch die Multiplikation mit einem positiven Skalaren (nämlich  $\frac{1}{|x_i|}$ ); wenn man ihn auf Länge 1 normiert, so wird er folglich gleich  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Daß man andererseits für die zusammengesetzte Abbildung rechts die Identität bekommt, liegt daran, daß die Bildung der Brüche die vorher stattgefundene Multiplikation mit einem Skalar wieder absorbiert.  $\square$

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall  $K = \mathbb{C}$  und  $n = 2$ . In dem Fall ist

$$\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \approx S^2,$$

die 2-Sphäre. Denn seien, wie vorher auch,  $X_1$  und  $X_2$  die Unterräume von  $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ , die definiert sind durch

$$X_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 \neq 0 \}, \quad X_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_2 \neq 0 \}.$$

Ihre Bilder  $Y_1$  und  $Y_2$  in  $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$  sind isomorph zu  $\mathbb{C}$ ; Isomorphismen sind

$$\begin{aligned} Y_1 &\longrightarrow \mathbb{C} & Y_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [x_1, x_2] &\longmapsto (1, y_2) = \left( \frac{x_1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \right), & [x_1, x_2] &\longmapsto (y_1, 1) = \left( \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_2} \right). \end{aligned}$$

Auf dem Durchschnitt  $Y_1 \cap Y_2$  ist

$$y_2 \quad (= \frac{x_2}{x_1}) = y_1^{-1}.$$

Das heißt, es werden hier zwei Exemplare  $\mathbb{C}$  zusammengeklebt, und die Verklebung erfolgt entlang  $\mathbb{C} \setminus 0$ , der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  minus dem Nullpunkt. Dabei ist die Verklebe-Abbildung gegeben durch den Übergang zum Inversen.

Was wir sehen, ist also die 2-Sphäre, zusammengeklebt aus

$$(S^2 \text{ minus Norpol}) \quad \text{und} \quad (S^2 \text{ minus Südpol});$$

wobei die Verklebung eben erfolgt entlang dem Gebiet zwischen den Polen.

## Homotopie-Liftungs-Eigenschaft, Faserungen

Beim Studium der *Überlagerungen* waren wir seinerzeit dazu geführt worden, eine etwas technisch aussehende Eigenschaft systematisch zu betrachten. Es handelte sich um die *Wege-Liftungs-Eigenschaft*. Das Vorliegen dieser Eigenschaft war, wie sich später herausstellte, die Grundlage für die wesentlichen Ergebnisse zu den *Überlagerungen*.

*Überlagerungen* kann man als einen speziellen Fall von Faserbündeln auffassen. Es sind nämlich gerade diejenigen Faserbündel, wo die Fasern *diskrete Räume* (d.h. mit der diskreten Topologie versehen) sind.

Insofern ist es plausibel, daß auch bei den Faserbündeln die *Wege-Liftungs-Eigenschaft* eine Rolle spielen wird; oder vielmehr eine Verallgemeinerung von ihr: die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft*.

Die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* gibt es in etlichen Varianten; von denen werden wir einige anschauen. Wir werden dann zur Kenntnis nehmen, daß Faserbündel die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* haben; und daß, als Folgerung davon, die *lange exakte Folge der Homotopiegruppen* existiert.

Später werden wir zur Kenntnis nehmen, daß es Dinge gibt, die nicht Faserbündel sind (oder zumindest nicht ganz), wo aber trotzdem die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* erfüllt ist (und wo folglich auch eine *lange exakte Folge der Homotopiegruppen* existiert). Es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, solche Dinge sozusagen ehrenhalber auch noch als "Faserungen" anzusehen. Mit anderen Worten, es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, den allgemeinen Faserungs-Begriff auf die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* zu gründen.

Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Abbildung von Räumen. Die Test-Situation für die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* besteht in der Angabe eines Raumes  $X$  und eines kommutativen (Test-) Diagramms

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \text{Inkl} \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

Gegeben sind, mit anderen Worten, eine Abbildung  $f: X \rightarrow E$  und eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung  $p \circ f$ ; also eine Abbildung  $\Psi: X \times [0, 1] \rightarrow B$  mit  $\Psi|_{(X \times 0)} = p \circ f$ .

Die HLE für die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  (und für den Testraum  $X$ ) fordert, daß in dieser Situation eine Abbildung von links unten nach rechts oben in dem Diagramm existiert,  $\Phi: X \times [0, 1] \rightarrow E$ , so daß auch das ergänzte Diagramm noch kommutativ ist.

Mit anderen Worten, gefordert ist die Existenz einer Homotopie  $\Phi$ , die erstens eine Homotopie von  $f$  ist, und die zweitens eine Homotopie über  $\Psi$  ist oder, wie man auch sagt, die die Homotopie  $\Psi$  *liftet*; mit anderen Worten, gefordert ist die Existenz einer Abbildung  $\Phi: X \times [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\Phi|(X \times 0) = f$  und  $\Psi = p \circ \Phi$ .

Eine Variante der Test-Situation fragt nach einer *relativen* Version hiervon insofern als in dem Testraum  $X$  noch ein Unterraum  $A$  spezifiziert ist, und auf dem ist eine Liftung der Homotopie schon vorgegeben. Das Test-Diagramm ist also

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & E \\ \text{Inkl} \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

und gefordert ist wieder eine Ergänzung des Diagramms (eine Abbildung von unten links nach oben rechts, so daß das Diagramm kommutativ bleibt).

DEFINITION. Die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  hat die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft* (abgekürzt HLE), wenn die obige Homotopie-Liftungs-Bedingung für alle Räume  $X$  (und für alle Test-Diagramme) erfüllt ist.

DEFINITION. Die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  hat die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder* (abgekürzt HLEP), wenn die Bedingung zumindest für jeden solchen Raum  $X$  erfüllt ist, der ein Polyeder (endlicher Simplicialkomplex) ist.

DEFINITION. Die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt eine *Hurewicz-Faserung*, wenn sie die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft hat. Sie heißt eine *Serre-Faserung*, wenn sie die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder hat.

Wir werden uns hier mit der Behandlung der Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für *Polyeder* begnügen. Es gibt nicht viel wesentliches, was uns auf die Weise entgeht, und es ist mit weniger an technischen Komplikationen verbunden. Die Hauptanwendung ist folgender Satz:

**Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Sei  $b \in B$  und sei  $x \in F = p^{-1}(b)$ . Es gibt eine lange exakte Folge von Homotopiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B, b) \longrightarrow \pi_n(F, x) \longrightarrow \pi_n(E, x) \longrightarrow \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x) \longrightarrow \cdots$$

BEWEIS. Aufgrund des nachfolgenden Lemmas gibt, für  $n \geq 1$ , die Projektion  $p$  einen Isomorphismus

$$\pi_n(E, F; x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, \{b\}; x) \approx \pi_n(B, x).$$

Mit Hilfe dieses Isomorphismus läßt sich die lange exakte Folge des Paares  $(E, F)$ ,

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(E, F; x) \longrightarrow \pi_n(F, x) \longrightarrow \pi_n(E, x) \longrightarrow \pi_n(E, F; x) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x) \longrightarrow ,$$

in die von dem Satz behauptete Form umschreiben.  $\square$

**Lemma.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Sei  $Y \subset B$  ein Unterraum (z.B.  $Y = \{b\}$ ). Sei  $x \in p^{-1}(Y)$ . Die Projektion  $p$  induziert einen Isomorphismus (für  $n \geq 1$ )

$$p_*: \pi_n(E, p^{-1}(Y); x) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, Y; p(x)) .$$

BEWEIS. Wir zeigen, daß die Abbildung  $p_*$  erstens surjektiv und zweitens injektiv ist.

— *Surjektivität.* Sei  $[\beta] \in \pi_n(B, Y; p(x))$ , sei  $\beta: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (B, Y, p(x))$  davon ein Repräsentant. Per Umschreiben können wir  $\beta$  alternativ auch auffassen als eine Abbildung des  $n$ -Würfels  $[0, 1]^n$ . Der Basispunkt  $s_0$  sei in  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  enthalten. Indem wir notfalls  $\beta$  durch eine homotope Abbildung ersetzen (HEE der Inklusionen  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\} \subset \partial [0, 1]^n$  und  $\partial [0, 1]^n \subset [0, 1]^n$ ) können wir annehmen, daß  $\beta$  eingeschränkt auf  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  die triviale Abbildung in den Basispunkt  $p(x)$  ist. Diese triviale Abbildung läßt sich liften zur trivialen Abbildung von  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  in den Basispunkt  $x$  von  $E$ . Jetzt kommt der Trick: Nichts hindert uns daran, die Abbildung  $\beta$  als eine Homotopie aufzufassen; nämlich eine Homotopie, die bei der trivialen Abbildung von  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  startet. Diese triviale Abbildung haben wir schon geliftet. Aufgrund der ausdrücklich vorausgesetzten HLEP können wir deshalb auch die ‘‘Homotopie’’, d.h. die Abbildung  $\beta$  selbst liften. Die Liftung hat nun automatisch die Eigenschaften, die von einem Repräsentanten eines Elements von  $\pi_n(E, p^{-1}(Y); x)$  verlangt werden.

— *Injektivität.* Das geht ganz ähnlich und nur ein klein wenig komplizierter. Seien  $\alpha_1: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (E, p^{-1}(Y), x)$  und  $\alpha_2: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (E, p^{-1}(Y), x)$  Repräsentanten von zwei Elementen von  $\pi_n(E, p^{-1}(Y); x)$ . Daß die beiden Elemente durch die Abbildung  $p_*$  abgebildet werden auf ein- und dasselbe Element von  $\pi_n(B, Y; p(x))$ , heißt, daß eine Homotopie von  $p \circ \alpha_1$  zu  $p \circ \alpha_2$  existiert, die gewisse Eigenschaften hat: es ist eine Homotopie von Paaren von Abbildungen, und die Homotopie ist am Basispunkt konstant. Wir ersetzen wieder  $D^n$  durch  $[0, 1]^n$  und schreiben die Homotopie um als eine Abbildung

$$[1, 2] \times [0, 1]^n \approx [1, 2] \times [0, 1]^{n-1} \times [0, 1] \longrightarrow B .$$

Wir nehmen wieder an, daß der Basispunkt enthalten ist in  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$ . Wie oben können wir annehmen, daß  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beide die Eigenschaft haben, daß ihre Einschränkung auf  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  die triviale Abbildung in den Basispunkt  $x$  von  $E$  ist. Zusätzlich können wir auch annehmen, daß jede der Abbildungen  $p \circ \alpha_t$ ,  $t \in [1, 2]$ , die analoge Eigenschaft hat, daß  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  in den Basispunkt  $p(x)$  von  $B$  abgebildet wird (denn das können wir erreichen durch eine Änderung der Homotopie mittels einer Deformationsretraktion von  $[1, 2] \times [0, 1]^{n-1} \times \{0\}$  in den Unterraum

$$\{1\} \times [0, 1]^{n-1} \times \{0\} \cup [1, 2] \times \{s_0\} \cup \{2\} \times [0, 1]^{n-1} \times \{0\}$$

und anschließendes Zitieren der HEE). Es kommt jetzt derselbe Trick wie oben auch: Die Homotopie wird um-interpretiert als eine Homotopie, die bei der trivialen Abbildung

$$[1, 2] \times [0, 1]^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow \{p(x)\}$$

startet. Diese triviale Abbildung wird geliftet zur trivialen Abbildung in den Basispunkt  $x$ , und zum Schluß wird die HLEP zitiert. Dabei verwenden wir eine geeignete *relative* Version (entweder Nr. 3 oder Nr. 5 in dem nachfolgenden Satz). Die erhaltene Liftung gibt eine Homotopie zwischen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ; es ist also  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ .  $\square$

Bevor wir die HLEP für Faserbündel nachweisen, geben wir eine Auflistung einiger äquivalenter Eigenschaften. Die Nützlichkeit davon ergibt sich z.B. daraus, daß eine der Alternativen schon in dem vorstehenden Beweis benutzt wurde.

**Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Abbildung. Es sind äquivalent:

- (1) HLEP
- (2) HLE für den Testraum  $D^n$  (für alle  $n$ )
- (3) HLE für  $D^n$ , relativ zu dem Unterraum  $\partial D^n$
- (4) HLE für CW-Komplex, relativ Unterkomplex
- (5) HLE für Polyeder, relativ Unterpolyeder.

BEWEIS. (1)  $\Rightarrow$  (2).  $D^n$  ist topologisch äquivalent zu einem Polyeder.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Gefragt ist nach dem Ergänzungspfeil  $D^n \times [0, 1] \rightarrow E$  in dem linken bzw. rechten Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & B \end{array}$$

Diese beiden Aufgaben sind zueinander äquivalent. Denn es gibt eine topologische Äquivalenz von  $D^n \times [0, 1]$  auf sich, mit

$$D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times [0, 1] \xrightarrow{\approx} D^n \times \{0\}.$$

Folglich kann man eine Aufgabe vom Typ "links" übersetzen in eine solche vom Typ "rechts", und umgekehrt.

(3)  $\Rightarrow$  (4). Wenn  $X$  aus  $X'$  durch das Anheften einer Zelle entsteht,  $X = X' \cup_{\partial D^n} D^n$ , so ergibt sich die HLE für  $X$  relativ zu  $X'$  aus derjenigen für  $D^n$  relativ zu  $\partial D^n$  durch "Zusammenkleben": Man benutzt die Abbildung  $D^n \rightarrow X$  (die charakteristische Abbildung der neuen Zelle) um aus der vorgegebenen Aufgabe (das rechte Teildiagramm unten) eine neue Aufgabe zu schaffen (das Diagramm, das durch das große Rechteck gegeben ist),

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & X \times \{0\} \cup X' \times [0, 1] & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & X \times [0, 1] & \longrightarrow & B \end{array}$$

Diese Aufgabe ist lösbar, wegen (3). Die resultierende Abbildung  $D^n \times [0, 1] \rightarrow E$  ergibt sofort die gesuchte Abbildung  $X \times [0, 1] \rightarrow E$ , da das linke Quadrat ein Verklebe-Diagramm ist,

$$X \times \{0\} \cup X' \times [0, 1] \cup_{D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times [0, 1]} D^n \times [0, 1] \xrightarrow{\approx} X \times [0, 1].$$



Wenn nun  $X$  aus  $X'$  nicht durch das Anheften von einer einzigen  $n$ -Zelle entsteht, sondern durch das Anheften von mehreren, so geht es genauso. Folglich können wir endlich-dimensionale CW-Komplexe induktiv behandeln: den Induktions-Schritt haben wir gerade gemacht. — Der Rest ist eine uns vertraute Formalie (wegen der Tatsache, daß eine Abbildung von CW-Komplexen schon dann stetig ist, wenn die Einschränkungen auf die Skelette es sind).

(4)  $\Rightarrow$  (5). Simplicialkomplexe sind (spezielle) CW-Komplexe.

(5)  $\Rightarrow$  (1). HLEP ist der Spezialfall von (5), wo das Unterpolyeder leer ist.  $\square$

Der nun folgende Satz verallgemeinert den *Wege-Liftungs-Satz* der Überlagerungstheorie, und zwar ist dies eine Verallgemeinerung in mehrfacher Hinsicht: Faserbündel sind allgemeiner als Überlagerungen; und es werden nicht nur Wege geliftet, sondern auch allgemeinere Homotopien.

**Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel. Die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  hat die *Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder*.

BEWEIS. Nach dem vorangegangenen Satz genügt es, die HLE für den  $n$ -Ball  $D^n$  zu zeigen (für jedes  $n$ ) oder, was auf dasselbe hinausläuft, für den Würfel  $[0, 1]^n$ . Sei also ein Test-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ [0, 1]^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

gegeben. Wenn das Faserbündel ein *triviales Bündel* wäre (was es im allgemeinen natürlich nicht sein wird), so wäre unsere Aufgabe vermutlich besonders einfach. Wir versuchen deshalb so gut als möglich, uns auf diesen Fall zurückzuziehen. Die Idee ist, die Existenz von *lokalen Trivialisierungen* zu verwenden und aus dieser Existenz dann Nutzen zu ziehen mit Hilfe des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes.

Nach Definition der Faserbündel gibt es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von dem Basisraum  $B$  durch *Elementar-Umgebungen*; das heißt, daß über jeder der Mengen  $U_i$  eine lokale Trivialisierung des Faserbündels  $p: E \rightarrow B$  existiert.

Wir ziehen die Überdeckung auf den  $(n+1)$ -Würfel  $[0, 1]^n \times [0, 1]$  zurück. Das heißt, wir betrachten die Überdeckung  $\{\Psi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$  von dem Würfel  $[0, 1]^n \times [0, 1]$ .

Der Lebesgue'sche Überdeckungs-Satz sagt, daß  $[0, 1]^n \times [0, 1]$  so in Teilwürfel gleicher Größe unterteilt werden kann, daß jeder der Teilwürfel ganz enthalten ist in einer der Mengen  $\{\Psi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ ; oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Teilwürfel wird durch die Abbildung  $\Psi$  ganz in eine der Elementar-Umgebungen  $U_i$  abgebildet.

Die Teilwürfel denken wir uns nun geschrieben als Produkte  $W \times [a, b]$ , nämlich

$$\text{Teilwürfel von } [0, 1]^n \times \text{Teilintervall von } [0, 1] .$$

Wie üblich, so empfiehlt es sich auch hier, klein anzufangen. Das heißt, bei den Teilwürfeln von  $[0, 1]^n$  beginnen wir nicht unbedingt gleich mit den  $n$ -dimensionalen. Vielmehr werden wir vorher vielleicht noch solche von kleinerer Dimension behandeln wollen.

Die richtige Reihenfolge ist diese. Wenn wir das Produkt  $W \times [a, b]$  behandeln wollen, so setzen wir voraus, daß vorher schon behandelt sind:

- (i) alle die  $W' \times [a', b']$ , wo  $a' < a$  (ganz gleich, von welcher Dimension  $W'$  ist) und
- (ii) alle die  $W'' \times [a'', b'']$ , wo  $a'' = a$ , und wo  $W''$  kleinere Dimension als  $W$  hat.

Offenbar ist es möglich, die Teilwürfel in dieser Weise anzuordnen.

Kommen wir nun zur Behandlung des Teilwürfels  $W \times [a, b]$  ! Gemäß der gerade beschriebenen Vorgehensweise ist die gesuchte Abbildung  $\Phi$  von  $W \times [a, b]$  zu  $E$  auf einem Teil von  $W \times [a, b]$  schon definiert; nämlich auf dem Teil

$$W \times \{a\} \cup \partial W \times [a, b] ,$$

da dieser sich zusammensetzt aus vorher schon behandelten Teilwürfeln.

Nach Herleitung gibt es eine Menge  $U_i$  aus der Überdeckung, die die Eigenschaft hat, daß  $\Psi(W \times [a, b]) \subset U_i$ ; sei eine solche Menge ausgewählt.  $U_i$  ist eine Elementar-Umgebung: das Bündel ist darüber trivialisierbar; sei eine lokale Trivialisierung ausgewählt,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\approx} & U_i \times F_x \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U_i & \xrightarrow{=} & U_i \end{array}$$

(wo  $F_x$  die Faser über einem Punkt  $x \in U_i$  bezeichnet). Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} W \times \{a\} \cup \partial W \times [a, b] & \xrightarrow{f} & p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\approx} & U_i \times F_x \\ \text{Inkl} \downarrow & & p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ W \times [a, b] & \xrightarrow{\Psi} & U_i & \xrightarrow{=} & U_i \end{array}$$

gibt uns nun eine Übersetzung der gesuchten Abbildung  $\Phi$  von  $W \times [a, b]$  zu  $p^{-1}(U_i)$  in eine Abbildung  $\Phi'$  von  $W \times [a, b]$  zu  $U_i \times F_x$ .

Die Komposition  $\text{pr}_1 \circ \Phi'$  ist eine vorgegebene Abbildung, nämlich  $\Psi$  (wegen der Bedingung, daß  $\Phi$  eine Liftung von  $\Psi$  sein soll). Also kann nur über die andere Komponente,

$$\varphi : W \times [a, b] \longrightarrow F_x , \quad \varphi = \text{pr}_2 \circ \Phi' ,$$

noch verfügt werden. Diese Komponente steht andererseits zur freien Verfügung soweit die eine (schon diskutierte) Bedingung betroffen ist: die Kommutativität des unteren

Dreiecks in dem zu vervollständigenden Diagramm. Das obere Dreieck in diesem Diagramm andererseits gibt eine weitere Bedingung. Nämlich die Einschränkung von  $\varphi$  soll durch die Abbildung  $f$  gegeben sein (genauer: durch  $f$ , gefolgt von dem Isomorphismus und von der nachfolgenden Projektion  $\text{pr}_2$ ). Diese Bedingung wird aber automatisch erfüllt sein, wenn wir nun  $\varphi$  definieren als die zusammengesetzte Abbildung

$$W \times [a, b] \xrightarrow{r} W \times \{a\} \cup \partial W \times [a, b] \xrightarrow{f} p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\approx} U_i \times F_x \xrightarrow{\text{pr}_2} F_x$$

wo  $r: W \times [a, b] \rightarrow W \times \{a\} \cup \partial W \times [a, b]$  eine *Retraktion* sein soll — wir wissen, daß eine solche existiert.

Die induktive Behandlung der Teilwürfel ist damit abgeschlossen.  $\square$

BEISPIEL (HLEP, aber nicht Faserbündel). Sei  $E = \nabla^2$ , das 2-Simplex, und  $B = \nabla^1$ , das 1-Simplex. Sei  $p: E \rightarrow B$  definiert als eine “Ausartungs-Abbildung”: eine surjektive, affine und ecken-erhaltende Abbildung. Das Urbild der einen Ecke von  $\nabla^1$  ist dann ein einziger Punkt, während jeder andere Punkt von  $\nabla^1$  als Urbild ein Intervall hat. Die Abbildung  $p: E \rightarrow B$  ist also sicherlich *kein* Faserbündel. Es ist andererseits aber richtig, daß diese spezielle Abbildung  $p: E \rightarrow B$  die HLEP hat; der Beweis ist nicht-trivial und soll hier nicht erbracht werden.  $\square$

In dem Beispiel ist es so, daß zwei Fasern der Abbildung  $p: E \rightarrow B$  immer denselben Homotopietyp haben, wenn sie auch nicht isomorph zueinander sein müssen. Der folgende Satz sagt, daß das kein Zufall ist.

**Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Abbildung. Der Raum  $B$  sei weg-zusammenhängend.

- (1) Wenn  $p$  Hurewicz-Faserung ist (d.h. wenn  $p$  die HLE hat), dann sind je zwei Fasern von  $p$  zueinander homotopieäquivalent.
- (2) Wenn  $p$  Serre-Faserung ist (d.h. wenn  $p$  die HLEP hat), dann sind zumindest je zwei solche Fasern zueinander homotopieäquivalent, deren jede (nach Voraussetzung) den Homotopietyp von einem CW-Komplex hat.

BEWEIS (Skizze). Seien  $b_1$  und  $b_2$  zwei Punkte in  $B$ . Seien  $F_1$  und  $F_2$  die Fasern darüber,  $F_i = p^{-1}(b_i)$ . Ein Weg  $w$  von  $b_1$  zu  $b_2$  kann interpretiert werden als eine Homotopie, die bei der (trivialen) Abbildung  $F_1 \rightarrow \{b_1\} \subset B$  startet. Die Inklusion  $F_1 \rightarrow E$  gibt eine Liftung der Start-Abbildung; Zitieren der HLE gibt dann eine Liftung der Homotopie selber. Die Schluß-Abbildung in der Homotopie ist eine Abbildung  $f_1: F_1 \rightarrow F_2$ . Man zeigt,  $f_1$  ist Homotopieäquivalenz, mit homotopie-inverser gegeben durch die analoge Abbildung  $f_2: F_2 \rightarrow F_1$ . Die Komposition  $f_2 \circ f_1$  ist nämlich Liftung der Homotopie der trivialen Abbildung, die durch den zusammengesetzten Weg, erst  $w$ , dann  $\bar{w}$  (der inverse Weg), gegeben ist. Der Trick ist nun, den Weg  $w\bar{w}$  auf seinen Anfangs- und Endpunkt zusammenzuziehen. Eine Liftung der daraus resultierenden Homotopie ergibt, als ihren Endzustand (nach kürzerem Hinsehen) eine Homotopie von  $f_2 \circ f_1$  zur identischen Abbildung auf  $F_1$ . — Für den Teil (2) steht die HLE nicht zur Verfügung. Man benötigt CW-Approximationen  $F_i' \xrightarrow{\approx} F_i$  um zumindest die HLEP zitieren zu können.  $\square$

## Induzierte Faserungen

Es ist eine wichtige Tatsache, daß man eine “Faserung” (der einen oder andern Art) entlang einer Abbildung “transportieren” kann — aber Vorsicht: solcher Transport geht nur in einer Richtung, nämlich *rückwärts*; dementsprechend spricht man auch vom *Zurückziehen* einer Faserung  $p: E \rightarrow B$  entlang einer Abbildung  $\beta: B' \rightarrow B$ .

Es ist plausibel, was man zu machen hat. Man will ja erklären, was (für die neue Faserung) die Faser indiziert durch einen Punkt  $b' \in B'$  sein soll. Nun hat aber  $b'$  den Bildpunkt  $b = \beta(b')$ , und dieser Bildpunkt indiziert ja schon seine Faser  $F_b = p^{-1}(b)$ . Insofern sieht es wie ein vernünftiger Entschluß aus, daß auch  $b'$  nun diese selbe Faser  $F_b$  indizieren soll,

$$(p')^{-1}(b') := p^{-1}(\beta(b')) .$$

Man muß schließlich noch sagen, wie die Gesamtheit der Fasern für die neue Faserung “zusammengebaut” ist; das heißt, wie diese Gesamtheit mit einer topologischen Struktur versehen sein soll. Auch dafür gibt es eine Lösung, die einerseits die “richtige” ist und andererseits von frappierender Einfachheit. Man definiert nämlich den Totalraum für die neue Faserung als das sogenannte *Faserprodukt* (es wird oft, und nicht nur in der englischen Literatur, auch als der *Pullback* bezeichnet),

$$E' = B' \times_B E := \{ (b', e) \in B' \times E \mid \beta(b') = p(e) \} .$$

Dabei ist die neue Faserprojektion definiert als diejenige Abbildung, die von der ersten Projektion,  $(b', e) \mapsto b'$ , induziert ist. Das resultierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B E & \longrightarrow & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

wird auch als ein *Pullback-Diagramm* bezeichnet.

BEISPIEL. Sei  $A$  ein Unterraum von  $B$ , mit Inklusions-Abbildung  $\beta$ . Die Definition

$$A \times_B E = \{ (a, e) \in A \times E \mid \beta(a) = p(e) \}$$

läuft in dem Fall darauf hinaus, daß  $A \times_B E$  der Unterraum  $p^{-1}(A)$  ist (jedenfalls bis auf kanonische Isomorphie). Die Angabe der Komponente  $a$  in dem Paar  $(a, e)$  in  $A \times_B E$  ist schlicht überflüssig; denn  $a$  ist eindeutig dadurch bestimmt, daß sein Bild unter der Inklusion dasselbe sein soll wie der Bildpunkt  $p(e)$ . Pullback entlang einer Inklusion ist also dasselbe wie die Einschränkung auf den betreffenden Unterraum.

**Satz.** Wenn  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel ist, dann auch  $p': E' \rightarrow B'$ .

BEWEIS. Nach Definition eines Faserbündels gibt es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $B$  derart, daß über jedem der  $U_i$  eine lokale Trivialisierung existiert:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\approx} & U_i \times F_i \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U_i & \xlongequal{\quad} & U_i \end{array}$$

Wir betrachten die zurückgezogene Überdeckung  $\{\beta^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$  von  $B'$ . Es wird nun genügen, zu zeigen, daß über jeder der offenen Mengen  $\beta^{-1}(U_i)$  eine lokale Trivialisierung für die “zurückgezogene Faserung”  $p': E' \rightarrow B'$  existiert. Das folgt aber sofort aus der Tatsache, daß der Pullback eines trivialen Bündels wieder ein triviales Bündel ist: Sei  $\text{pr}_1: U \times F \rightarrow U$  triviales Bündel, sei  $\beta: V \rightarrow U$  eine Abbildung. Der Pullback  $V \times_U (U \times F)$  ist

$$\{ (v, (u, f)) \in V \times (U \times F) \mid \beta(v) = u \}$$

was offenbar dasselbe ist wie  $V \times F$  (bis auf kanonische Isomorphie).  $\square$

**Satz.** Wenn  $p: E \rightarrow B$  Hurewicz-Faserung ist, dann auch  $p': E' \rightarrow B'$ ; ähnlich mit Serre-Faserungen.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: wenn  $p: E \rightarrow B$  die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für einen Raum  $X$  hat, dann hat  $p': E' \rightarrow B'$  sie auch. Es sei ein Liftungs-Problem gegeben; der linke Teil in dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X \times \{0\} & \longrightarrow & B' \times_B E & \longrightarrow & E \\ \text{Inkl} \downarrow & & p' \downarrow & & p \downarrow \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B' & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Nach Hypothese existiert eine Liftung in dem großen Diagramm, eine Abbildung  $G$  von  $X \times [0, 1]$  zu  $E$ . Man bekommt eine Abbildung

$$X \times [0, 1] \longrightarrow B' \times_B E$$

als diejenige Abbildung  $X \times [0, 1] \longrightarrow B' \times_B E$ , deren Komponenten die Abbildungen  $H$  und  $G$  sind: wegen der Gültigkeit von

$$\beta \circ H = p \circ G$$

landet diese Abbildung in dem Unterraum  $B' \times_B E$  von  $B' \times E$ ; und sie erfüllt auch die Bedingung, daß die beiden resultierenden Dreiecke kommutativ sind.  $\square$

BEMERKUNG. Der vorangegangene Beweis besteht aus nichts anderem als dem Hinweis darauf, daß die “Pullback” Konstruktion eine gewisse “universelle Eigenschaft” hat (der Pullback ist der *Inverse Limes* von einem bestimmten Diagramm).

## Abbildungs-Räume

$X$  und  $Z$  seien Mengen. Die Menge der Abbildungen von  $X$  zu  $Z$  soll mit  $Z^X$

bezeichnet werden. Es gilt das *Exponentialgesetz für Abbildungen*: wenn  $Y$  eine weitere Menge ist, so ist

$$Z^{X \times Y} \approx (Z^X)^Y .$$

Dies ein *natürlicher Isomorphismus*; er ist dadurch gegeben, daß man eine Funktion von zwei Variablen,

$$f : X \times Y \longrightarrow Z , \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) ,$$

auch interpretieren kann als eine parametrisierte Familie von Funktionen von einer Variablen,

$$Y \longrightarrow Z^X , \quad y \mapsto f_y ;$$

dabei bezeichnet  $f_y$  die partielle Funktion

$$f_y : X \rightarrow Z , \quad f_y(x) = f(x, y) .$$

Wir sind daran interessiert, ähnliche Um-Schreibe-Tricks zur Verfügung zu haben in einer Situation, wo die beteiligten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  nicht nur Mengen sind, sondern *Räume*. Die Angelegenheit wird dadurch nicht-trivial. Es ist erstens zu klären, auf welche Weise auch  $Z^X$ , etc., ebenfalls Räume sind. Zweitens ist es nicht selbstverständlich, daß der gewünschte natürliche Isomorphismus auch ein *Isomorphismus von Räumen* ist; d.h., daß er mit den beteiligten topologischen Strukturen verträglich ist.

Als erstes stellen wir fest, daß es eine sehr einfache Lösung des Problems gibt, wenn wir uns gestatten, ein wenig zu mogeln. Nämlich wir nehmen an, daß  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  nicht nur topologische Räume sind, sondern daß zusätzlich auch gilt:  $Z$  ist metrischer Raum,  $X$  und  $Y$  sind kompakt. In dem Fall ist auch  $Z^X$  ein metrischer Raum,

$$d(g_1, g_2) := \sup_{x \in X} d(g_1(x), g_2(x)) ;$$

und die anderen Funktionenräume  $Z^{X \times Y}$  und  $(Z^X)^Y$  sind es in analoger Weise ebenfalls. Schließlich ist der Isomorphismus  $Z^{X \times Y} \approx (Z^X)^Y$  auch ein *Isomorphismus von metrischen Räumen*, wegen

$$\sup_{(x, y) \in X \times Y} d(f_1(x, y), f_2(x, y)) = \sup_{y \in Y} \left( \sup_{x \in X} d(f_1(x, y), f_2(x, y)) \right) .$$

In unseren Anwendungen werden die zusätzlichen Voraussetzungen ( $X$ ,  $Y$  kompakt,  $Z$  metrischer Raum) erfüllt sein. Der gemogelte Teil besteht darin, daß wir keineswegs darauf achten werden, wie die Metrik sich bei irgendwelchen Konstruktionen ändert; es wäre ein Akt des reinen Glaubens, anzunehmen, daß solche Änderungen der metrischen Struktur für die topologische Struktur der Funktionenräume unerheblich sind.

Eine Möglichkeit, das Problem zu vermeiden, ist, die Funktionenräume  $Z^X$ , etc., einschließlich ihrer topologischen Struktur zu beschreiben unter alleiniger Verwendung der topologischen Strukturen der beteiligten Räume; und dann damit zu arbeiten. Das ist auch genau das, was wir tun werden.

Dabei werden wir mit Befriedigung zur Kenntnis nehmen, daß die vorhin über die Metrik konstruierte topologische Struktur in dem da vorliegenden speziellen Fall tatsächlich die richtige war (das wird unser erster Satz sein).

DEFINITION. (1) Seien  $X$  und  $Z$  topologische Räume. Es bezeichne  $Z^X$  die Menge der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Z$ .

(2) Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ ; sei  $O$  eine offene Teilmenge von  $Z$ . Es bezeichne  $W(K, O)$  die Untermenge von  $Z^X$ , die aus denjenigen Abbildungen  $f$  besteht, die die Eigenschaft haben, daß  $f(K) \subset O$ .

(3)  $Z^X$  sei mit der topologischen Struktur versehen, die von dem Mengensystem

$$\{ W(K, O) \}_{(K \subset X \text{ kompakt}, O \subset Z \text{ offen})}$$

erzeugt ist. Mit anderen Worten, die topologische Struktur von  $Z^X$  ist so definiert, daß das genannte Mengensystem eine Sub-Basis der Topologie von  $Z^X$  ist.

(4) Die beschriebene topologische Struktur wird als die *kompakt-offene Topologie* von dem Funktionenraum  $Z^X$  bezeichnet.

**Satz.** Sei  $X$  kompakt, sei  $Z$  metrischer Raum. Die metrische Topologie auf  $Z^X$  stimmt überein mit der kompakt-offenen Topologie.

BEWEIS. Sei  $A$  eine Teilmenge von  $Z^X$ . Wir müssen zeigen, wenn  $A$  offen ist in der kompakt-offenen Topologie, dann auch in der metrischen Topologie; und umgekehrt.

Sei zunächst vorausgesetzt, daß  $A$  offen ist in der kompakt-offenen Topologie. Nach Definition ("Sub-Basis") heißt das, daß  $A$  eine (beliebige) Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen des Typs  $W(K, O)$  ist. Offenbar wird es deshalb genügen, zu zeigen, daß jede der Mengen  $W(K, O)$  bezüglich der metrischen Topologie eine offene Menge ist.

Sei eine kompakte Menge  $K$  in  $X$  fixiert und eine offene Menge  $O$  in  $Z$ . Sei  $f \in W(K, O)$ . Wir haben zu zeigen, daß eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f$  existiert, die noch ganz in der Menge  $W(K, O)$  enthalten ist. Dazu definieren wir eine Zahl  $\varepsilon$  als die Distanz von  $f(K)$  zu dem Komplement von  $O$ ,

$$\varepsilon = \inf_{x \in K} d(f(x), CO) .$$

Wegen der Abgeschlossenheit von  $CO$  ist  $d(f(x), CO) > 0$  für jedes  $x$ ; wegen der Kompaktheit von  $K$  ist deshalb  $\varepsilon > 0$ . Wenn  $g \in Z^X$  die Eigenschaft hat, daß  $d(g, f) < \varepsilon$ , dann ist insbesondere  $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$  für alle  $x \in K$ . Folglich ist  $g(x) \in O$  für alle  $x \in K$ ; d.h.  $g \in W(K, O)$ .

Sei umgekehrt nun vorausgesetzt, daß  $A$  eine offene Menge in der metrischen Topologie ist. Sei  $f \in A$ . Wir müssen zeigen, daß die Menge  $A$  eine Umgebung von  $f$  in der kompakt-offenen Topologie ist. Es wird genügen, daß wir uns von jetzt an auf ein bestimmtes  $f$  konzentrieren. Wir haben zu zeigen, daß es ein endliches System von Kompakta  $K_i$  in  $X$  gibt,  $i \in I$ , und ein entsprechendes System von offenen Mengen  $O_i$  in  $Z$ , derart, daß der Durchschnitt der Mengen  $W(K_i, O_i)$  einerseits  $f$  enthält und andererseits ganz enthalten ist in der Menge  $A$ .

Um diese Dinge zu produzieren, werden wir die Metrik benutzen. Da  $A$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß die  $\varepsilon$ -Kugel um  $f$  noch ganz in  $A$  enthalten ist. Wir werden die  $K_i$  und  $O_i$  so produzieren, daß der Durchschnitt der  $W(K_i, O_i)$  tatsächlich schon in der  $\varepsilon$ -Kugel enthalten sein wird.

Zu dem Punkt  $x \in X$  betrachten wir das Urbild, unter  $f$ , von der  $\frac{\varepsilon}{5}$ -Kugel um  $f(x)$  in  $Z$ . Dieses Urbild ist eine Umgebung von  $x$ , es enthält deshalb auch noch eine kompakte Umgebung  $K_x$  (wegen der uns von früher her schon bekannten Tatsache, daß ein kompakter Raum automatisch auch lokal-kompakt ist). Indem wir noch einmal die Kompaktheit von  $X$  zitieren, erhalten wir, daß die Überdeckung  $\{K_x\}_{x \in X}$  eine endliche Teil-Überdeckung  $\{K_i\}_{i \in I}$  hat.

Für jedes  $i \in I$  wird die Menge  $O_i$  in  $Z$  jetzt definiert als die offene  $\frac{\varepsilon}{5}$ -Umgebung der Bildmenge  $f(K_i)$ . Aus der Herleitung ergibt sich, daß der Durchmesser von  $O_i$  (d.h. der maximale Abstand von zwei Punkten in  $O_i$ ) höchstens gleich  $2 \cdot \frac{\varepsilon}{5} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{5}$  ist.

Sei  $g \in Z^X$  so, daß  $g$  enthalten ist in jeder der Mengen  $W(K_i, O_i)$ . Zu  $x \in X$  gibt es ein  $i$ , so daß  $x \in K_i$ . Da  $g \in W(K_i, O_i)$ , ist  $g(x) \in O_i$ . Andererseits ist  $f(x) \in O_i$  sowieso. Also haben  $g(x)$  und  $f(x)$  Abstand  $\leq \frac{4}{5}\varepsilon$ . Das gilt für alle  $x$ , also ist  $g$  enthalten in der  $\varepsilon$ -Kugel um  $f$ .  $\square$

**BEMERKUNG.** Die Kompaktheit von  $X$  war in dem vorstehenden Argument eine sehr wichtige Hypothese. Der Satz läßt sich nur dadurch auf (sagen wir, lokal-kompakte) Räume  $X$  übertragen, daß man die Behauptung ändert: Man muß die "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz" (d.h. die metrische Topologie) ersetzen durch die "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta".  $\square$

**Korollar.**  $X$  und  $Y$  seien kompakt,  $Z$  sei metrisierbar (isomorph zum unterliegenden topologischen Raum eines metrischen Raumes). Für die Funktionenräume, mit der kompakt-offenen Topologie, gilt das Exponentialgesetz  $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$ .

**BEWEIS.** Man wählt einen Isomorphismus von  $Z$  zu einem metrischen Raum; oder, was auf dasselbe hinausläuft, man wählt eine metrische Struktur für  $Z$ . Wie eingangs festgestellt, gilt (aus sehr einfachen Gründen) das Exponentialgesetz für die metrischen Funktionenräume, also auch für deren unterliegende topologische Räume. Nach dem Satz übersetzt sich das in das Exponentialgesetz für die Funktionenräume mit der kompakt-offenen Topologie.  $\square$



Wir werden uns noch die etwas überflüssige Mühe machen, das Exponentialgesetz auch “topologisch” zu beweisen. Dabei wird sich herausstellen, daß der Raum  $Z$  ein ganz beliebiger Raum sein darf; und daß auch für die Räume  $X$  und  $Y$  deutlich weniger benötigt wird als die Voraussetzung ‘kompakt’. Der Exkurs wird uns die Gelegenheit geben, die wichtige kompakt-offene Topologie ein wenig zu studieren.

**Satz.** Seien  $X$  und  $Z$  topologische Räume.

(1) Sei  $\mathbf{B}$  eine Basis der Topologie von  $Z$ . Die Mengen  $W(K, O)$ ,  $K \subset X$  kompakt,  $O \in \mathbf{B}$ , bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf  $Z^X$ .

(2) Sei  $\mathbf{S}$  eine Subbasis der Topologie von  $Z$ . Die Mengen  $W(K, O)$ ,  $K \subset X$  kompakt,  $O \in \mathbf{S}$ , bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf  $Z^X$ .

BEWEIS. (1) Es ist zu zeigen, daß jede offene Menge aus  $Z^X$  oder, was auf dasselbe hinausläuft, jede Menge der Art  $W(K, O)$ , wo  $K \subset X$  kompakt und  $O \subset Z$  offen, auch offen ist bezüglich der in (1) beschriebenen Subbasis. Das Argument dafür ist ähnlich zu dem im zweiten Teil des Beweises von dem vorigen Satz. Sei  $f \in W(K, O)$ . Da  $O$  Vereinigung von Mengen aus  $\mathbf{B}$  ist, kann man zu jedem  $x \in K$  eine offene Basismenge  $O_x \in \mathbf{B}$  finden mit  $f(x) \in O_x \subset O$ ; und weiter dann eine kompakte Umgebung  $K_x$  von  $x$  in  $K$  derart, daß  $f(K_x) \subset O_x$ . Von der Überdeckung  $\{K_x\}_{x \in K}$  gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $\{K_x\}_{x \in I}$ . Es ist dann  $f \in \bigcap_{x \in I} W(K_x, O_x) \subset W(K, O)$ . Das zeigt, daß  $W(K, O)$  Umgebung von  $f$  ist bezüglich der in (1) beschriebenen Topologie.

(2) Zu der gegebenen Subbasis  $\mathbf{S}$  sei  $\mathbf{B}_\mathbf{S}$  die davon erzeugte Basis: eine Teilmenge  $A \subset Z$  ist in  $\mathbf{B}_\mathbf{S}$  genau dann, wenn sie sich darstellen läßt als endlicher Durchschnitt von Mengen aus  $\mathbf{S}$ . Nach (1) ist eine Subbasis der Topologie von  $Z^X$  gegeben durch die Mengen  $W(K, O)$ , wo  $K \subset X$  kompakt ist und  $O \subset Z$  eine offene Menge aus  $\mathbf{B}_\mathbf{S}$ . Wir sind nun sofort fertig mit der Bemerkung, daß  $W(K, O) = \bigcap_{i \in I} W(K, O_i)$ , wenn  $O = \bigcap_{i \in I} O_i$ .  $\square$

**Satz.** Seien  $X$  und  $Z$  topologische Räume. Es sei vorausgesetzt, daß  $X$  lokal-kompakt ist. Die Evaluations-Abbildung

$$ev : Z^X \times X \longrightarrow Z, \quad (f, x) \longmapsto f(x),$$

ist stetig.

BEWEIS. Sei  $O \subset Z$  offen. Wir zeigen, daß jeder Punkt in dem Urbild  $ev^{-1}(O)$  noch eine ganze Umgebung in dem Urbild hat. Sei  $(f, x) \in ev^{-1}(O)$ . Das bedeutet nichts weiter, als daß  $f(x) \in O$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist  $f^{-1}(O)$  Umgebung von  $x$ . Da  $X$  lokal-kompakt ist, enthält diese Umgebung noch eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x$ . Damit ist  $f \in W(K, O)$ , und  $W(K, O) \times K$  ist eine Umgebung von  $(f, x)$ , die die gewünschte Eigenschaft

$$ev(W(K, O) \times K) \subset O$$

hat.  $\square$

Wir kommen nun zu dem Exponentialgesetz für Räume stetiger Abbildungen (die Abbildungsräume tragen die kompakt-offene Topologie). Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Einer Abbildung  $f : X \times Y \rightarrow Z$  ordnen wir ihre partiellen Funktionen zu. Dies definiert eine Abbildung

$$\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y ,$$

nämlich  $f : X \times Y \rightarrow Z$  wird durch  $\Phi$  abgebildet auf

$$Y \xrightarrow{\Phi(f)} Z^X , \quad y \mapsto \Phi(f)(y) = f_y , \quad (\Phi(f)(y))(x) = f_y(x) := f(x, y) .$$

Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß mit  $f$  auch die Abbildung  $\Phi(f) : Y \rightarrow Z^X$  eine stetige Abbildung ist; es ist aber richtig: Dafür genügt es, zu zeigen, daß das Urbild, unter  $\Phi(f)$ , von einer offenen Menge in der Subbasis auch wieder eine offene Menge sein wird. Sei  $W(K, O)$  eine solche offene Menge ( $K \subset X$  kompakt und  $O \subset Z$  offen). Sei  $y \in \Phi(f)^{-1}(W(K, O))$ . Das heißt, daß  $f(K \times \{y\}) \subset O$ . Da  $K$  kompakt ist, enthält die offene Menge  $f^{-1}(O)$  mit  $K \times \{y\}$  auch noch  $K \times U$  für eine ganze Umgebung  $U$  von  $y$  in  $Y$ . Damit ist aber  $\Phi(f)(U) \subset W(K, O)$ . Das heißt, wir haben nachgeprüft, daß das Urbild  $\Phi(f)^{-1}(W(K, O))$  mit dem Punkt  $y$  auch noch die ganze Umgebung  $U$  davon enthält.

**Satz.** (1) Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Die Abbildung  $\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y$  ist stetig.

(2) Es sei vorausgesetzt, daß  $X$  lokal-kompakt ist. Die Abbildung  $\Phi$  ist bijektiv. (Es ist hier nicht behauptet, daß die Umkehr-Abbildung  $\Psi : (Z^X)^Y \longrightarrow Z^{X \times Y}$  stetig ist.)

(3) Es sei vorausgesetzt, daß  $X$  und  $Y$  Hausdorff-Räume sind, und  $X$  lokal-kompakt. Die Abbildung  $\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y$  ist eine topologische Äquivalenz.

BEWEIS. (1) Da  $Z^X$  eine Subbasis von Mengen der Form  $W(K, O)$  hat (wo  $K \subset X$  kompakt,  $O \subset Z$  offen), hat nach dem obigen Satz der Raum  $(Z^X)^Y$  eine Subbasis von Mengen der Form  $W(K', W(K, O))$  (wo  $K \subset X$  kompakt,  $K' \subset Y$  kompakt,  $O \subset Z$  offen). Wir wollen wissen, daß das Urbild einer solchen Menge, unter  $\Phi$ , wieder eine offene Menge ist. Nun ist aber das Urbild von  $W(K', W(K, O))$  gerade die Menge  $W(K \times K', O)$ . Dies ist eine offene Menge in  $Z^{X \times Y}$  (nämlich ein Mitglied der Subbasis), weil mit  $K$  und  $K'$  auch deren Produkt  $K \times K'$  kompakt ist.

(2) Im Falle, wo  $X$  lokal-kompakt ist, haben wir oben gezeigt, daß die Evaluations-Abbildung  $Z^X \times X \rightarrow Z$  stetig ist. Wir benutzen diese, um einer stetigen Abbildung  $g : Y \rightarrow Z^X$  die zusammengesetzte Abbildung

$$\Psi(g) : X \times Y \xrightarrow{\text{Id} \times g} X \times Z^X \approx Z^X \times X \xrightarrow{\text{ev}} Z$$

zuzuordnen. Als Zusammensetzung zweier stetiger Abbildungen ist  $\Psi(g)$  wieder stetig. Die so definierte Abbildung  $\Psi : (Z^X)^Y \rightarrow Z^{X \times Y}$  ist invers zu der Abbildung  $\Phi$ . Denn sei  $f : X \times Y \rightarrow Z$ . Dann ist  $\Phi(f)$  die Abbildung  $y \mapsto f_y$ ,  $f_y(x) := f(x, y)$ . Unter  $\Psi$  geht das auf die Komposition  $(x, y) \mapsto (x, f_y) \mapsto f_y(x)$ .

(3) Wir haben oben nachgeprüft (im Beweis von (1)), daß die Mengen einer Subbasis von  $(Z^X)^Y$  sämtlich auch in einer Subbasis von  $Z^{X \times Y}$  vorkommen (und insbesondere deshalb in  $Z^{X \times Y}$  offene Mengen sind). Es handelte sich dabei um die Mengen  $W(K', W(K, O))$  (wo  $K \subset X$  kompakt,  $K' \subset Y$  kompakt,  $O \subset Z$  offen); oder, nach  $Z^{X \times Y}$  übersetzt, die Mengen  $W(K \times K', O)$ . Wir werden umgekehrt hier nun sofort fertig sein, sobald wir wissen, daß diese Mengen ihrerseits schon eine Subbasis von  $Z^{X \times Y}$  bilden. Das sagt das folgende Lemma.  $\square$

**Lemma.** Seien  $X$  und  $Y$  Hausdorff-Räume,  $Z$  ein Raum. Die Mengen  $W(K \times K', O)$  (wo  $K \subset X$  kompakt,  $K' \subset Y$  kompakt,  $O \subset Z$  offen) bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf  $Z^{X \times Y}$ .

BEWEIS. Sei  $W(L, O)$  eine der Teilmengen aus der Subbasis von  $Z^{X \times Y}$  ( $O$  offene Menge in  $Z$ , und  $L$  kompakter Teilraum von  $X \times Y$ ). Es ist zu zeigen, daß die Menge  $W(L, O)$  offen ist bezüglich der Topologie, die durch die in dem Lemma beschriebene Subbasis definiert ist.

Sei  $f \in W(L, O)$ . Wir müssen zeigen, daß  $W(L, O)$  Umgebung von  $f$  bezüglich der fraglichen Topologie ist. Zu jedem  $(x, y)$  aus  $L$  sei eine Kästchen-Umgebung  $U_{x,y} \times V_{x,y}$  von  $(x, y)$  in  $f^{-1}(O)$  gewählt.

Wenn  $L_X$  und  $L_Y$  die Projektionen des Raumes  $L$  auf die Faktoren  $X$  und  $Y$  bezeichnen, so sind die Räume  $L_X$  und  $L_Y$  quasi-kompakt und deshalb auch kompakt (wir benutzen hier die vorausgesetzte Hausdorff-Eigenschaft der Räume  $X$  und  $Y$ ). Innerhalb von  $U_{x,y}$  gibt es folglich eine kompakte Umgebung  $K_{x,y}$  von  $x$  in  $L_X$ . Ebenso gibt es innerhalb von  $V_{x,y}$  auch eine kompakte Umgebung  $K'_{x,y}$  von  $y$  in  $L_Y$ .

Das System  $\{K_{x,y} \times K'_{x,y}\}_{(x,y) \in X \times Y}$  überdeckt  $L$ . Da  $L$  kompakt ist, gibt es ein endliches Teilsystem  $\{K_{x,y} \times K'_{x,y}\}_{(x,y) \in I}$ , das auch noch überdeckt. Es ist nun

$$f \in \bigcap_{(x,y) \in I} W(K_{x,y} \times K'_{x,y}, O) = W\left(\bigcup_{(x,y) \in I} K_{x,y} \times K'_{x,y}, O\right) \subset W(L, O),$$

und wir sind fertig.  $\square$

Eine naheliegende "Natürlichkeits"-Eigenschaft soll noch erwähnt werden:

**Bemerkung.** Seien  $\chi: X \rightarrow X'$  und  $\eta: Y \rightarrow Y'$  stetige Abbildungen. Komposition mit diesen induziert die Abbildungen in dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y^X & \xrightarrow{\eta_*} & Y'^X \\ \chi^* \uparrow & & \uparrow \chi^* \\ Y^{X'} & \xrightarrow{\eta_*} & Y'^{X'} \end{array}$$

Die Abbildungen in dem Diagramm sind *stetig*. Denn sei z.B.  $W(K, O)$  eine Basismenge in  $Y'^X$ . Dann sind  $W(K, \eta^{-1}(O)) \subset Y^X$  und  $W(\chi(K), O) \subset Y'^{X'}$  Basismengen, die da hinein abbilden (denn  $\eta^{-1}(O)$  ist offen wegen der Stetigkeit von  $\eta$ , und  $\chi(K)$  ist kompakt wegen der Stetigkeit von  $\chi$ ); und sie sind auch die Urbilder von  $W(K, O)$ .

## Wege-Räume, Schleifen-Räume

Die Abbildungs-Raum-Konstruktion liefert auf einfache Weise, und in großem Umfang, so etwas wie *Faserungen*; jedenfalls etwas, das für homotopie-theoretische Zwecke ebenso gut geeignet ist. Das liegt an dem folgenden Sachverhalt.

**Satz.** Sei  $P$  ein Polyeder und  $P'$  darin ein Unterpolyeder. Sei  $X$  ein Raum. Die Restriktion  $(f: P \rightarrow X) \mapsto (f|_{P'}: P' \rightarrow X)$  gibt eine Abbildung

$$X^P \longrightarrow X^{P'}$$

Diese Abbildung ist eine Serre-Faserung; das heißt, die Abbildung hat die HLEP (die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder).

BEWEIS. Daß die Abbildung  $X^P \rightarrow X^{P'}$  existiert (als stetige Abbildung topologischer Räume), wissen wir: eine eben nachgeprüfte Natürlichkeits-Eigenschaft. Für die HLEP haben wir mehrere zueinander äquivalente Formulierungen zur Kenntnis genommen; eine davon ist die (absolute) Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Test-Polyeder  $Q$ . Wir betrachten ein solches  $Q$ ; und ein Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} Q \times \{0\} & \longrightarrow & X^P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q \times [0, 1] & \longrightarrow & X^{P'} \end{array}$$

Die gesuchte Abbildung  $Q \times [0, 1] \rightarrow X^{P'}$  kann alternativ aufgefaßt werden als ein Punkt in dem Abbildungsraum  $(X^{P'})^{Q \times [0, 1]}$  oder auch, wegen dem Exponentialgesetz für Abbildungsräume, als ein Punkt in dem Abbildungsraum  $X^{P' \times Q \times [0, 1]}$ ; das heißt, als eine Abbildung  $P' \times Q \times [0, 1] \rightarrow X$ .

Die vorhandenen Abbildungen  $Q \times \{0\} \rightarrow X^P$  und  $Q \times [0, 1] \rightarrow X^{P'}$  in dem Diagramm lassen sich ähnlich umschreiben in eine Abbildung  $P \times Q \times \{0\} \rightarrow X$  und eine Abbildung  $P' \times Q \times [0, 1] \rightarrow X$ . Wegen der vorausgesetzten Kommutativität des Diagramms haben diese beiden Abbildungen die Eigenschaft, daß sie auf dem Unterraum  $P' \times Q \times \{0\}$  übereinstimmen. Die Daten in dem Diagramm können also insgesamt aufgefaßt werden als eine Abbildung von dem zusammengeklebten Raum

$$P \times Q \times \{0\} \cup_{P' \times Q \times \{0\}} P' \times Q \times [0, 1]$$

Nun ist dieser Raum *Retrakt* von dem Raum  $P \times Q \times [0, 1]$ . Durch die Komposition mit einer Retraktion bekommen wir von dem letzteren Raum nun auch eine Abbildung nach  $X$ . Sie stimmt auf dem Unterraum mit der dort vorhandenen Abbildung überein; daraus resultiert die geforderte Kommutativität des ergänzten Test-Diagramms.  $\square$

Sei  $Y$  ein Raum. Ein Weg in  $Y$  bezeichnet, wie sonst auch, eine stetige Abbildung

$$w : [0, 1] \longrightarrow Y .$$

Die Wege sollen nun ihrerseits als die Punkte eines Raumes angesehen werden. Dieser Raum wird naturgemäß als der *Wegeraum* von  $Y$  bezeichnet. Nach Definition handelt es sich dabei um den Abbildungsraum  $Y^{[0,1]}$ ; er soll topologisiert sein in der Weise, die wir besprochen haben.

Wir kommen nicht umhin, mit grossem Ernst nun einige banale Dinge anzusprechen. Nämlich der Raum der Wege enthält als einen Unterraum den *Raum der konstanten Wege*; das heisst, derjenigen  $w : [0, 1] \rightarrow Y$ , wo das Bild der Abbildung  $w$  nur ein einziger Punkt in  $Y$  ist. Es ist klar (oder?), daß der Raum der konstanten Wege topologisch äquivalent ist zum Raum  $Y$  selbst. Wir notieren die Inklusion einfach als  $Y \subset Y^{[0,1]}$  (wo also der Punkt  $y \in Y$  nun steht für den konstanten Weg an  $y$ ).

**Satz.**  $Y$  ist Deformationsretrakt von  $Y^{[0,1]}$ .

BEWEIS. Die Deformation ist induziert von einer Kontraktion von  $[0, 1]$  auf seinen Anfangspunkt. Sei nämlich  $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  eine solche Kontraktion; die Abbildung  $H$  hat also die Eigenschaften

$$H(0, t) = 0 \text{ (für alle } t) \text{ , } H(s, 0) = s \text{ und } H(s, 1) = 0 \text{ (für alle } s).$$

Die Deformation ist dann diejenige Abbildung  $Y^{[0,1]} \times [0, 1] \rightarrow Y^{[0,1]}$ , die dem Weg  $s \mapsto w(s)$  und dem Parameter  $t$  den folgenden Weg zuordnet:  $s \mapsto w(H(s, t))$ .

Wenn man will, so kann man diese Konstruktion auch noch anders beschreiben. Nämlich per Exponentialgesetz entspricht die gesuchte Abbildung  $Y^{[0,1]} \times [0, 1] \rightarrow Y^{[0,1]}$  einer Abbildung  $Y^{[0,1]} \rightarrow (Y^{[0,1]})^{[0,1]}$  oder, was wieder dasselbe ist, einer Abbildung  $Y^{[0,1]} \rightarrow Y^{[0,1] \times [0,1]}$ . Letztere Abbildung nun ist gegeben durch die Komposition mit der Abbildung  $H$ .  $\square$

Es sei  $y_0 \in Y$  ein fest gewählter Punkt; ein "Basispunkt". Wir bezeichnen mit  $EY$  den Unterraum von  $Y^{[0,1]}$  bestehend aus denjenigen Wegen, die im Basispunkt  $y_0$  anfangen. Und mit  $\Omega Y$  bezeichnen wir darin den Unterraum der *Schleifen*, das heisst derjenigen Wege, die nicht nur im Basispunkt anfangen, sondern auch dort aufhören.  $\Omega Y$  wird als der *Schleifenraum* von  $Y$  bezeichnet. Der Raum  $\Omega Y$  (und damit auch der Raum  $EY$ ) hat einen kanonischen Basispunkt  $e$ , nämlich die triviale Schleife.

**Satz.** Der Raum  $EY$  ist zusammenziehbar auf  $e$ . Die "Endpunkt"-Abbildung

$$p : EY \longrightarrow Y \text{ , } w \longmapsto p(w) := w(1)$$

ist eine Serre-Faserung.

**Korollar.** Es ist  $\pi_n(\Omega Y, e) \approx \pi_{n+1}(Y, y_0)$  (für  $n \geq 0$ ).

BEWEIS DES KOROLLARS. Für eine Serre-Faserung hat man eine lange exakte Folge der Homotopiegruppen; nach dem Satz also eine lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(EY, e) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(\Omega Y, e) \longrightarrow \pi_n(EY, e) \longrightarrow \cdots$$

da offenbar  $\Omega Y$  die Faser von  $EY \rightarrow Y$  über dem Basispunkt  $y_0$  ist. Da die Homotopiegruppen von  $EY$  sämtlich trivial sind (der Satz sagt, daß  $EY$  zusammenziehbar ist), reduziert die lange exakte Folge sich auf Isomorphismen  $\pi_{n+1}(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(\Omega Y, e)$ .

BEWEIS DES SATZES. Die Homotopie, die jeden Weg auf seinen Anfangspunkt zusammenzieht, definiert auch eine Deformation von dem Raum  $EY$ . Das gibt die Zusammenziehbarkeit von  $EY$ .

Für die zweite Behauptung erinnern wir an die Tatsache, daß man bei Abbildungsräumen eine Serre-Faserung bekommt durch die Restriktion entlang einer Abbildung mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft. Insbesondere ist die durch die Restriktion gegebene Abbildung

$$Y^{[0,1]} \longrightarrow Y^{\{0,1\}} \cong Y \times Y$$

eine Serre-Faserung. Die Abbildung  $p : EY \rightarrow Y$  nun ist die "induzierte Faserung", die man aus dieser Faserung durch Zurückziehen entlang der Inklusion

$$Y \approx \{y_0\} \times Y \longrightarrow Y \times Y$$

bekommt. Sie ist deshalb, wie wir wissen, ebenfalls eine Serre-Faserung. □

Die Konstruktion hat als Variante eine weitreichende Verallgemeinerung. Sie sieht ziemlich spektakulär aus, wenn es sich auch eigentlich nicht um eine besonders schwierige Sache handelt. Nämlich es stellt sich heraus, daß, für homotopie-theoretische Zwecke, jede(!) Abbildung durch eine Faserung ersetzt werden kann.

**Satz.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Die Abbildung faktorisiert als eine Homotopie-Äquivalenz, gefolgt von einer Serre-Faserung,

$$f : X \xrightarrow{\cong} E(f) \xrightarrow{p} Y .$$

BEWEIS. Der Raum  $E(f)$  ist definiert als  $X \times_Y Y^{[0,1]}$ , der "Pullback" des Diagramms

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\text{anf}} Y^{[0,1]}$$

wo "anf" die "Anfangspunkt"-Abbildung bezeichnet. Die oben angegebene Deformation von  $Y^{[0,1]}$ , die jeden Weg auf seinen Anfangspunkt kontrahiert, hat die Eigenschaft, daß sie für die Abbildung "anf" eine *faserweise Deformation* ist (die Homotopie bewegt Punkte nur innerhalb von Fasern). Die Deformation induziert deshalb eine Deformation von  $X \times_Y Y^{[0,1]}$  in den Unterraum  $(X =) X \times_Y Y$  (wo wieder das rechte  $Y$  für den Unterraum der konstanten Wege steht). Das gibt die Homotopie-Äquivalenz  $X \rightarrow E(f)$ .

Die Abbildung  $p$  ist definiert über die kanonische Abbildung von  $E(f)$  zu  $Y^{[0,1]}$ , gefolgt von der “Endpunkt”-Abbildung zu  $Y$ . Daß sie eine Serre-Faserung ist, kann man z.B. so einsehen. Der Pullback des Diagramms

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \text{Id}_Y} Y^{\{0,1\}} \longleftarrow Y^{[0,1]}$$

ist zu  $E(f)$  kanonisch isomorph (der Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung von Diagrammen, die die beiden zusätzlichen Faktoren “ $Y$ ” links und in der Mitte wieder unterdrückt). Die resultierende Abbildung  $E(f) \rightarrow X \times Y$  ist dann eine “zurückgezogene Faserung”, folglich eine Serre-Faserung, wie wir wissen. Die Komposition mit der (trivialen) Serre-Faserung  $X \times Y \rightarrow Y$  ist die Abbildung  $p$ , die folglich damit auch eine Serre-Faserung ist.  $\square$

**Bezeichnung.** Die Faser der Serre-Faserung  $E(f) \rightarrow Y$  am Punkt  $y \in Y$  heißt die *Homotopie-Faser* der Abbildung  $f$  (über  $y$ ); *Notation:*  $\text{HoFas}_y(f)$ .

Ausgeschrieben bedeutet die Definition der Homotopie-Faser, daß diese ein “iterierter Pullback” ist,

$$\text{HoFas}_y(f) = X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y\},$$

oder, etwas ausführlicher bezeichnet, der inverse Limes von dem folgenden Diagramm:

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\text{anf}} Y^{[0,1]} \xrightarrow{\text{end}} Y \longleftarrow \{y\}$$

Selbst wenn  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe sind, so ist so etwas wie eine Zellenstruktur bei der Homotopie-Faser von  $f: X \rightarrow Y$  natürlich nicht in Sicht. Es ist sogar nicht einmal klar, ob die Homotopie-Faser in dem Fall überhaupt den Homotopietyp von einem CW-Komplex haben wird. Letzteres ist aber richtig: *Wenn sowohl  $X$  als auch  $Y$  “vernünftige” Räume sind* (den Homotopietyp von CW-Komplexen haben) *und wenn  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen ihnen ist, so hat die Homotopiefaser von  $f$  (an irgendeinem Punkt in  $Y$ ) auch wieder den Homotopietyp von einem CW-Komplex.* Wir werden uns den Luxus erlauben, den Nachweis für diesen nicht-trivialen Sachverhalt nicht zu erbringen.

Es gibt zwei Gründe, warum diese Lücke nicht gar so schwerwiegend ist. Einmal ist es immer möglich (wie wir in Kürze sehen werden), einen Raum durch einen CW-Komplex zu “approximieren”.

Zum andern gibt es auch eine Variante der Faserungs-Theorie, die mit “kombinatorisch definierten CW-Komplexen” (d.h. mit simplizialen Mengen) arbeitet anstatt mit topologischen Räumen (auch das werden wir in Kürze sehen). Bei solchem Vorgehen wird ganz automatisch auch die Homotopie-Faser ein “kombinatorisch definierter CW-Komplex” sein, die Frage der Verbesserungsbedürftigkeit stellt sich also nicht einmal.

## Relative Homotopiegruppen einer Abbildung

Sei  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Abbildung von punktierten Räumen. Die relativen Homotopiegruppen von  $f$  sollen definiert werden *ohne* die Voraussetzung, daß  $f$  die Inklusion eines Unterraumes ist, und auch ohne den Umweg über den Abbildungszyylinder. Das geht dadurch, daß man geeignete Diagramme von Abbildungen betrachtet.

Bezeichne  $D^n$  den  $n$ -Ball und  $S^{n-1}$  seine Rand-Sphäre (für  $n \geq 1$ ). Sei  $s_0 \in S^{n-1}$  ein gemeinsamer Basispunkt für die beiden.  $\pi_n(f)$  wird nun definiert als eine Menge von Äquivalenzklassen: Repräsentanten sind die kommutativen Diagramme von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (D^n, s_0) & \xrightarrow{\beta} & (Y, y_0) \end{array}$$

oder, kurz, die kompatiblen Paare von Abbildungen  $(\alpha, \beta)$ . Zwei Repräsentanten  $(\alpha_0, \beta_0)$  und  $(\alpha_1, \beta_1)$  sollen als äquivalent angesehen werden, wenn eine Homotopie zwischen ihnen existiert, also ein Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, s_0) \times [0, 1] & \longrightarrow & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (D^n, s_0) \times [0, 1] & \longrightarrow & (Y, y_0) \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die beiden Paare  $(\alpha_0, \beta_0)$  und  $(\alpha_1, \beta_1)$  resultieren durch die Einschränkung auf  $(\dots) \times \{0\}$  bzw. auf  $(\dots) \times \{1\}$ .

Wenn die Abbildung  $f$  eine *Inklusion* ist, dann ist  $\pi_n(f) = \pi_n(Y, X; x_0)$ , die übliche relative Homotopiegruppe (bzw. -menge). Denn die Angabe der Abbildung  $\alpha$  ist in dem Fall insofern überflüssig, als  $\alpha$  durch die andere Abbildung  $\beta$  schon eindeutig bestimmt ist (wegen der Injektivität von  $f$ ); das einzige, was man von  $\alpha$  erinnern muß, ist die Bedingung, daß die entsprechende Einschränkung von  $\beta$  eine Abbildung in den Unterraum  $X$  ist.

Die gegebene Beschreibung hat eine Variante, die meistens vorzuziehen ist. Wir schreiben, abkürzend,  $I^n = [0, 1]^n$ . In dem  $n$ -dimensionalen Würfel  $I^n$  sei  $I^{n-1}$  der Teilwürfel  $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$ , und  $J$  sei das abgeschlossene Komplement von  $I^{n-1}$  im Rand von  $I^n$  (mit anderen Worten,  $J$  ist die Vereinigung der  $2n-1$  anderen  $(n-1)$ -Würfel). Man hat eine topologische Äquivalenz von Paaren

$$(I^n/J, I^{n-1}/\partial I^{n-1}) \approx (D^n, S^{n-1}).$$



Deshalb läuft es deshalb auf dasselbe hinaus, statt der obigen Repräsentanten nun Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (I^n, J) & \xrightarrow{\beta} & (Y, y_0) \end{array}$$

zu betrachten; wo, entsprechend, eine Homotopie nun gegeben sein wird durch ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (I^n, J) \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & (Y, y_0) \end{array}$$

Mit Hilfe der neuen Beschreibung kann man, für  $n \geq 2$ , eine Addition von Repräsentanten definieren durch "Nebeneinandersetzen mit halber Breite in der ersten Koordinate". Diese Addition setzt sich, wie gehabt, auf Homotopieklassen fort. Sie macht  $\pi_n(f)$  zu einer Gruppe (für  $n \geq 2$ ); für  $n \geq 3$  ist diese abelsch.

Die Struktur-Abbildungen für eine erwartete "lange Folge" haben die folgende Beschreibung. Für die Abbildung  $\pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(f)$  wird einem Repräsentanten  $\beta: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (Y, y_0)$  das Paar  $(\alpha, \beta)$  zugeordnet wird, wo  $\alpha$  definiert ist als die triviale Abbildung von  $I^{n-1}$  in den Basispunkt  $x_0$ . Die Rand-Abbildung  $\partial: \pi_n(f) \rightarrow \pi_{n-1}(X, x_0)$  ist durch *Restriktion* gegeben; oder, was hier dasselbe bedeutet, von dem Paar  $(\alpha, \beta)$  wird nur die Komponente  $\alpha$  erinnert. Es resultiert eine (lange) Folge

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(f) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Die Folge ist *exakt*: der Beweis dafür geht genauso wie bei der früher behandelten Folge der Homotopiegruppen eines Paares; und sie ist *natürlich*: zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (X', x'_0) & \xrightarrow{f'} & (Y', y'_0) \end{array}$$

gehört eine natürliche Transformation von langen exakten Folgen; d.h. ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(f) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_n(f) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\ & & \downarrow (\varphi, \psi)_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \psi_* & & \downarrow (\varphi, \psi)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(f') & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X', x'_0) & \xrightarrow{f'_*} & \pi_n(Y', y'_0) & \longrightarrow & \pi_n(f') & \xrightarrow{\partial} & \cdots \end{array}$$

Sei  $Z(f)$  der Abbildungszylinder der Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ ; bezeichne  $j: X \rightarrow Z(f)$  die Inklusion und  $p: Z(f) \rightarrow Y$  die Projektion. Wie oben schon angemerkt, können wir

die relativen Homotopiegruppen des Paares  $(Z(f), X)$  identifizieren mit den relativen Homotopiegruppen der Inklusionsabbildung  $j$ . Wir können sie folglich auch identifizieren mit denen der Abbildung  $f$  selbst. Das kommt von dem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{j} & (Z(f), x_0) \\ \parallel & & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

und der resultierenden Transformation von exakten Folgen:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Z(f), x_0) & \longrightarrow & \pi_n(j) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{n-1}(Z(f), x_0) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow p_* \\ \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f'_*} & \pi_n(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_n(f) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{n-1}(Y, y_0) \end{array}$$

Das Fünferlemma ist hierauf anwendbar, da die Abbildung  $p_*$  ein Isomorphismus ist. Es resultiert, daß auch die Abbildung  $\pi_n(j) \rightarrow \pi_n(f)$  ein Isomorphismus ist.

Nicht nur die relativen Homotopiegruppen der Abbildung  $f$  "messen", wie weit die Abbildungen  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  davon abweichen, Isomorphismen zu sein; die Homotopiegruppen des Raumes "Homotopie-Faser von  $f$ " tun das auch. Insofern ist es plausibel, daß da ein Zusammenhang besteht. Richtig ist es auch:

**Satz.** Sei  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Abbildung von punktierten Räumen; sei  $\text{HoFas}_{y_0}(f)$  die Homotopie-Faser am Basispunkt,

$$\text{HoFas}_{y_0}(f) = X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y_0\}$$

(versehen mit dem Basispunkt  $\underline{x}_0 := (x_0, \text{konst-}y_0) = (x_0, \text{konstanter Weg an } y_0)$ ). Es gibt einen natürlichen Isomorphismus, für  $n \geq 1$ ,

$$\pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0) \approx \pi_n(f) .$$

BEWEIS. Die Elemente von  $\pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0)$  sind repräsentiert von Abbildungen

$$\gamma : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (X \times_Y Y^{[0,1]} \times_Y \{y_0\}, (x_0, \text{konst-}y_0)) .$$

Eine solche Abbildung  $\gamma$  entspricht einem Paar von Abbildungen

$$\alpha : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0) , \quad \alpha' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (Y^{[0,1]}, \text{konst-}y_0)$$

mit der Nebenbedingung, daß

$$\alpha'(x)(0) = f(\alpha(x)) \quad \text{und} \quad \alpha'(x)(1) = y_0$$

für alle  $x$  aus  $I^{n-1}$  ist.  $\alpha'$  wiederum entspricht einer Abbildung

$$\beta : (I^{n-1} \times [0, 1], \partial I^{n-1} \times [0, 1] \cup I^{n-1} \times \{1\}) \longrightarrow (Y, y_0)$$

mit  $\beta(x, 0) = f(\alpha(x))$ . Da nun aber

$$(I^{n-1} \times [0, 1], \partial I^{n-1} \times [0, 1] \cup I^{n-1} \times \{1\}) \approx (I^n, J),$$

so ist dies genau ein Paar von Abbildungen  $(\alpha, \beta)$ , das ein Element von  $\pi_n(f)$  repräsentiert.

Die erhaltene Bijektion auf den Repräsentanten ist verträglich mit Homotopie und auch verträglich mit Addition. Es gilt auch noch die folgende Natürlichkeits-Eigenschaft:

Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\ \varphi \downarrow & & \psi \downarrow \\ (X', x'_0) & \xrightarrow{f'} & (Y', y'_0) \end{array}$$

induziert eine Abbildung

$$\text{HoFas}_{y_0}(f) \longrightarrow \text{HoFas}_{y'_0}(f'),$$

nämlich ein Punkt  $(x, \omega : [0, 1] \rightarrow Y)$  (mit den entsprechenden Bedingungen) wird abgebildet auf den Bild-Punkt  $(\varphi(x), \psi \circ \omega)$ . Das resultierende Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0) & \xrightarrow{\approx} & \pi_n(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y'_0}(f'), \underline{x}'_0) & \xrightarrow{\approx} & \pi_n(f') \end{array}$$

ist kommutativ. Denn die induzierten Abbildungen gehen hervor durch Komposition mit  $\varphi$  und  $\psi$ , dagegen entstehen die Isomorphismen  $\pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y_0}(f), \underline{x}_0) \approx \pi_n(f)$  und  $\pi_{n-1}(\text{HoFas}_{y'_0}(f'), \underline{x}'_0) \approx \pi_n(f')$  durch Manipulation der Definitionsbereiche.

## CW-Approximationen, Co-Skelette

Es soll gezeigt werden, daß es zu einem weg-zusammenhängenden Raum immer eine “CW-Approximation” gibt; das heißt, einen CW-Komplex, der so in den Raum abbildet, daß die induzierte Abbildung auf den Homotopiegruppen ein Isomorphismus ist. Es soll ferner gezeigt werden, daß eine solche CW-Approximation *eindeutig* ist (bis auf Homotopie — in einem geeigneten Sinne).

Die bemerkenswerte Sache ist, daß man die Eindeutigkeit gratis mitbekommt, wenn man nur die Existenz in einer leicht verkomplizierten (*relativen*) Version erledigt. Die gibt der folgende Satz:

**Satz.** *Es sei  $Z$  ein weg-zusammenhängender topologischer Raum, mit Basispunkt  $z_0$ ;  $X$  ein (nicht notwendig zusammenhängender) CW-Komplex, mit Basispunkt  $x_0$ ; und  $f : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$  eine Abbildung. Es existiert ein weg-zusammenhängender CW-Komplex  $X'$ , der  $X$  als Unterkomplex enthält, und eine Fortsetzung der Abbildung  $f$  zu einer Abbildung  $f' : (X', x_0) \rightarrow (Z, z_0)$  derart, daß die von  $f'$  auf den Homotopiegruppen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist.*

BEWEIS. Die Idee ist, den Raum  $X$ , und gleichzeitig die Abbildung  $f$ , sukzessive zu “verbessern” durch das Anheften weiterer Zellen.

Der erste Schritt besteht darin,  $X$  weg-zusammenhängend zu machen. Dazu werden 1-Zellen angeheftet. Nämlich für jede Wegzusammenhangskomponente, die *nicht* den Basispunkt  $x_0$  enthält, wird eine 1-Zelle angeheftet. Sie wird so angeheftet, daß sie eine 0-Zelle in der fraglichen Komponente mit dem Basispunkt  $x_0$  verbindet. Da, nach Voraussetzung,  $Z$  ein *weg-zusammenhängender* Raum ist, gibt es keine Schwierigkeit, die Abbildung  $f$  auf die neue 1-Zelle fortzusetzen.

Als nächstes müssen weitere 1-Zellen angeheftet werden, um zu erreichen, daß die Abbildung von  $X$  zu  $Z$  auf der Fundamentalgruppe surjektiv wird. Für die Buchführung dabei ist es am besten, die *relativen Homotopiegruppen* (bzw. -mengen, für  $n = 1$ ) zu betrachten. Die Buchführung gestaltet sich besonders bequem, wenn wir eine kürzlich eingeführte neue Beschreibung zur Kenntnis nehmen:

Bezeichne  $D^n$  den  $n$ -Ball und  $S^{n-1}$  seine Rand-Sphäre (für  $n \geq 1$ ). Sei  $s_0 \in S^{n-1}$  gemeinsamer Basispunkt für die beiden.  $\pi_n(f)$  wird definiert als eine Menge von Äquivalenzklassen: Repräsentanten sind die kommutativen Diagramme von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D^n, s_0) & \xrightarrow{\beta} & (Z, z_0) \end{array}$$

Zwei Repräsentanten  $(\alpha_1, \beta_1)$  und  $(\alpha_2, \beta_2)$  werden als äquivalent angesehen, wenn eine Homotopie zwischen ihnen existiert, also ein Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, s_0) \times [1, 2] & \longrightarrow & (X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D^n, s_0) \times [1, 2] & \longrightarrow & (Z, z_0) \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß die beiden Paare  $(\alpha_1, \beta_1)$  und  $(\alpha_2, \beta_2)$  resultieren durch die Einschränkung auf  $(\dots) \times \{1\}$  bzw.  $(\dots) \times \{2\}$ . Die lange exakte Folge von Homotopiegruppen lautet:

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Z, z_0) \longrightarrow \pi_n(f) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \dots$$

Wir haben noch die folgende Bemerkung: Das Paar  $(\alpha, \beta)$  repräsentiert sicherlich dann das triviale Element von  $\pi_n(f)$ , wenn eine Abbildung  $\beta' : D^n \rightarrow X$  existiert derart, daß  $\beta' | S^{n-1} = \alpha$  und  $f \circ \beta' = \beta$ .

Wir fahren nun fort mit dem Beweis des Satzes. Tatsächlich fangen wir noch einmal ganz von vorne an. Wir setzen  $X_0 = X$ ,  $f_0 = f$ . Induktiv werden wir eine aufsteigende Folge von CW-Komplexen  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , definieren, und von Abbildungen  $f_n : X_n \rightarrow Z$ , derart, daß  $f_n | X_{n-1} = f_{n-1}$  und daß  $\pi_k(f_n)$  trivial ist, für  $1 \leq k \leq n$ . Die Folge sei schon konstruiert bis zur Nummer  $n-1$  (einschließlich), so daß also der Term mit der Nummer  $n$  jetzt zur Konstruktion ansteht.

Sei  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i \in I}$  ein System von Repräsentanten von "genügend vielen" Elementen von  $\pi_n(f_{n-1})$  (z.B. ein [oder mindestens ein] Repräsentant für jedes Element von  $\pi_n(f_{n-1})$ ). Der  $i$ -te Repräsentant ist also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\alpha_i} & (X_{n-1}, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D^n, s_0) & \xrightarrow{\beta_i} & (Z, z_0) \end{array}$$

Wir dürfen annehmen, daß  $\alpha_i : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  eine Abbildung in das  $(n-1)$ -Skelett von  $X_{n-1}$  ist (denn nach dem zellulären Approximations-Satz könnten wir das auf jeden Fall dadurch erreichen, daß wir den Repräsentanten  $(\alpha_i, \beta_i)$  durch einen homotopen Repräsentanten ersetzen).

Wir können also die  $\alpha_i$  benutzen, um  $n$ -Zellen an  $X_{n-1}$  anzuheften. Das ergibt, nach Definition, den CW-Komplex  $X_n$ . Wir können die Abbildungen  $\beta_i$  benutzen, um die Abbildung  $X_{n-1} \rightarrow Z$  auf die neuen Zellen, mithin also auf  $X_n$ , zu erweitern. Das ergibt, nach Definition, die Abbildung  $f_n$ .

Wenn wir  $\beta_i' : D^n \rightarrow X_n$  definieren als die charakteristische Abbildung der  $i$ -ten Zelle, so ist  $\beta_i' | S^{n-1} = \alpha_i$  und  $f_{n-1} \circ \beta_i' = \beta_i$ . Das heißt (die obige Bemerkung), daß das von  $(\alpha_i, \beta_i)$  repräsentierte Element in  $\pi_n(f_n)$  trivial wird. Insgesamt ist es also richtig, daß die Abbildung  $\pi_n(f_{n-1}) \rightarrow \pi_n(f_n)$  triviales Bild hat (wegen unserer Verabredung, "genügend viele" Elemente zu benutzen).

Wir möchten etwas mehr wissen; nämlich, daß  $\pi_k(f_n)$  trivial ist für  $k = n$  (und auch für  $1 \leq k \leq n$ ). Das schließen wir mit einer Anwendung des Fünferlemmas. Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_k X_{n-1} & \xrightarrow{(f_{n-1})^*} & \pi_k Z & \longrightarrow & \pi_k(f_{n-1}) & \longrightarrow & \pi_{k-1} X_{n-1} & \xrightarrow{(f_{n-1})^*} & \pi_{k-1} Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_k X_n & \xrightarrow{(f_n)^*} & \pi_k Z & \longrightarrow & \pi_k(f_n) & \longrightarrow & \pi_{k-1} X_n & \xrightarrow{(f_n)^*} & \pi_{k-1} Z
 \end{array}$$

In dem Diagramm sind zwei der vertikalen Abbildungen identische Abbildungen (die identischen Abbildungen auf  $\pi_k Z$  und  $\pi_{k-1} Z$ ). Insbesondere ist die erste dieser Abbildungen surjektiv und die zweite ist injektiv. Für  $k-1 \leq n-1$  ist auch die Abbildung  $\pi_{k-1} X_{n-1} \rightarrow \pi_{k-1} X_n$  surjektiv (nach dem zellulären Approximations-Satz). Das Fünferlemma ist also anwendbar, und es ergibt, daß die Abbildung  $\pi_k(f_{n-1}) \rightarrow \pi_k(f_n)$  *surjektiv* ist.

Für  $k < n$  nun ist  $\pi_k(f_{n-1})$  trivial nach Induktionsvoraussetzung. Also ist auch  $\pi_k(f_n)$  trivial. Für  $k = n$  brauchen wir einen kleinen zusätzlichen Trick. Nämlich einerseits wissen wir, daß die Abbildung  $\pi_n(f_{n-1}) \rightarrow \pi_n(f_n)$  surjektiv ist. Andererseits wissen wir auch (s. oben), daß die Abbildung triviales Bild hat. Wir können daraus schließen, daß auch  $\pi_n(f_n)$  trivial ist.

Der CW-Komplex  $X'$  schließlich wird definiert als die Vereinigung der  $X_n$ ; und die Abbildung  $f'$  als diejenige Abbildung, die die  $f_n$  als ihre Restriktionen hat.  $\square$

**Korollar 1.**  $Z$  sei weg-zusammenhängender topologischer Raum, mit Basispunkt  $z_0$ . Es gibt einen weg-zusammenhängenden CW-Komplex  $X$ , mit Basispunkt  $x_0$ , und eine Abbildung  $(X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ , die Isomorphismen auf den Homotopiegruppen induziert.

BEWEIS. Anwendung des Satzes auf die Abbildung  $(\{x_0\}, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ .  $\square$

**Korollar 2.** Sind  $(X_1, x_1) \rightarrow (Z, z_0)$  und  $(X_2, x_2) \rightarrow (Z, z_0)$  zwei CW-Approximationen, so gibt es eine Homotopie-Äquivalenz  $(X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$ , derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X_1, x_1) & \longrightarrow & (X_2, x_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z, z_0) & \xlongequal{\quad} & (Z, z_0) \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist.

BEWEIS. Die beiden Abbildungen  $(X_1, x_1) \rightarrow (Z, z_0)$  und  $(X_2, x_2) \rightarrow (Z, z_0)$  ergeben zusammen eine Abbildung auf der disjunkten Vereinigung  $X_1 \dot{\cup} X_2$ ,

$$X_1 \dot{\cup} X_2 \longrightarrow Z$$

(wo  $X_1 \dot{\cup} X_2$  auf irgendeine Weise mit einem Basispunkt versehen ist; z.B. mit  $x_1$ ). Nach dem Satz gibt es einen CW-Komplex  $X'$ , der  $X_1 \dot{\cup} X_2$  als Unterkomplex enthält, und eine Abbildung  $(X', x') \rightarrow (Z, z)$ , die die obige Abbildung erweitert; wobei die neue Abbildung Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert.

Bei weg-zusammenhängenden Räumen nun hängt die Tatsache "Isomorphismen der Homotopiegruppen zu induzieren" *nicht* von der Wahl eines Basispunktes ab (d.h. diese Aussage gilt entweder für *jeden* Basispunkt oder aber für keinen einzigen).

Da  $X_1 \rightarrow Z$  und  $X' \rightarrow Z$  Isomorphismen der Homotopiegruppen induzieren, folgt, daß auch  $X_1 \rightarrow X'$  Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Nach dem Whitehead-Satz ist also  $X_1 \rightarrow X'$  eine Homotopie-Äquivalenz.

Ähnlich ist auch  $X_2 \rightarrow X'$  eine Homotopie-Äquivalenz. Sei die Abbildung  $X' \rightarrow X_2$  davon eine Homotopie-Inverse. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

ist dann das linke Teilquadrat (strikt) kommutativ, und das rechte Teilquadrat ist kommutativ bis auf Homotopie. Das äußere Rechteck in dem Diagramm ergibt das im Korollar behauptete Diagramm. (Jedenfalls bis auf das Detail mit dem Basispunkt, das man nachträglich noch über die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft [angewandt auf die Inklusion des Basispunktes] bekommen kann.)  $\square$

Wir kommen zur Behandlung der *Co-Skelette* eines Raumes. Andere hier gebräuch-  
liche Bezeichnungen sind die *Postnikov-Zerlegung*; und der *Moore-Postnikov-Turm*.

**Satz.** Sei  $X$  ein weg-zusammenhängender CW-Komplex. Für  $n = 0, 1, 2, \dots$ , gibt es einen Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes,  $\text{Cosk}_n(X)$ , eine Inklusion  $i_n : X \rightarrow \text{Cosk}_n(X)$  und eine Serre-Faserung  $p_n : \text{Cosk}_{n+1}(X) \rightarrow \text{Cosk}_n(X)$ , so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

a.) Das Diagramm (Moore-Postnikov-Turm)

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{i_{n+1}} & \text{Cosk}_{n+1}(X) \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow p_n \\
 X & \xrightarrow{i_n} & \text{Cosk}_n(X) \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow p_{n-1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & \text{Cosk}_1(X) \\
 \parallel \downarrow & & \downarrow p_0 \\
 X & \xrightarrow{i_0} & \text{Cosk}_0(X)
 \end{array}$$

ist (strikt) kommutativ.

b.) Die Inklusion  $i_n$  induziert Isomorphismen  $i_{n*} : \pi_k X \rightarrow \pi_k \text{Cosk}_n(X)$ , für  $k \leq n$ , und es ist  $\pi_k \text{Cosk}_n(X) = 0$ , für  $k > n$ .

c.) Bezeichnet  $F_n$  die Faser der Abbildung  $p_{n-1} : \text{Cosk}_n(X) \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$ , so ist  $F_n$  ein "Eilenberg-McLane-Raum" vom Typ  $K(\pi_n X, n)$ . Das heißt,  $F_n$  hat eine einzige nicht-verschwindende (genauer: möglicherweise nicht-verschwindende) Homotopiegruppe, nämlich  $\pi_n$ , und diese ist isomorph zu  $\pi_n X$ .

**BEWEIS.** Der Turm sei schon konstruiert bis zur Höhe  $n-1$  (einschließlich). Wir zeigen, wie wir (induktiv) die Konstruktion bis zur Höhe  $n$  fortsetzen können; anzugeben dafür sind der Raum  $\text{Cosk}_n(X)$  und die Abbildungen  $i_n$  und  $p_{n-1}$ .

Die Konstruktion von  $\text{Cosk}_n(X)$  besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden (viele) Zellen an  $X$  angeheftet: die Homotopiegruppen in den Dimensionen  $\geq n+1$  sollen damit zu Null gemacht werden. Der zweite Teil ruft eigentlich nur in Erinnerung,



daß eine Abbildung immer faktorisiert werden kann als eine Inklusion (die gleichzeitig eine Homotopieäquivalenz ist), gefolgt von einer Faserung.

Zum Anheften der Zellen: Als erstes werden Zellen der Dimension  $n+2$  angeheftet, danach Zellen der Dimension  $n+3$ , und so weiter.

Für das Anheften der  $(n+2)$ -Zellen muß man Abbildungen der  $S^{n+1}$  spezifizieren, je eine Abbildung für jede anzuheftende Zelle. Uns kommt es darauf an,  $\pi_{n+1}(X, x_0)$  zu Null zu machen. Also werden wir darauf achten, *genügend viele* solcher Abbildungen zu verwenden. Eine Möglichkeit, die sicher ausreicht (wenn sie auch im allgemeinen vermutlich einen gewaltigen "Overkill" bedeuten wird) ist es, *für jedes Element* von  $\pi_{n+1}(X, x_0)$  eine zelluläre Abbildung als Repräsentanten zu nehmen und mit dieser Abbildung dann eine  $(n+2)$ -Zelle anzuheften. Die Prozedur ergibt einen CW-Komplex  $X'$ , der aus dem Unterkomplex  $X$  und den hinzugekommenen  $(n+2)$ -Zellen besteht. Die Inklusion  $X \rightarrow X'$  induziert einen Isomorphismus auf den Homotopiegruppen in Dimension  $\leq n$  (zellulärer Approximations-Satz). Andererseits ist die Inklusion die triviale Abbildung auf der  $(n+1)$ -ten Homotopiegruppe (das ist das, was wir durch das Anheften der "genügend vielen"  $(n+2)$ -Zellen erzwungen haben). Nach dem zellulären Approximations-Satz ist es auch richtig, daß die Inklusion  $X \rightarrow X'$  auf der  $(n+1)$ -ten Homotopiegruppe *surjektiv* ist (das  $(n+1)$ -Skelett von  $X'$  ist dasselbe wie das von  $X$ ). Es folgt, daß die  $(n+1)$ -te Homotopiegruppe von  $X'$  tatsächlich trivial ist.

Der Rest des Zellen-Anheftens geht genauso: An  $X'$  werden "genügend viele"  $(n+3)$ -Zellen angeheftet. Das ergibt einen  $X'$  als Unterkomplex enthaltenden CW-Komplex  $X''$ , der in den Dimensionen  $\leq n+1$  dieselben Homotopiegruppen hat wie  $X'$ , aber triviale Homotopiegruppe in Dimension  $(n+2)$ . Mit anderen Worten,  $X''$  hat dieselben Homotopiegruppen wie  $X$  in den Dimensionen  $\leq n$ , aber triviale Homotopiegruppen in den Dimensionen  $n+1$  und  $n+2$ . Und so weiter. Der als Vereinigung all dieser Zellen entstehende CW-Komplex heiße  $\bar{X}$ . Er hat triviale Homotopiegruppen in den Dimensionen  $> n$ .

Es gibt eine Abbildung  $X' \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$ , die die Abbildung  $X \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$  erweitert. Das liegt daran, daß jede der Anhefte-Abbildungen  $S^{n+1} \rightarrow X$ , gefolgt von der Abbildung  $X \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$  null-homotop ist (Trivialität von  $\pi_{n+1}\text{Cosk}_{n-1}(X)$ ); also kann die Abbildung  $X \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$  auf die neue Zelle erweitert werden. Mit den andern neuen Zellen ist es ähnlich. Insgesamt existiert deshalb eine Abbildung  $\bar{X} \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$ , die die Abbildung  $X \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$  erweitert.

Die so konstruierte Abbildung  $\bar{X} \rightarrow \text{Cosk}_{n-1}(X)$  faktorisiert, wie wir wissen, als eine Inklusion, die eine Homotopie-Äquivalenz ist,  $\bar{X} \xrightarrow{\simeq} \text{Cosk}_n(X)$ , gefolgt von einer Serre-Faserung,  $\text{Cosk}_n(X) \xrightarrow{p_n} \text{Cosk}_{n-1}(X)$ . Die Abbildung  $i_n$  schließlich wird definiert als die Komposition  $X \rightarrow \bar{X} \rightarrow \text{Cosk}_n(X)$ .

Teil (c) ergibt sich aus der langen exakten Folge der Faserung  $p_n$ . □

Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß die im Satz genannten Eilenberg-MacLane-Räume tatsächlich alle existieren (d.h. daß sie in der Natur wirklich alle vorkommen). In Kürze werden wir aber sehen, daß das so ist.

## Fundamentalgruppen von CW-Komplexen

Für eine Gruppe ist es, wie sich herausstellt, keine Einschränkung der Allgemeinheit, als Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes wirklich vorzukommen (wir werden das in Kürze zitieren wollen im Zusammenhang mit einer Diskussion, die höhere Homotopiegruppen betrifft). Die Tatsache ist ziemlich offensichtlich, sobald geklärt ist, daß (und wie) die Fundamentalgruppe mit Hilfe der Zellenstruktur beschrieben werden kann. Das soll jetzt erläutert werden.

Dabei sind einige Begriffe der sogenannten *kombinatorischen Gruppentheorie* zu diskutieren: “Erzeugende”, “Relationen”, “freie Gruppe”, “Gruppen-Präsentation”.

Es sei  $M$  eine Menge. Man ordnet ihr auf die folgende Weise eine Gruppe  $F(M)$  zu, die von  $M$  erzeugte freie Gruppe.

Zu der Menge  $M$  nimmt man noch eine isomorphe Kopie  $\bar{M}$ . Ein Element  $\bar{m} \in \bar{M}$  soll man sich vorstellen als das “formal-inverse” des entsprechenden Elements  $m \in M$ . Es sei nun  $W(M)$  definiert als die Menge der Worte, deren Einträge die Buchstaben aus dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$  sind. Z.B. wenn  $m$  und  $n$  Elemente aus  $M$  sind, dann sind

$$m m \bar{m} \bar{m} \bar{m} n \bar{n} n m \quad \text{und} \quad n \bar{n} \bar{m} n m \bar{n} n$$

zwei solche Worte. Auf der Menge  $W(M)$  wird ein Kompositionsgesetz definiert durch das *Aneinanderfügen von Worten*. Die Menge wird dadurch zu einer *Halbgruppe*, die offenbar *assoziativ* ist und die auch ein *neutrales Element* hat (das leere Wort). Natürlich ist sie nicht kommutativ.

Aus der Halbgruppe macht man dadurch eine Gruppe, daß man erzwingt, daß (für jedes  $m \in M$ ) die beiden Elemente  $m$  und  $\bar{m}$  zueinander invers sind. Das heißt, daß man die Menge  $W(M)$  nun modulo der folgenden Äquivalenzrelation betrachtet: Wenn in einem Wort eine Silbe (ein Teilwort)  $m \bar{m}$  vorkommt, dann darf man diese Silbe ersatzlos weglassen. Ähnlich auch, wenn eine Silbe  $\bar{m} m$  vorkommt, dann darf man diese Silbe ersatzlos weglassen. Z.B. sind die beiden oben als Beispiele angegebenen Worte zueinander äquivalent (sie sind beide äquivalent zu  $\bar{m} n m$ ). Nach Definition nun ist  $F(M)$  die Menge (d.h. Gruppe) dieser Äquivalenzklassen.

Offenbar kann man die Konstruktion von  $F(M)$  als einen *Funktor* auffassen, von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der Gruppen. Und offenbar ist es auch richtig, daß dieser Funktor *adjungiert* ist (genauer: links-adjungiert) zum “Vergiß-Funktor”, der einer Gruppe  $G$  ihre unterliegende Menge  $V(G)$  zuordnet; das heißt, es gibt einen Isomorphismus der Hom-Mengen,

$$\text{Hom}_{\text{Gruppen}}(F(M), G) \approx \text{Hom}_{\text{Mengen}}(M, V(G))$$

und dieser Isomorphismus ist *natürlich* (mit Abbildungen verträglich).

Eine Gruppe heißt *frei*, wenn sie zu einer Gruppe der Art  $F(M)$  isomorph ist. Jede Gruppe  $G$  ist Quotient einer freien Gruppe (Bild einer surjektiven Abbildung von einer solchen). Z.B., wenn man keinen Wert auf Ökonomie legt, so kann man die freie Gruppe nehmen, die von den sämtlichen Elementen von  $G$  erzeugt wird. Das läßt sich auf hübsche Weise mit Hilfe der Adjunktion ausdrücken: man hat diejenige Abbildung

$$F(V(G)) \longrightarrow G,$$

die, per Adjunktion, der identischen Abbildung auf der unterliegenden Menge  $V(G)$  entspricht.

Natürlich wird man gelegentlich daran interessiert sein, etwas ökonomischer vorzugehen. Man nimmt das zum Anlaß für die folgende Definition:

DEFINITION. Ein *Erzeugenden-System* einer Gruppe  $G$  besteht aus einer Menge  $M$  und einer Abbildung  $M \rightarrow V(G)$ , derart, daß die zugehörige Abbildung  $F(M) \rightarrow G$  surjektiv ist.

Wenn  $F$  eine (z.B. freie) Gruppe ist, und  $N$  eine Untergruppe, die eine *normale Untergruppe* ist (oder, was dasselbe bedeutet, ein *Normalteiler* — d.h., per Definition, daß Konjugierte von Elementen aus  $N$  wieder in  $N$  sind), so ist  $F/N$ , die Menge der Nebenklassen, wieder eine Gruppe, die sogenannte *Faktorgruppe* von  $F$  nach  $N$ .

Wenn, umgekehrt,  $p: F \rightarrow G$  eine surjektive Gruppen-Abbildung ist, so ist der Kern von  $p$  ein Normalteiler  $N$  in  $F$ . Die Gruppe  $G$  kann dann mit Hilfe von  $F$  und  $N$  beschrieben werden (bis auf kanonische Isomorphie) als die Faktorgruppe  $F/N$ .

Ist  $R$  (für "Relationen") eine Teilmenge einer Gruppe  $F$ , so gibt es einen *kleinsten* Normalteiler in  $F$ , der die Menge  $R$  enthält; dieser wird mit  $N(R)$  bezeichnet, die *normale Hülle* von  $R$ .

Etwas mehr sind wir interessiert an einer Variante. Nämlich  $F$  ist nun die freie Gruppe  $F(M)$  auf einem Erzeugenden-System  $M$ . Und die Elemente von  $R$  sind beschrieben als Worte in den Erzeugenden und deren formal-inversen; d.h. als Worte in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$  (in der obigen Notation).

DEFINITION. Eine *Gruppen-Präsentation*  $\{M; R\}$  besteht aus:

— einer Menge  $M$

— einer Menge  $R$  von Worten in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$ .

Und zwar soll dies eine Präsentation der Gruppe  $F(M)/N(R)$  sein.

Zum Beispiel könnte man eine Gruppe dadurch beschreiben wollen, daß man zwei Erzeugende fordert,  $x$  und  $y$ , und zwei Relationen,  $xy^2 = y^3x$  und  $yx^2 = x^3y$ ; "aber keine Relationen, die nicht durch diese beiden erzwungen sind". Eine solche Gruppe würde man hinschreiben mit Hilfe einer Gruppen-Präsentation

$$\{ x, y; xy^2\bar{x}\bar{y}^3, yx^2\bar{y}\bar{x}^3 \}$$

(wo z.B.  $\bar{x}^3$  eine Abkürzung für  $\bar{x}\bar{x}\bar{x}$  ist).

In dem Beispiel ist nicht nur die Anzahl der Erzeugenden endlich, sondern auch die Anzahl der Relationen. Für diesen Sachverhalt sagt man auch, daß es sich um eine *endliche Präsentation* handelt. (Eine Gruppe, die eine endliche Präsentation besitzt, wird im übrigen auch als eine *endlich-präsentierbare Gruppe* bezeichnet.)

Die Beschreibung von Gruppen durch Präsentationen ist nicht so effektiv, wie man das vielleicht hoffen könnte. Das liegt nicht an den mangelnden Fähigkeiten der Mathematiker. Ganz im Gegenteil sind es die Mathematiker, die das herausgefunden haben. Es ist, zum Beispiel, eine Tatsache, daß es kein Verfahren geben kann(!), um von einer endlichen Gruppen-Präsentation herauszufinden, ob die von ihr definierte Gruppe nun die triviale Gruppe ist oder nicht.

Hier ist nicht behauptet, daß man eine bestimmte Gruppen-Präsentation kennt, bei der die Frage prinzipiell nicht geklärt werden könnte: Unmöglichkeits-Aussagen dieser Art beziehen sich auf unendliche Klassen von Beispielen. Man muß aber darauf gefaßt sein, daß auch eine einzelne einfach-aussehende Präsentation schon sehr große Mühe machen kann (die angegebene Präsentation ist übrigens dafür ein Beispiel).

Es sei  $M$  eine Menge. Wir definieren einen Raum  $X(M)$  als den Quotientenraum

$$X(M) = M \times [0, 1] / M \times \{0, 1\} .$$

Dieser Raum ist auf naheliegender Weise ein CW-Komplex: es gibt eine einzige 0-Zelle  $x_0 = M \times \{0, 1\} / M \times \{0, 1\}$ , und es gibt für jedes Element  $m$  von  $M$  eine 1-Zelle; die charakteristische Abbildung dieser 1-Zelle ist induziert von der Inklusion

$$\{m\} \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1] .$$

**Satz.** (1) Die Fundamentalgruppe von  $X(M)$  ist frei: es gibt einen Isomorphismus

$$F(M) \longrightarrow \pi_1(X(M), x_0) .$$

(2) Jedes Element von  $F(M)$  ist repräsentiert von nur einem reduzierten Wort (ein Wort in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$ , in dem es kein Teilwort der Art  $m\bar{m}$  oder  $\bar{m}m$  gibt).

BEWEIS. Eine Abbildung  $F(M) \rightarrow \pi_1(X(M), x_0)$  bekommt man auf die folgende Weise. Zunächst wird jedem Wort in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$  ein geschlossener Weg in  $X(M)$  zugeordnet, der im Basispunkt beginnt und auch dort endet. Wenn das Wort nur aus dem einzigen Buchstaben  $m$  besteht, so soll der zugeordnete Weg die durch  $m$  indizierte 1-Zelle genau einmal in positiver Richtung durchlaufen: der Weg ist gegeben durch die charakteristische Abbildung der 1-Zelle (die ja Anfangs- und Endpunkt des Intervalls beide in den Basispunkt abbildet). Wenn das Wort nur aus dem einzigen Buchstaben  $\bar{m}$  besteht (dem "formal-inversen" von  $m$ ), so soll der Weg derselbe sein, aber rückwärts durchlaufen. Im allgemeinen Fall besteht das Wort aus endlich vielen Buchstaben: die zugeordneten Wege werden dann einfach nacheinander durchlaufen. Die Zuordnung von Worten zu Wegen ist so gemacht, daß sie mit der Komposition verträglich ist. Sie ist auch mit der Äquivalenzrelation auf den Worten verträglich; jedenfalls dann, wenn man bei den Wegen zu deren Homotopieklassen übergeht. Denn wenn in einem Wort eine

Silbe der Art  $m\bar{m}$  oder  $\bar{m}m$  vorkommt, so bedeutet das für die Wege, daß es einen Teilweg gibt, der erst in der einen Richtung, danach dann rückwärts durchlaufen wird; bis auf Homotopie darf man ihn weglassen.

Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung  $F(M) \rightarrow \pi_1(X(M), x_0)$  ein Isomorphismus ist. Das ist eine Verallgemeinerung der Ausrechnung von  $\pi_1(S^1, x_0)$  (inklusive der Methode). Im allgemeinen Fall ist der Beweis komplizierter, aber nicht viel.

*Die Abbildung ist surjektiv.* Das geht mit dem Lebesgue'schen Überdeckungs-Satz. Wir verwenden die Überdeckung von  $X(M)$ , die aus den offenen 1-Zellen besteht und aus einer weiteren Menge; nämlich der Umgebung  $U$  der 0-Zelle, die wir aus  $X(M)$  dadurch erhalten, daß wir aus jeder der 1-Zellen das abgeschlossene mittlere Drittel weglassen. Die Menge  $U$  ist offen, und zusammenziehbar.

Ist  $w: [0, 1] \rightarrow X(M)$  ein Repräsentant eines Elements von  $\pi_1(X(M), x_0)$ , so gibt es eine Unterteilung von  $[0, 1]$  in Teilintervalle, deren jedes ganz in eine der Mengen der Überdeckung abgebildet wird. Wir bestehen hier nicht darauf, daß alle Teilintervalle die gleiche Länge haben. Das gibt uns die Möglichkeit, Trennpunkte gelegentlich wegzulassen. Nämlich, wenn einer der Trennpunkte nicht in der Menge  $U$  liegt, so ist es notwendigerweise der Fall, daß beide der angrenzenden Intervalle ganz in die offene Zelle abgebildet werden, in die auch der Trennpunkt geht. Einen solchen Trennpunkt dürfen wir also weglassen. Das heißt, wir dürfen annehmen, daß alle Trennpunkte ganz in die Menge  $U$  abgebildet werden.

Wir ersetzen jetzt den Weg  $w$  durch einen homotopen,  $w'$ . Die Homotopie ist gegeben durch eine Kontraktion der Menge  $U$ . Alle Trennpunkte werden durch  $w'$  in den Basispunkt abgebildet.  $w'$  ist also eine Komposition von ganz vielen Wegen. Die nicht-trivialen unter diesen kommen her von denjenigen Teilintervallen, die durch  $w$  nicht in die Menge  $U$ , und demnach ganz in eine der offenen Zellen abgebildet wurden. Unter der Deformation von  $w$  zu  $w'$  wird aus einem solchen Teilweg einer von vier Typen (bis auf Homotopie), je nachdem wie die Homotopie die Endpunkte des Teilintervalls in den Basispunkt gezogen hat. Zwei der Typen sind trivial (d.h. nullhomotop), nämlich diejenigen, wo die beiden Endpunkte zur selben Seite gezogen wurden. Die beiden andern Typen sind diejenigen, wo die fragliche Zelle genau einmal in positiver, bzw. negativer Richtung durchlaufen wird.

*Die Abbildung ist injektiv.* Das ist der schwierigere Teil. Im Falle der Ausrechnung von  $\pi_1(S^1, x_0)$  waren wir in der Lage, den folgenden Trick zu verwenden. Für eine Abbildung  $w: [0, 1] \rightarrow S^1$  konnten wir ihre *Windungszahl* definieren durch die Betrachtung einer Liftung

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{w}} & \mathbb{R}^1 \\ \parallel & & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{w} & S^1 \end{array}$$

Auf Grund von Dingen, die sich letztlich als Sätze der Überlagerungstheorie herausstellen, konnten wir sicher sein, daß homotope Wege dieselbe Windungszahl  $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$  haben. Es resultierte, daß die durch die “Standard-Wege” gegebene Abbildung von  $\mathbb{Z}$  zu  $\pi_1(S^1, x_0)$  injektiv war.

Um den Trick zu übertragen, müssen wir uns auf irgendeine Weise nun eine Überlagerung von dem Raum  $X(M)$  verschaffen, die die Rolle der Abbildung  $p: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$  übernehmen kann. Das ist nicht so hoffnungslos, wie es zunächst scheinen mag. Wir wissen ja, auf Grund von allgemeinen Sätzen der Überlagerungstheorie, daß z.B. die universelle Überlagerung eines Raumes  $X$  (vorausgesetzt,  $X$  ist “vernünftig”) immer auf die folgende Weise, *nur mit Hilfe von  $X$* , beschrieben werden kann: ein Punkt von  $\tilde{X}$  besteht aus einem Paar von Daten in  $X$ , nämlich einem Punkt dort, und einer Homotopieklasse von Wegen (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von dem Punkt zu dem Basispunkt in  $X$ .

Indem wir den Wunsch zum Vater eines Gedankens werden lassen, adaptieren wir diese Methode mit der folgenden Variante: die Wege-Daten in dem Raum  $X(M)$  (d.h., mehr oder weniger, die Fundamentalgruppe) ersetzen wir durch das, was wir gerne hätten, nämlich die Elemente der freien Gruppe  $F(M)$ . Wir schreiben also nun einen CW-Komplex mit Hilfe solcher Daten hin. Und wir hoffen, daß wir anschließend werden zeigen können, daß es sich um eine Überlagerung von  $X(M)$  handelt.

Bezeichne, wie oben,  $W(M)$  die Menge der Worte in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \overline{M}$ . Bezeichne  $W'(M)$  die Untermenge der *reduzierten* Worte; d.h. derjenigen, wo kein Teilwort der Art  $m\overline{m}$  oder  $\overline{m}m$  vorkommt. (Zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir noch nicht, daß jedes Element von  $F(M)$  einen *eindeutigen* Repräsentanten aus  $W'(M)$  hat. Das wird sich, als Nebenprodukt unserer Überlegungen, aber herausstellen.)

Der CW-Komplex  $\tilde{X}(M)$  wird auf die folgende Weise definiert. Die 0-Zellen sind in 1:1 Beziehung zu den reduzierten Worten  $\omega \in W'(M)$ . Die 1-Zellen sind in 1:1 Beziehung zu den Paaren bestehend aus einem reduzierten Wort  $\omega$  und einem zusätzlichen Buchstaben  $\beta \in M$ . Die Inzidenz ist dabei wie folgt geregelt. Die 1-Zelle  $(\omega, \beta)$  ist inzident zu den beiden 0-Zellen  $\omega$  (‘Anfangspunkt’ der 1-Zelle) und  $\omega'$  (‘Endpunkt’ der 1-Zelle). Dabei ist  $\omega' = \omega\beta$ , wenn dieses Wort reduziert ist. Wenn dagegen das Wort  $\omega\beta$  nicht reduziert ist, so läßt sich  $\omega$  offenbar schreiben als  $\omega = \omega''\overline{\beta}$ . In dem Fall ist  $\omega''$  reduziert, und  $\omega'$  wird definiert als  $\omega''$ .

Eine Abbildung  $\tilde{X}(M) \rightarrow X(M)$  ist definiert “durch das Vergessen der  $W'(M)$ -Daten”. Jede der 0-Zellen von  $\tilde{X}(M)$  wird auf die 0-Zelle von  $X(M)$  abgebildet, und die 1-Zelle mit der Nummer  $(\omega, \beta)$  wird abgebildet auf diejenige mit der Nummer  $\beta$ .

Wir prüfen nach, daß es sich bei der Abbildung um eine Überlagerung handelt. Dazu nehmen wir als Elementar-Umgebungen in  $X(M)$  dieselben offenen Mengen, die auch vorher schon benutzt wurden: die offenen 1-Zellen und zusätzlich die Menge  $U$ , die aus  $X(M)$  dadurch entsteht, daß aus jeder der 1-Zellen das abgeschlossene mittlere Drittel weggelassen wird.

Lokale Trivialität über einer offenen Zelle von  $X(M)$  ist klar: die offene Zelle mit der Nummer  $\beta$  hat als ihr Urbild das Produkt,

$$(\text{offene Zelle mit der Nummer } \beta) \times W'(M),$$

und die Abbildung ist die erste Projektion.

Die lokale Trivialität über der Menge  $U$  ist nur wenig komplizierter. Die Menge  $U$  hat die folgende explizite Beschreibung:

$$U = M \times (\frac{2}{3}, 1] \cup_{M \times \{1\}} \{x_0\} \cup_{M \times \{0\}} M \times [0, \frac{1}{3}).$$

Ihr Urbild  $\tilde{U}$  hat eine entsprechende Beschreibung als

$$W'(M) \times M \times (\frac{2}{3}, 1] \cup_{W'(M) \times M \times \{1\}} W'(M) \cup_{W'(M) \times M \times \{0\}} W'(M) \times M \times [0, \frac{1}{3}),$$

wobei die beiden Verklebe-Abbildungen gegeben sind durch

$$W'(M) \times M \times \{0\} \longrightarrow W'(M) \quad , \quad (\omega, \beta) \longmapsto \omega$$

und

$$W'(M) \times M \times \{1\} \longrightarrow W'(M) \quad , \quad (\omega, \beta) \longmapsto \omega' ;$$

$$\text{dabei ist (wie oben) } \begin{cases} \omega' = \omega \beta, & \text{wenn } \omega \beta \text{ reduziert ist;} \\ \omega = \omega' \bar{\beta}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Trivialisierung

$$\tilde{U} \longrightarrow U \times W'(M)$$

bekommt man nun durch Zusammenkleben der folgenden Abbildungen:

Auf dem Teil  $W'(M) \times M \times [0, \frac{1}{3})$  ist die Abbildung diejenige, die das Tripel  $(\omega, \beta, x)$  abbildet auf das Paar  $((\beta, x), \omega)$ .

Auf dem Teil  $W'(M) \times M \times (\frac{2}{3}, 1]$  ist die Abbildung so gegeben:  $(\omega, \beta, x)$  wird abgebildet auf das Paar  $((\beta, x), \omega')$ . Diese Teil-Abbildung ist ebenfalls ein Isomorphismus: denn für jedes  $\beta$  ist es richtig, daß die Abbildung

$$\omega \longmapsto \omega'$$

ein Isomorphismus ist.

Nachdem nun geklärt ist, daß die Abbildung  $\tilde{X}(M) \rightarrow X(M)$  eine Überlagerung ist, sind wir auch in der Lage, die für Überlagerungen geltenden allgemeinen Sätze anzuwenden (da  $X(M)$ , als CW-Komplex, die Voraussetzung erfüllt, ein im Sinne der Überlagerungstheorie ‘vernünftiger’ Raum zu sein: “lokal weg-zusammenhängend”, “semi-lokal einfach-zusammenhängend”).

Das Urbild des Basispunktes  $\{x_0\}$  ist die Menge  $W'(M)$ . Auf dieser Menge operiert, per Wege-Liftung, die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X(M), x_0)$ . Per Komposition mit der Abbildung  $F(M) \rightarrow \pi_1(X(M), x_0)$  bekommen wir daraus eine Operation von  $F(M)$ . Sie hat die folgende Beschreibung: Sei  $\beta \in M$ . Das davon in  $F(M)$  repräsentierte Element geht auf das Element in  $\pi_1(X(M), x_0)$ , das von der durch  $\beta$  indizierten 1-Zelle

repräsentiert wird. Die Aktion ist ablesbar aus den oben angegebenen Isomorphismen. Es resultiert, daß die Aktion die obige Abbildung ist,

$$\omega \longmapsto \omega' \quad , \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \omega' = \omega \beta \quad , & \text{wenn } \omega \beta \text{ reduziert ist;} \\ \omega = \omega' \bar{\beta} \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere geht der Basispunkt  $\tilde{x}_0$  in  $\tilde{X}(M)$  (das leere Wort) durch die Aktion mit einem reduzierten Wort  $\omega$  über in eben dieses reduzierte Wort  $\omega$ .

Es bleibt nur noch, die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft zitieren: die fundamentale Tatsache, daß die Aktion eines geschlossenen Weges nur abhängt von seiner Homotopieklasse. Da zwei verschiedene reduzierte Worte durch ihre Operation auf dem Basispunkt  $\tilde{x}_0$  zwei verschiedene Punkte im Urbild von  $x_0$  ergeben, sind notwendigerweise die beiden Bild-Elemente in  $\pi_1(X(M), x_0)$  verschieden. Da jedes Element von  $F(M)$  von einem reduzierten Wort repräsentiert ist, resultiert daraus die Injektivität der Abbildung  $F(M) \rightarrow \pi_1(X(M), x_0)$ .

Als Nebenprodukt resultiert ein Beweis für die Tatsache, daß zwei verschiedene reduzierte Worte tatsächlich auch immer zwei verschiedene Elemente der freien Gruppe  $F(M)$  repräsentieren.  $\square$

Sei  $X$  ein CW-Komplex. Ein *Baum* in  $X$  ist ein Unterkomplex  $T$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $T$  hat Dimension  $\leq 1$ ,
- $T$  ist einfach-zusammenhängend.

Ein Baum in  $X$  heißt *maximal*, wenn er alle 0-Zellen von  $X$  enthält.

**Satz.** *Jeder zusammenhängende CW-Komplex  $X$  enthält einen maximalen Baum.*

BEWEIS. Sei  $T$  ein Baum in  $X$ . Wenn  $T$  nicht maximal ist, dann gibt es eine 0-Zelle  $x_1$  in  $X$ , die nicht in  $T$  enthalten ist. Ein zusammenhängender CW-Komplex ist auch weg-zusammenhängend. Also gibt es einen Weg  $w$ , der  $x_1$  mit einem Punkt in  $T$  verbindet; o.B.d.A. (zellulärer Approximations-Satz) verläuft  $w$  ganz im 1-Skelett. Sei  $b \in [0, 1]$  der kleinste Wert, so daß  $w(b) \in T$ . Sei  $a \in [0, b]$  der größte Wert, so daß  $w(a)$  im 0-Skelett liegt, aber nicht in  $T$ . Es ist dann  $w|_{[a, b]}$  ein Weg, der bei einer 0-Zelle außerhalb  $T$  anfängt, der bis zu seinem Ende ganz außerhalb  $T$  verläuft und der in  $T$  aufhört. Er hört, notwendigerweise, bei einer 0-Zelle von  $T$  auf, und er verläuft, abgesehen von seinen Endpunkten, ganz innerhalb einer einzigen 1-Zelle.

Es gibt folglich eine 1-Zelle, die zwei verschiedene 0-Zellen verbindet, von denen die eine in  $T$  liegt, die andere hingegen nicht; die 1-Zelle selbst liegt auch nicht in  $T$ . Diese beiden Zellen nun können wir zu  $T$  hinzunehmen: die 1-Zelle und die nicht in  $T$  liegende 0-Zelle, mit der sie inzident ist. Es ist klar (oder?), daß der neue Unterkomplex,

$$T_1 = T \text{ plus diese beiden Zellen ,}$$

wieder ein Baum ist.



Wenn  $T_1$  nicht ein maximaler Baum ist, können wir diesen Schritt wiederholen. Wenn  $X$  nur endlich viele 0-Zellen außerhalb  $T$  hat, dann muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen. Andernfalls können wir das Verfahren unendlich oft (d.h. induktiv) verwenden, um eine aufsteigende Folge von Bäumen zu konstruieren,

$$T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$$

Es ist klar (oder?), daß in dem Fall der Unterkomplex

$$T' = \bigcup_n T_n$$

auch wieder ein Baum ist.

Wenn  $T'$  nicht ein maximaler Baum ist, dann beginnen wir mit dem Verfahren wieder ganz von vorne: der Baum wird erst ein bißchen vergrößert, dann immer mehr, und schließlich nehmen wir wieder eine Vereinigung.

Es ist denkbar, daß das Verfahren SEHR oft wiederholt werden muß (z.B. sogar mehr als abzählbar oft). Das heißt dann *transfinite Induktion*.

In den Grundlagen der Mathematik ist eine elegante Alternative bereitgestellt, um Schlußweisen dieser Art prägnant zu formulieren. Das *Lemma von ZORN* sagt, um die Existenz eines maximalen Baumes sicherzustellen, genügt es, folgendes zu zeigen: Zu einem *total geordneten* System von Bäumen (total geordnet durch Inklusion) gibt es einen Baum, der alle die Bäume des Systems enthält. Das ist aber klar (oder?): man nimmt die Vereinigung.  $\square$

**Satz.** (1) Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension  $\leq 1$ . Die Fundamentalgruppe von  $X$  (an irgendeinem Basispunkt) ist eine freie Gruppe.  
 (2) Sei  $T$  ein maximaler Baum in  $X$ . Sei  $M$  die Menge derjenigen 1-Zellen von  $X$ , die nicht in dem maximalen Baum  $T$  liegen. Die Fundamentalgruppe von  $X$  ist isomorph zu der freien Gruppe  $F(M)$ .

BEWEIS. Als einfach-zusammenhängender CW-Komplex der Dimension  $\leq 1$  ist der maximale Baum  $T$  ein kontrahierbarer CW-Komplex. Sei  $X' = X/T$  der Quotienten-CW-Komplex. Nach dem Klebelemma ist die Quotienten-Abbildung  $X \rightarrow X'$  eine Homotopie-Äquivalenz, insbesondere also auch ein Isomorphismus der Fundamentalgruppe (für jeden Basispunkt in  $X$ ). Der Quotienten-Komplex  $X'$  hat nur eine einzige 0-Zelle, und die Menge  $M'$  seiner 1-Zellen entspricht der Menge  $M$  derjenigen 1-Zellen von  $X$ , die nicht in  $T$  liegen. Der obige Satz ist also anwendbar; er ergibt daß  $\pi_1(X', x'_0)$  isomorph ist zu der freien Gruppe  $F(M')$ . Diese wiederum ist isomorph zu der freien Gruppe  $F(M)$ , da  $M$  und  $M'$  isomorphe Mengen sind.  $\square$

Als Abschweifung erhalten wir eine gruppentheoretische Anwendung, den *Satz von KUROSH* (der direkte, gruppentheoretische Beweis davon ist ziemlich kompliziert):

**Korollar.** Sei  $F$  eine freie Gruppe,  $G \subset F$  eine Untergruppe.  $G$  ist eine freie Gruppe.

BEWEIS. Es gibt eine Menge  $M$  derart, daß  $F$  isomorph ist zu der von  $M$  erzeugten freien Gruppe  $F(M)$ .  $F$  ist also auch isomorph zu der Fundamentalgruppe von  $X(M)$  (dem oben diskutierten CW-Komplex mit einer 0-Zelle und der durch  $M$  indizierten Menge von 1-Zellen). Die Gruppe  $G$  ist damit isomorph zu einer Untergruppe der Fundamentalgruppe von  $X(M)$ . Überlagerungstheorie nun sagt, daß jede Untergruppe der Fundamentalgruppe herkommt von der Fundamentalgruppe eines geeigneten zusammenhängenden Überlagerungsraumes; das trifft insbesondere auf  $G$  zu. Der Überlagerungsraum ist wieder ein CW-Komplex der Dimension  $\leq 1$ . Seine Fundamentalgruppe ist also, nach dem Satz, eine freie Gruppe.  $\square$

Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex, sei  $X^1$  das 1-Skelett davon. Nach dem vorigen ist  $\pi_1(X^1, x_0)$  eine freie Gruppe; sie ist isomorph zu  $F(M)$ , wenn  $T$  einen maximalen Baum in  $X$  bezeichnet, und  $M$  das System derjenigen 1-Zellen von  $X$ , die nicht in  $T$  liegen. Zu jeder der 2-Zellen von  $X$  gehört eine Anhefte-Abbildung  $S^1 \rightarrow X^1$ , und damit ein Element von  $\pi_1(X^1, x_0)$ , das wohldefiniert ist bis auf Konjugation (oder, etwas anders gesagt, eine Konjugationsklasse in  $\pi_1(X^1, x_0)$ ). Jede solche Konjugationsklasse hat als Repräsentanten ein Wort in dem Alphabet  $M \dot{\cup} \bar{M}$  (Elemente von  $M$  und deren formal-inverse). Sei  $R$  ein System von Worten, das für jede 2-Zelle von  $X$  einen solchen Repräsentanten enthält.

**Satz.**  $\{M; R\}$  ist eine Gruppen-Präsentation von  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Korollar.** Jede Gruppe  $G$  ist die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden CW-Komplexes.

BEWEIS. Die Gruppe  $G$  hat eine Gruppen-Präsentation. Der Satz sagt, wie (und daß!) eine solche aus einer Zellenstruktur abgelesen werden kann.  $\square$

BEWEIS DES SATZES (Skizze). Nach dem zellulären Approximations-Satz ist die Abbildung

$$F(M) \approx \pi_1(X^1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Die in  $R$  aufgelisteten Worte werden in  $\pi_1(X, x_0)$  trivial: das ist das, was die anzuheftenden 2-Zellen besorgen. Was noch gemacht werden muß, ist der Nachweis, daß die resultierende Abbildung

$$F(M) / N(R) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

nicht nur surjektiv ist, sondern auch injektiv (wo wieder  $N(R)$  die normale Hülle von  $R$  bezeichnet). Dazu nimmt man eine geschlossene Kurve in  $X^1$ , nimmt an, daß sie in  $X$  (folglich, nach dem zellulären Approximations-Satz, auch im 2-Skelett  $X^2$ ) nullhomotop ist, und analysiert eine Null-Homotopie; d.h. eine Fortsetzung dieser Abbildung zu einer Abbildung  $D^2 \rightarrow X^2$ . Das geht ganz ähnlich wie der Beweis des Homotopie-Additions-Satzes in der Dimension 2, nur daß man jetzt auf Basispunkte achten muß. Die Details lassen wir weg.  $\square$

### Zusatz S. 71-72

Sei  $G$  Gruppe, mit neutralem Element  $1$ . Seien  $x$  und  $y$  Elemente von  $G$ . Es gelte

$$(1) \quad xy^2 = y^3x \quad \text{und} \quad (2) \quad yx^2 = x^3y .$$

Dann ist  $x = y = 1$ .

BEWEIS. Wegen (2) ist  $y = x^3yx^{-2}$ . Einsetzen in (1) liefert

$$x(x^3yx^{-2})^2 = (x^3yx^{-2})^3x ,$$

also

$$x^4yxyx^{-2} = x^3yxyxyx^{-1} ,$$

folglich

$$xyxy = yxyxyx ,$$

das heißt

$$(3) \quad (xy)^2 = (yx)^3 .$$

Auf die gleiche Weise folgt, per Symmetrie, auch

$$(4) \quad (yx)^2 = (xy)^3 .$$

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  definiert als  $\alpha := xy$  und  $\beta := yx$ . Die Gleichungen (3) und (4) sagen dann  $\alpha^2 = \beta^3$  und  $\alpha^3 = \beta^2$ . Es folgt

$$\beta^2 = \alpha^3 = \alpha^2\alpha = \beta^3\alpha ,$$

das heißt,  $\alpha$  und  $\beta$  sind invers zueinander,  $\beta^{-1} = \alpha$ . Also auch

$$yx = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} .$$

Dies, in (2) eingesetzt, ergibt

$$x^3y = yx^2 = (yx)x = y^{-1}x^{-1}x = y^{-1} ,$$

also (5)  $x^3 = y^{-2}$ . Andererseits besagt  $\beta\alpha = 1$  auch  $1 = (yx)(xy) = yx^2y$  und folglich  $x^2 = y^{-2}$ . Zusammen mit (5) ergibt das

$$x^2 = y^{-2} = x^3 ,$$

also  $x = 1$ . Dies eingesetzt in die Gleichung (1) ergibt schließlich auch  $y = 1$ .



## Vorgegebene Homotopiegruppen

Sei  $G$  eine Gruppe. Dann gibt es, wie wir gesehen haben, einen zusammenhängenden CW-Komplex (z.B. einen solchen der Dimension 2), dessen Fundamentalgruppe die vorgegebene Gruppe  $G$  ist.

Wie wir auch gesehen haben, gibt es die Möglichkeit, durch das Anheften weiterer Zellen die Homotopiegruppen in den Dimensionen 2, 3, usw. zu Null zu machen, ohne die Fundamentalgruppe noch zu ändern (die Konstruktion des 1-Co-Skeletts).

Insgesamt gibt es also zu der vorgegebenen Gruppe  $G$  einen zusammenhängenden CW-Komplex, der die Gruppe  $G$  als Fundamentalgruppe hat und dessen höhere Homotopiegruppen sämtlich trivial sind. Einen solchen Raum bezeichnet man auch als einen *Eilenberg-MacLane-Raum* zu der Gruppe  $G$  und zu der Dimension 1. Als abkürzende Notation ist die Bezeichnung  $K(G; 1)$  für einen solchen Raum gebräuchlich; also

$$\pi_i K(G; 1) = \begin{cases} G, & \text{wenn } i = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es stellt sich heraus, daß der Raum durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, bis auf Homotopie-Äquivalenz (im *punktierten* Sinn: sowohl die Abbildungen als auch die Homotopien respektieren den Basispunkt). Das ergibt sich aus dem folgenden Satz:

**Satz.** Seien  $G$  und  $G'$  Gruppen. Es gibt eine 1:1 Beziehung zwischen  
— Gruppenhomomorphismen  $G \rightarrow G'$  und  
— Homotopieklassen punktierter Abbildungen  $K(G, 1) \rightarrow K(G', 1)$ .

Der Satz impliziert die Eindeutigkeit (bis auf Homotopie). Denn sei  $K(G, 1)$  ein solcher CW-Komplex, sei  $K'(G, 1)$  ein anderer. Nach dem Satz gibt es eine Abbildung  $f: K(G, 1) \rightarrow K'(G, 1)$ , die der identischen Abbildung von  $G$  entspricht. Diese Abbildung nun induziert Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen. Sie ist also eine Homotopie-Äquivalenz nach dem Whitehead-Satz.

BEWEIS DES SATZES. Eine Homotopieklass punktierter Abbildungen von  $K(G, 1)$  zu  $K(G', 1)$  induziert einen Homomorphismus  $G \rightarrow G'$ . Wir zeigen, diese Zuordnung ist (1) surjektiv und (2) injektiv.

Dazu machen wir zunächst eine spezielle Annahme, von der wir uns aber später befreien werden. Nämlich wir nehmen an, daß der CW-Komplex  $K(G, 1)$  auf die folgende Weise konstruiert ist (wir wissen, daß das geht): Ausgehend von einer Präsentation von  $G$  hat man an eine einzige 0-Zelle zunächst 1-Zellen angeheftet (je eine für jede Erzeugende) und dann an das so entstandene 1-Skelett 2-Zellen (je eine für jede Relation);

und schließlich wurden Zellen der Dimensionen 3, 4, usw. angeheftet, um die höheren Homotopiegruppen zu Null zu machen.

(1) *Surjektivität.* Zu dem Homomorphismus  $G \rightarrow G'$  konstruiert man eine Abbildung  $K(G, 1) \rightarrow K(G', 1)$  wie folgt. Die 0-Zelle geht auf den Basispunkt (wir hätten da gar keine andere Wahl). Jede 1-Zelle in  $K(G, 1)$  bestimmt einen geschlossenen Weg (da es nur eine 0-Zelle gibt), sie bestimmt also ein Element von  $\pi_1 K(G, 1) = G$  und damit, über den Homomorphismus, auch ein Element von  $G' = \pi_1 K(G', 1)$ . Für dieses Element nehmen wir irgendeinen repräsentierenden geschlossenen Weg (sagen wir, im 1-Skelett), und auf den bilden wir die 1-Zelle ab.

Die Fundamentalgruppe des 1-Skeletts von  $K(G, 1)$  ist die freie Gruppe  $F$ , die von der Menge der 1-Zellen erzeugt ist; und eine Abbildung einer freien Gruppe ist eindeutig bestimmbar, und bestimmt, durch das, was sie auf den erzeugenden Elementen tut. Die durch das Verhalten auf den Erzeugenden vorgegebene Abbildung  $F \rightarrow G'$  ist also dasselbe wie die zusammengesetzte Abbildung  $F \rightarrow G \rightarrow G'$  (denn auf den Erzeugenden ist das so; nach Definition). Der Kern der Abbildung  $F \rightarrow G$  wird folglich trivial nach  $G'$  abgebildet. Insbesondere wird jede der Relationen trivial nach  $G'$  abgebildet: jede der Anhefte-Abbildungen  $S^1 \rightarrow 1$ -Skelett, gefolgt von der auf dem 1-Skelett schon definierten Abbildung, ist eine null-homotope Abbildung. Die Abbildung des 1-Skeletts kann also auf die 2-Zellen von  $K(G, 1)$  erweitert werden.

Die Erweiterung auf die Zellen höherer Dimension ist aus trivialen Gründen möglich. Z.B. eine Anhefte-Abbildung für eine 3-Zelle von  $K(G, 1)$  ist eine Abbildung von  $S^2$  in das 2-Skelett von  $K(G, 1)$ . Die Zusammensetzung mit der schon konstruierten Abbildung des 2-Skeletts nach  $K(G', 1)$  ist null-homotop, da  $K(G', 1)$  triviales  $\pi_2$  hat.

(2) *Injektivität.* Sind  $f_0$  und  $f_1$  zwei Abbildungen von  $K(G, 1)$  zu  $K(G', 1)$ , die dieselbe Abbildung  $G \rightarrow G'$  induzieren, so ist behauptet, daß die beiden Abbildungen zueinander homotop sind. Die behauptete Homotopie wird induktiv über die Zellen von  $K(G, 1)$  definiert. Wir beginnen mit der trivialen Homotopie der 0-Zelle am Basispunkt (da haben wir keine andere Wahl).

Für jede der 1-Zellen ergibt die Abbildung  $f_0$  einen geschlossenen Weg in  $K(G', 1)$ , und  $f_1$  ergibt einen anderen. Diese beiden geschlossenen Wege sind homotop wegen unserer Annahme, daß  $f_0$  und  $f_1$  dieselbe Abbildung  $G \rightarrow G'$  induzieren. Folglich kann die Homotopie auf das 1-Skelett erweitert werden.

Die Erweiterung der Homotopie auf den ganzen Raum ist nun wieder aus trivialen Gründen möglich. Z.B. für eine 2-Zelle geht es darum, eine Abbildung auf  $D^2 \times [0, 1]$  zu finden, die eine vorgegebene Abbildung auf dem Rand davon, d.h. auf

$$D^2 \times \{0\} \cup \partial D^2 \times [0, 1] \cup D^2 \times \{1\},$$

erweitert. Nun ist das eine 2-Sphäre, die Abbildung ist also null-homotop, da  $K(G', 1)$  triviales  $\pi_2$  hat. Also existiert die Erweiterung.

Wir müssen uns noch von der speziellen Annahme über den Raum  $K(G, 1)$  befreien. Dazu nehmen wir einen solchen speziellen Raum,  $K''(G, 1)$ . Es gibt dann eine Homotopie-Äquivalenz  $K''(G, 1) \rightarrow K(G, 1)$ ; und damit transportiert sich alles.  $\square$

Höhere Homotopiegruppen sind abelsch. Wenn man “höhere” Eilenberg-MacLane-Räume betrachten will, so sollte man demgemäß nicht von einer vorgegebenen Gruppe ausgehen, sondern von einer vorgegebenen *abelschen* Gruppe.

Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Sei  $n \geq 2$ . Ein *Eilenberg-MacLane-Raum*  $K(A, n)$  ist, nach Definition, ein zusammenhängender CW-Komplex mit

$$\pi_i K(A, n) = \begin{cases} A, & \text{wenn } i = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz.** Sei  $A$  abelsche Gruppe, sei  $n \geq 2$ . (1) Ein Eilenberg-MacLane-Raum  $K(A, n)$  existiert. (2) Je zwei Eilenberg-MacLane-Räume (zu gegebenem  $A$  und  $n$ ) sind zueinander homotopie-äquivalent.

BEWEIS. Wenn  $X$  ein CW-Komplex ist, dessen  $(n-1)$ -Skelett trivial ist, und der ansonsten nur Zellen in den Dimensionen  $n$  und  $n+1$  hat, mit Zellen indiziert durch Indexmengen  $J_n$  und  $J_{n+1}$ , so reduziert der zelluläre Kettenkomplex (relativ Basispunkt) sich auf eine Abbildung

$$\mathbb{Z}[J_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[J_n]$$

(wo  $\mathbb{Z}[J]$  die von einer Menge  $J$  erzeugte freie abelsche Gruppe bezeichnet). Für die Existenz-Behauptung ist nun die Idee, einen solchen Zellenkomplex derart anzugeben, daß der Kokern der Abbildung die vorgegebene abelsche Gruppe  $A$  ist. Der Zellenkomplex wird dann diesen Kokern, also  $A$ , als  $n$ -te Homologiegruppe haben; folglich, nach dem Hurewicz-Satz, auch als  $n$ -te Homotopiegruppe. Aus dem Zellenkomplex bekommt man den gewünschten Eilenberg-MacLane-Raum, indem man die höheren Homotopiegruppen zu Null macht; also durch die Konstruktion des  $n$ -Co-Skeletts.

Jede abelsche Gruppe ist Quotient (= Bild einer surjektiven Abbildung von) einer freien abelschen Gruppe. Es gibt deshalb eine freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}[J_n]$  und eine surjektive Abbildung  $\mathbb{Z}[J_n] \rightarrow A$ ; und, weiter, eine freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}[J_{n+1}]$  und eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{Z}[J_{n+1}] \longrightarrow \text{Kern}(\mathbb{Z}[J_n] \rightarrow A).$$

Zusammen mit der Inklusion  $\text{Kern}(\mathbb{Z}[J_n] \rightarrow A) \rightarrow \mathbb{Z}[J_n]$  bekommen wir so eine Abbildung  $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[J_n]$ .

(Tatsächlich ist folgendes richtig: eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist selbst wieder eine freie abelsche Gruppe. Wir könnten deshalb, wenn wir darauf Wert legen, die letztere Abbildung sogar als eine *injektive* Abbildung bekommen. Das ist aber nicht so wichtig für uns an dieser Stelle.)

Wir definieren nun einen CW-Komplex  $X$  auf die folgende Weise. Das  $(n-1)$ -Skelett besteht nur aus dem Basispunkt. An den Basispunkt werden  $n$ -Zellen, indiziert durch die Menge  $J_n$ , angeheftet. Bezeichne  $X^n$  dieses  $n$ -Skelett. Die Homotopiegruppen von  $X^n$  unterhalb von Nummer  $n$  sind trivial. Da wir auch  $n \geq 2$  vorausgesetzt haben, ist, nach dem Hurewicz-Satz, die  $n$ -te Homotopiegruppe von  $X^n$  dasselbe wie

die  $n$ -te Homologiegruppe; diese wieder ist dasselbe (Berechnung über den zellulären Kettenkomplex) wie die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}[J_n]$ .

Es werden nun  $(n+1)$ -Zellen an  $X^n$  angeheftet: je eine  $(n+1)$ -Zelle für jedes Element der Menge  $J_{n+1}$ . Sei  $a$  ein solches Element.

Es gehört dazu ein erzeugendes Element,  $(+1)a$ , in  $\mathbb{Z}[J_{n+1}]$ ; und damit, über den Homomorphismus  $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[J_n]$ , ein Element in  $\mathbb{Z}[J_n]$ ; und damit auch, wegen der genannten Isomorphismen  $\mathbb{Z}[J_n] \approx H_n(X^n)$  und  $H_n(X^n) \approx \pi_n(X^n, x_0)$ , ein Element von  $\pi_n(X^n, x_0)$ .

Sei  $\alpha_a : (S^n, s_0) \rightarrow (X^n, x_0)$  irgendeine repräsentierende Abbildung für dieses Element. Wir benutzen  $\alpha_a$  als Anhefte-Abbildung für die durch  $a$  indizierte  $(n+1)$ -Zelle.

Sei  $X (= X^{n+1})$  der resultierende CW-Komplex. Wir rechnen seinen zellulären Kettenkomplex aus, um uns davon zu überzeugen, daß es der richtige ist. Bezeichne

$$\left( \coprod_{a \in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in J_{n+1}} S^n \right) \longrightarrow (X, X^n)$$

die charakteristische Abbildung der Gesamtheit der  $(n+1)$ -Zellen. Sei  $X'$  definiert als  $X$  ohne die Mittelpunkte der  $(n+1)$ -Zellen. Von den vier Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(X, X^n) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, X') \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{n+1}\left(\coprod_{a \in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in J_{n+1}} S^n\right) & \longrightarrow & H_{n+1}\left(\coprod_{a \in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in J_{n+1}} (D^{n+1}-0)\right) \end{array}$$

sind drei Isomorphismen (Inklusionen homotopie-äquivalenter Räume; Ausschneidungssatz für die rechte vertikale Abbildung), die vierte ist es folglich auch. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(X, X^n) & \longrightarrow & H_n(X^n, X^{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{n+1}\left(\coprod_{a \in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in J_{n+1}} S^n\right) & \longrightarrow & H_n\left(\coprod_{a \in J_{n+1}} S^n\right) \end{array}$$

ist also die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus. Die horizontale Abbildung unten ist es ebenfalls. Es folgt, daß die obere Zeile (d.h. der zelluläre Kettenkomplex von  $X$ , relativ zum Basispunkt) als eine isomorphe Re-Inkarnation die rechte Spalte hat: die nun ist, nach Konstruktion, durch die Abbildung  $\mathbb{Z}[J_{n+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[J_n]$  gegeben.

Aus dem CW-Komplex  $X$  bekommen wir, wie schon erwähnt, einen Eilenberg-MacLane-Raum  $K(A, n)$  durch die Konstruktion des  $n$ -Co-Skeletts; das heißt, indem wir Zellen der Dimensionen  $n+2, n+3, \dots$  anheften, um die Homotopiegruppen in den Dimensionen  $n+1, n+2, \dots$  zu Null zu machen. Soviel zur Existenz.

Die Eindeutigkeit (bis auf Homotopie) resultiert mit demselben Trick wie im vorigen Satz: Wenn  $K'(A, n)$  ein weiterer Eilenberg-MacLane-Raum ist, so konstruieren wir, durch Induktion über die Zellen, eine Abbildung  $K(A, n) \rightarrow K'(A, n)$ , die Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert ("aufpassen" müssen wir dabei nur bei den  $n$ -Zellen). Die Abbildung ist dann eine Homotopie-Äquivalenz nach dem Whitehead-Satz. Die Details für diesen Teil lassen wir weg.  $\square$



**Korollar.** *Jede Folge von Gruppen, mit der offensichtlichen Beschränkung (nämlich von Nummer 2 an sollen die Gruppen alle abelsch sein), kommt vor als die Folge der Homotopiegruppen eines Raumes.*

BEWEIS. Man nimmt einen Eilenberg-MacLane-Raum  $K(G_1, 1)$  zu der ersten vorgegebenen Gruppe, danach einen Eilenberg-MacLane-Raum  $K(A_2, 2)$  zu der zweiten vorgegebenen (abelschen!) Gruppe, und so weiter. Das Produkt all dieser Räume hat dann die behauptete Eigenschaft. — Wegen der Möglichkeit, zu einer CW-Approximation überzugehen, gibt es auch einen CW-Komplex mit derselben Eigenschaft.

Mit ein wenig mehr Mühe kann man die Verwendung des unendlichen Produktes an dieser Stelle vermeiden, wenn man das will:

Jeder der genannten Eilenberg-MacLane-Räume ist o.B.d.A. ein CW-Komplex. Nun ist das Produkt von zwei (oder endlich vielen) CW-Komplexen zwar im allgemeinen nicht wieder ein CW-Komplex (wenn man die Produkt-Topologie verwendet; die Faktoren werden ja i.a. nicht lokal-kompakt sein), man kann aber, wie wir wissen, durch eine Um-Topologisierung einen CW-Komplex daraus machen. Diese Prozedur ändert nicht den “schwachen Homotopie-Typ” (da die *endlichen* Unterkomplexe bei dem Um-Topologisieren ungeändert bleiben).

Das Produkt der ersten  $n$  Faktoren nun kann aufgefaßt werden als Unterraum von dem Produkt der ersten  $n+1$  Faktoren (man verwendet die Inklusion des ein-punktigen Raumes “Basispunkt” im letzten Faktor). Auf die Weise bekommt man ein aufsteigendes System von Räumen: es werden mehr und mehr Faktoren verwendet. Entsprechend viele der vorgegebenen Gruppen treten in den Räumen als Homotopiegruppen auf; und, beim Vereinigungs-Raum, schließlich alle.  $\square$

Wir werden nun die ganze Konstruktion (die von den Räumen mit vorgegebenen Homotopiegruppen) noch ein wenig modifizieren. Die Modifikation besteht darin, die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen explizit mit in die Betrachtung einzubeziehen. Wir werden danach dann in der Lage sein, das obige Beispiel noch einmal anzugeben, mit dieser Modifikation. Das Resultat davon kann man schlicht so umreißen: Es ist alles möglich.

Vorher soll aber noch ein konkretes Beispiel explizit beschrieben werden.

BEISPIEL. Wir nehmen eine 1-Sphäre  $S^1$  und eine 2-Sphäre  $S^2$ . Wir bilden die Ein-Punkt-Vereinigung dieser beiden,  $S^1 \vee S^2$ .

Die Fundamentalgruppe von  $S^1 \vee S^2$  ist dieselbe wie die von dem Unterraum  $S^1$ . Denn einerseits ist die Fundamentalgruppe von  $S^1$  ein Retrakt (da  $S^1$  Retrakt von  $S^1 \vee S^2$  ist), andererseits kann mehr auch nicht da sein (da nach dem zellulären Approximations-Satz alle Elemente der Fundamentalgruppe vom 1-Skelett herkommen).

Die Homologie (ganz-zahlige Koeffizienten) von  $S^1 \vee S^2$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$  in den Dimensionen 0, 1, 2, und ist Null sonst. Denn einerseits ist die Homologie von  $S^1$  ein Retrakt; und die von  $S^2$  auch. Andererseits kann es mehr nicht geben (der zelluläre

Kettenkomplex für die ‘offensichtliche’ Zellenstruktur hat nur je ein Erzeugendes in den Dimensionen 0, 1 und 2).

Die zweite Homotopiegruppe von  $S^1 \vee S^2$  bestimmt sich unter Hinzuziehung von  $\text{Univ}(S^1 \vee S^2)$ , der universellen Überlagerung. Es ist  $\pi_2 \text{Univ}(S^1 \vee S^2) \approx \pi_2(S^1 \vee S^2)$  (die höheren Homotopiegruppen sind bei einer Überlagerung dieselben wie bei dem Raum auch) und es ist  $\pi_2 \text{Univ}(S^1 \vee S^2) \approx H_2 \text{Univ}(S^1 \vee S^2)$  (nach dem Hurewicz-Satz; die universelle Überlagerung ist ja einfach-zusammenhängend).

Die universelle Überlagerung von  $S^1$  ist  $\mathbb{R}$  (wo das Urbild des Basispunktes von  $S^1$  durch die Teilmenge  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  gegeben sein soll). Man bekommt hieraus eine (oder “die”) universelle Überlagerung von  $S^1 \vee S^2$ , indem man an jeden Punkt im Urbild des Basispunktes ein Exemplar  $S^2$  anheftet. Das Resultat der Konstruktion kann man sich vorstellen als eine lange Schnur mit einer Reihe von daran hängenden Lampions,

$$\mathbb{R} \cup_{\mathbb{Z} \times \{s_0\}} \mathbb{Z} \times S^2 .$$

Die Decktransformationengruppe (isomorph zur Fundamentalgruppe; und damit zu  $\mathbb{Z}$ ) operiert durch *Translation*; auf den “Lampions” ist die Operation *einfach-transitiv*.

Der zelluläre Kettenkomplex (relativ zu dem kontrahierbaren Unterraum  $\mathbb{R}$ ) ist trivial außerhalb Dimension 2. In Dimension 2 gibt es unendlich viele Erzeugende. Die Kettengruppe (und damit auch die zweite Homologiegruppe) ist also die direkte Summe von unendlich vielen Exemplaren  $\mathbb{Z}$ .

Über die Operation der Decktransformationengruppe wird die zweite Homologiegruppe zu einem *Modul* über dem ganz-zahligen Gruppenring dieser Gruppe; die zweite Homotopiegruppe damit auch (Natürlichkeit der Hurewicz-Abbildung bezüglich Decktransformationen). Die Modul-Struktur “oben” (in der universellen Überlagerung) entspricht, wie wir wissen, der Modulstruktur “unten”: der Struktur von  $\pi_2$  als Modul über  $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^2)]$ , dem Gruppenring der Fundamentalgruppe.

Die erwähnte Tatsache, daß die Decktransformationengruppe einfach-transitiv auf der Menge der Erzeugenden operiert, übersetzt sich hier nun darin, daß der fragliche Modul der freie Modul vom Rang 1 ist.  $\square$

Die in diesem Beispiel beschriebenen Phänomene werden nun ein wenig fortgeführt. Das liefert die wesentlichen Dinge im Beweis des folgenden Satzes:

**Satz.** Sei  $G$  Gruppe; sei  $A$  abelsche Gruppe, versehen mit einer Operation von  $G$ . Sei  $n > 1$ . Es gibt einen weg-zusammenhängenden Raum  $Z$  mit

- $G$  als Fundamentalgruppe,
- $A$  als  $n$ -ter Homotopiegruppe,
- trivialen Homotopiegruppen sonst,

wobei  $\pi_1(Z, z_0) = G$  auf  $\pi_n(Z, z_0) = A$  in der vorgegebenen Weise operiert.

Ferner gibt es einen solchen Raum  $Z$  derart, daß der Eilenberg-MacLane-Raum  $K(G, 1)$  davon ein Retrakt ist.

BEWEIS. Es gibt i.a. viele solche Räume  $Z$  (was wir hier nicht beweisen). Unsere Konstruktion ist speziell, und sie liefert automatisch die zum Schluß genannte Eigenschaft (daß  $K(G, 1)$  Retrakt ist). Es ist richtig, aber auch das werden wir hier nicht beweisen, daß die Konstruktion bis auf Homotopie dadurch eindeutig charakterisiert ist (das Argument ist ähnlich zu dem oben gegebenen für die Eindeutigkeit von  $K(G, 1)$ ).

Der Raum  $Z$  wird konstruiert durch das Anheften von Zellen der Dimensionen  $n$  und  $n+1$  an einen Eilenberg-MacLane-Raum  $K(G, 1)$ , um auf diese Weise die vorgegebene  $n$ -te Homotopiegruppe zu realisieren; danach werden weitere Zellen angeheftet, um die höheren Homotopiegruppen zu Null zu machen (Konstruktion des  $n$ -Co-Skeletts).

Sei, abkürzend,  $X = K(G, 1)$ ; ein Raum mit Basispunkt  $x_0$ .

Ein Raum  $Y$  sei aus  $X$  erhalten durch Anheften von  $n$ -Zellen, und zwar *triviales Anheften am Basispunkt*. Es ist in dem Fall  $X$  Retrakt von  $Y$  (die Retraktion bildet die neuen Zellen in den Basispunkt von  $X$  ab). Und die Inklusion  $X \rightarrow Y$  induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen. Denn einmal ist die Fundamentalgruppe von  $X$  Retrakt von der von  $Y$ ; und zum andern induziert die Inklusion  $X \rightarrow Y$  eine *Surjektion* auf der Fundamentalgruppe (nach dem zellulären Approximations-Satz; da, nach Voraussetzung,  $n \geq 2$ ).

Weiter sei ein Raum  $Y'$  aus  $Y$  erhalten durch das Anheften von  $(n+1)$ -Zellen. Es ist dann immer noch richtig, daß  $X$  Retrakt ist. Denn für jede der neuen Zellen von  $Y'$  ist es so, daß die Anhefte-Abbildung, gefolgt von der Retraktion  $Y \rightarrow X$ , eine Abbildung  $S^n \rightarrow X$  ist; diese Abbildung ist null-homotop (da  $X$  Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist, aber andererseits  $n > 1$ ), also läßt die Abbildung sich auf die Zelle fortsetzen. Die Inklusion  $X \rightarrow Y'$  induziert ebenfalls einen Isomorphismus auf der Fundamentalgruppe.

Die universelle Überlagerung  $\tilde{Y}'$  von  $Y'$  kann, wie wir wissen, so beschrieben werden: ein Punkt von  $\tilde{Y}'$  entspricht einem Paar von Daten in  $Y'$ , bestehend aus

- einem Punkt  $y$  in  $Y'$ ;
- einer Homotopieklasse (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen von dem Basispunkt  $x_0$  zu dem Punkt  $y$ .

Die universelle Überlagerung  $\tilde{Y}$  von  $Y$  hat die analoge Beschreibung. Wegen der Tatsache, daß die Abbildung  $\pi_1(Y, x_0) \rightarrow \pi_1(Y', x_0)$  ein Isomorphismus ist, spielt es für einen in  $Y$  liegenden Punkt  $y$  nun keine Rolle, ob man "Homotopieklasse von Wegen von  $x_0$  zu  $y$ " interpretiert als "Weg in  $Y$ " oder aber als "Weg in  $Y'$ ". Das hat die für uns sehr interessante Konsequenz, daß wir die folgenden beiden Räume miteinander identifizieren können: die universelle Überlagerung  $\tilde{Y}$  von  $Y$  einerseits und den Unterraum von  $\tilde{Y}'$  andererseits, der gegeben ist durch das Urbild von  $Y \subset Y'$ .

Ebenso können wir auch die universelle Überlagerung  $\tilde{X}$  von  $X$  identifizieren mit dem Unterraum von  $\tilde{Y}$  (oder von  $\tilde{Y}'$ ), der über  $X$  liegt.

Bezeichne  $J_n$  die Indexmenge für die  $n$ -Zellen von  $Y - X$ ; und  $J_{n+1}$  diejenige für die  $(n+1)$ -Zellen von  $Y' - Y$ . Aus der Zellenstruktur

$$Y = X \cup_{J_n \times \partial D^n} J_n \times D^n \quad \text{bzw.} \quad Y' = Y \cup_{J_{n+1} \times \partial D^{n+1}} J_{n+1} \times D^{n+1}$$

ergibt sich, per "Pullback", eine Zellenstruktur in der universellen Überlagerung,

$$\tilde{Y} = \tilde{X} \cup_{\tilde{J}_n \times \partial D^n} \tilde{J}_n \times D^n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{Y}' = \tilde{Y} \cup_{\tilde{J}_{n+1} \times \partial D^{n+1}} \tilde{J}_{n+1} \times D^{n+1} .$$

Diese Zellenstrukturen sind kompatibel mit der Operation der *Decktransformationen-*gruppe (die wir mit der Gruppe  $G$  identifizieren). Insbesondere sind somit auch die Indexmengen  $\tilde{J}_n$  und  $\tilde{J}_{n+1}$  mit einer Operation der Gruppe  $G$  versehen.

Über diese Operation kann man etwas sagen. Nämlich für jede der Zellen von  $Y' - X$  bilden die darüber liegenden Zellen von  $\tilde{Y}' - \tilde{X}$  bezüglich der Operation eine *einfach-transitive*  $G$ -Menge. Es ist andererseits von den Urbildern aber keines vor den andern ausgezeichnet. Man kann das so ausdrücken: Es gibt Isomorphismen von  $G$ -Mengen,

$$\tilde{J}_n \approx G \times J_n \quad \text{und} \quad \tilde{J}_{n+1} \approx G \times J_{n+1} ,$$

aber diese Isomorphismen sind nicht kanonisch. Eine Auswahl würde darauf hinauslaufen, daß man für jede der Zellen aus  $Y' - X$  jeweils einem von deren Urbildern eine ausgezeichnete Rolle zuweist.

Als universelle Überlagerung eines Eilenberg-MacLane-Raumes für die Dimension 1 ist  $\tilde{X}$  ein kontrahierbarer Raum. Aus diesem Raum entsteht  $\tilde{Y}'$  durch das Anheften von  $n$ -Zellen und  $(n+1)$ -Zellen. Also ist  $\tilde{Y}'$   $(n-1)$ -zusammenhängend; insbesondere ist  $\tilde{Y}'$  deshalb auch *einfach-zusammenhängend*, da  $n \geq 2$  (alternativ:  $\tilde{Y}'$  ist einfach-zusammenhängend, da es selbst eine universelle Überlagerung, nämlich von  $Y'$ , ist).

Sei  $\tilde{x}_0$  ein Basispunkt über  $x_0$ . Wegen des einfachen Zusammenhangs von  $\tilde{Y}'$  hängt die Homotopiegruppe  $\pi_n(\tilde{Y}', \tilde{x}_0)$  nicht wirklich von dem Basispunkt ab: für je zwei Basispunkte sind die Homotopiegruppen zueinander *kanonisch* isomorph.

Es resultiert eine Operation der Decktransformationengruppe auf  $\pi_n(\tilde{Y}', \tilde{x}_0)$ . Unter dem Isomorphismus  $\pi_n(\tilde{Y}', \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(Y', x_0)$  entspricht diese Operation, wie wir wissen, der Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(Y', x_0)$  auf der Homotopiegruppe  $\pi_n(Y', x_0)$ .

Andererseits ist die Hurewicz-Abbildung  $\pi_n(\tilde{Y}', \tilde{x}_0) \rightarrow H_n(\tilde{Y}')$  verträglich mit der Operation der Decktransformationengruppe (Natürlichkeit der Hurewicz-Abbildung). Wegen des  $(n-1)$ -Zusammenhangs von  $\tilde{Y}'$  ist die Hurewicz-Abbildung in diesem Fall auch ein Isomorphismus. Insgesamt ist sie somit also ein Isomorphismus von  $R$ -Moduln, wenn

$$R = \mathbb{Z}[G]$$

den ganz-zahligen Gruppenring von  $G$  bezeichnet.

Der zelluläre Kettenkomplex von  $\tilde{Y}'$ , relativ zu dem kontrahierbaren Unterraum  $\tilde{X}$ , ist nicht-trivial nur in den Dimensionen  $n$  und  $n+1$ ; er reduziert sich auf zwei Kettengruppen und eine Rand-Abbildung zwischen diesen beiden,

$$\mathbb{Z}[\tilde{J}_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\tilde{J}_n] .$$

Vermöge der Operation der Decktransformationengruppe ist dies eine Abbildung von  $R$ -Moduln (wo wieder  $R = \mathbb{Z}[G]$ ). Der Modul  $\mathbb{Z}[\tilde{J}_n]$  ist ein freier  $R$ -Modul. Nämlich über den obigen (nicht-kanonischen) Isomorphismus von  $G$ -Mengen  $\tilde{J}_n \approx G \times J_n$  bekommt man (per “Linearisierung”) einen Isomorphismus von  $R$ -Moduln

$$\mathbb{Z}[\tilde{J}_n] \approx R[J_n] ,$$

wo  $R[J_n]$  den freien  $R$ -Modul mit der Basis  $J_n$  bezeichnet. Ebenso ist auch  $\mathbb{Z}[\tilde{J}_{n+1}]$  ein freier  $R$ -Modul, isomorph zu  $R[J_{n+1}]$ . — Die Wahl der Basen ist hier un-kanonisch insofern als sie darauf hinausläuft, daß man für jedes Element von  $J_n$  bzw. von  $J_{n+1}$  eine *Auswahl* treffen muß; nämlich für die dadurch indizierte Zelle muß man von deren Urbildern in der universellen Überlagerung eines auswählen (was, natürlich, nicht weiter schwierig ist).

Die  $n$ -te Homologiegruppe von  $\tilde{Y}'$ , als  $G$ -Modul, und damit letztlich auch die  $n$ -te Homotopiegruppe als Modul über dem Gruppenring der Fundamentalgruppe, ist gegeben durch den Kokern der Abbildung  $R[J_{n+1}] \rightarrow R[J_n]$ .

Wenn umgekehrt  $A$  nun ein vorgegebener  $R$ -Modul ist, so gibt es einen freien  $R$ -Modul  $R[J_n]$  und eine surjektive Abbildung

$$R[J_n] \longrightarrow A ;$$

und, weiter, einen freien  $R$ -Modul  $R[J_{n+1}]$  und eine surjektive Abbildung

$$R[J_{n+1}] \longrightarrow \text{Kern}(R[J_n] \rightarrow A) .$$

Insgesamt kann man deshalb den vorgegebenen Modul  $A$  realisieren als den Kokern von einer Abbildung von freien  $R$ -Moduln,

$$R[J_{n+1}] \longrightarrow R[J_n] .$$

(Im allgemeinen wird es hier allerdings nicht möglich sein, diese Abbildung als *injektive* Abbildung zu wählen. Die Möglichkeit, das zu tun, macht [mehr oder weniger nach Definition] den Begriff der “homologischen Dimension 1” aus.)

Es bleibt nachzuprüfen, daß jede Abbildung vorkommen kann als zellulärer Kettenkomplex in der beschriebenen Weise. Sei also eine solche Abbildung gegeben. Indem wir hinreichend viele  $n$ -Zellen trivial an den Basispunkt anheften (je eine für jedes Element von  $J_n$ ), konstruieren wir den Raum  $Y$  als das  $n$ -Skelett des gewünschten Raumes. Zu den  $(n+1)$ -Zellen nun, sei  $a \in J_{n+1}$ .

Dem Element  $a$  entspricht ein Erzeugendes  $(+1)a$  in dem Modul  $R[J_{n+1}]$  und damit, über die Abbildung, ein Element in dem Modul  $R[J_n]$ . Dieser Modul ist isomorph zu  $H_n(\tilde{Y})$ ; damit zu  $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{x}_0)$ ; und damit schließlich auch zu  $\pi_n(Y, x_0)$ . Das Element von  $\pi_n(Y, x_0)$ , das wir uns auf diese Weise verschafft haben, benutzen wir zum Anheften der  $(n+1)$ -Zelle, die dem Element  $a \in J_{n+1}$  entspricht.

Es bleibt nachzuprüfen, daß der so konstruierte Raum  $Y'$  die vorgegebene Abbildung  $R[J_{n+1}] \rightarrow R[J_n]$  als zellulären Kettenkomplex (relativ zu  $\tilde{X}$ ) hat. Diese Nachprüfung haben wir früher gemacht (als die Fundamentalgruppe noch nicht beteiligt war). Das dort betrachtete Diagramm funktioniert hier aber auch:

Sei  $Y'$  ( $= Y^{n+1}$ ) der konstruierte CW-Komplex, mit  $n$ -Skelett  $Y$  ( $= Y^n$ ).  
 Bezeichne

$$\left( \coprod_{a \in J_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in J_{n+1}} S^n \right) \longrightarrow (Y', Y)$$

die charakteristische Abbildung für die Gesamtheit der  $(n+1)$ -Zellen. Darüber, in der universellen Überlagerung, haben wir dann die (induzierte) charakteristische Abbildung

$$\left( \coprod_{a \in \tilde{J}_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in \tilde{J}_{n+1}} S^n \right) \longrightarrow (\tilde{Y}', \tilde{Y}) .$$

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\tilde{Y}'^{n+1}, \tilde{Y}'^n) & \longrightarrow & H_n(\tilde{Y}'^n, \tilde{Y}'^{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{n+1}\left(\coprod_{a \in \tilde{J}_{n+1}} D^{n+1}, \coprod_{a \in \tilde{J}_{n+1}} S^n\right) & \longrightarrow & H_n\left(\coprod_{a \in \tilde{J}_{n+1}} S^n\right) \end{array}$$

ist nun, wie früher auch, die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus; und die horizontale Abbildung unten ebenfalls. Folglich ist die obere Zeile (der zelluläre Kettenkomplex von  $\tilde{Y}'$ , relativ zu dem Unterraum  $\tilde{X}$ ) isomorph zu der rechten Spalte; und die ist, nach Konstruktion, durch die Abbildung  $\mathbb{Z}[\tilde{J}_{n+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{J}_n]$  gegeben oder, was bis auf Isomorphie dasselbe ist,  $R[J_{n+1}] \rightarrow R[J_n]$ .

Aus dem Raum  $Y'$  bekommen wir, wie schon früher gesagt, den gewünschten Raum  $Z$  durch die Konstruktion des  $n$ -Co-Skeletts; das heißt, indem wir Zellen der Dimensionen  $n+2$ ,  $n+3$ , usw. anheften, um dadurch die Homotopiegruppen in den Dimensionen  $n+1$ ,  $n+2$ , usw. zu Null zu machen. Bei jeder dieser Anheftungen läßt sich die Retraktion in den Raum  $X$  erweitern, da eben  $X$  ein Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist.  $\square$

**Satz.** *Es sei  $G$  eine Gruppe; und  $A_2, A_3, \dots$  eine Folge von abelschen Gruppen, deren jede mit einer  $G$ -Aktion versehen ist. Es gibt einen Raum  $W$  mit  $\pi_1(W, w_0) = G$  und, für  $k \geq 2$ ,  $\pi_k(W, w_0) = A_k$  (als abelsche Gruppe mit  $G$ -Aktion).*

BEWEIS.  $W$  wird definiert als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Räumen  $W_n$ , wobei der Raum  $W_n$  die vorgegebenen Homotopiegruppen bis zur Nummer  $n$  (einschließlich) realisiert. Der Anfang der Folge ist  $W_1 = X = K(G, 1)$ . Für  $n \geq 2$  wird  $W_n$  induktiv definiert als die *induzierte Faserung* in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W_n & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{n-1} & \longrightarrow & X \end{array}$$

wo  $Z$  der Raum aus dem vorigen Satz ist, zu  $G$  und  $A_n$ ; und  $Z'$  ein dazu homotopieäquivalenter Raum, der Faserung über  $X$  ist. Da  $X$  Retrakt von  $Z$  ist (und daher auch von  $Z'$ ), folgt, daß auch  $W_{n-1}$  Retrakt von  $W_n$  ist; das gibt die erforderliche Inklusion  $W_{n-1} \rightarrow W_n$ . Die anderen Nachprüfungen lassen wir weg.  $\square$

## Mannigfaltigkeiten, Poincaré-Vermutung

Unter den topologischen Räumen interessiert man sich vor allem für die *Mannigfaltigkeiten*, und da in erster Linie für die *kompakten*. Folgende Terminologie hat sich eingebürgert: Eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* bezeichnet eine solche, die nicht nur kompakt ist, sondern auch unberandet (z.B. ist die  $n$ -Sphäre  $S^n$  geschlossen, aber der  $n$ -Ball  $D^n$  ist es nicht); eine *berandete Mannigfaltigkeit* ist eine solche, die einen Rand hat (der aber möglicherweise auch leer sein kann!). Diese Terminologie ist nicht ganz so blödsinnig, wie es scheinen mag: wenn man von geschlossenen Mannigfaltigkeiten redet, so trifft man damit sozusagen die Verabredung, daß Ränder grundsätzlich nicht da sein sollen; wenn man von berandeten Mannigfaltigkeiten redet, so annonciert man damit eine größere Flexibilität in dieser Hinsicht. (Im übrigen hat natürlich das Wort “geschlossen” in diesem Zusammenhang nichts zu tun mit “abgeschlossenen Mengen” im Sinne einer topologischen Struktur.)

Die 2-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind vermutlich seit dem Altertum bekannt. Es gibt zwei Serien, die orientierbaren und die nicht-orientierbaren.

Die Liste der orientierbaren geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten ist: Sphäre, Torus (oder “Fläche vom Geschlecht 1” oder “Sphäre mit 1 Henkel”), Brezelfläche (oder “Fläche vom Geschlecht 2” oder “Sphäre mit 2 Henkeln”), und so weiter. Die Liste läßt sich ein wenig systematisieren mit dem Begriff der *zusammenhängenden Summe* von Mannigfaltigkeiten (die zusammenhängende Summe von zwei Mannigfaltigkeiten resultiert, indem man in beiden jeweils einen eingebetteten Ball wählt, von diesen Bällen das Innere entfernt; und die beiden ‘Rest’-Mannigfaltigkeiten dann an ihren Rändern zusammenklebt). Die Fläche vom Geschlecht  $n$  läßt sich beschreiben als die zusammenhängende Summe von  $n$  Flächen vom Geschlecht 1.

Die Liste der nicht-orientierbaren geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten ist: projektive Ebene (oder “Sphäre mit 1 Kreuzhaube”), Klein’sche Flasche (oder “Sphäre mit 2 Kreuzhauben”), und so weiter. Eine nicht-orientierbare geschlossene 2-Mannigfaltigkeit kann nicht “physikalisch” realisiert werden (d.h. als Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ ). Das beste, was man machen kann, ist gewisse nicht-injektive Abbildungen in den  $\mathbb{R}^3$  anzugeben, bei denen man so gut es geht die Singularitäten kontrolliert. Z.B. für die Klein’sche Flasche gibt es zwei sehr hübsche Immersionen in den  $\mathbb{R}^3$  (mit jeweils einer einzigen Doppelkurve). Für die projektive Ebene existiert auch eine Immersion, aber die ist ziemlich kompliziert (die sogenannte Boy’sche Fläche). Eine andere Darstellung der projektiven Ebene ist einfacher zu beschreiben, sie hat allerdings das Manko einer *lokalen* Singularität; das ist die schon erwähnte *Kreuzhaube*. Die  $n$ -te Fläche in der Serie läßt sich darstellen als die zusammenhängende Summe von  $n$  projektiven Ebenen.

Die Homologie von geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten läßt sich (ziemlich leicht) ausrechnen; z.B. indem man sich eine Zellenstruktur überlegt. Als Resultat der Berechnung bekommt man, daß die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten schon durch ihre Homologie voneinander unterscheidbar sind.

Als Poincaré die Homologiegruppen erfunden hatte, sah er, daß sie gut waren. Er glaubte, daß er damit nun *alle* Mannigfaltigkeiten voneinander unterscheiden könnte.

Das glaubte er allerdings nur kurze Zeit. Er stellte fest, daß schon in der nächsten Dimension, 3, ein Malheur passiert. Unter den geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten gibt es nämlich solche, die *Homologie-Sphären* sind (d.h. dieselben Homologiegruppen haben wie die Sphäre dieser Dimension), *ohne* aber zu der Sphäre auch topologisch äquivalent zu sein.

Poincaré beschrieb eine solche 3-Mannigfaltigkeit. Die Art, wie er sie beschrieb, ist für sich äußerst interessant. Wir wollen uns hier aber nicht darum kümmern. Zum Nachweis dessen, daß die Mannigfaltigkeit nicht zur Sphäre topologisch äquivalent ist, benötigte Poincaré eine neue topologische Invariante. So erfand er die Fundamentalgruppe.

Das von Poincaré beschriebene Beispiel hat als Fundamentalgruppe eine Gruppe, die durch zwei Erzeugende und zwei Relationen beschreibbar ist:

$$\{ x, y ; x^5 = (xy)^2 = y^3 \}$$

Dies ist eine *endliche* Gruppe, ihre Ordnung ist 120. (Es ist bekannt, daß dies die einzige endliche Gruppe ist, die Fundamentalgruppe einer Homologie-3-Sphäre sein kann.) An dem Beispiel selbst ist ansonsten wenig exotisches. Der Raum hat als universelle Überlagerung die 3-Sphäre. Er wird als der *Dodekaeder-Raum* bezeichnet; seine Fundamentalgruppe (oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Automorphismengruppe der 3-Sphäre, die durch die Decktransformationengruppe gegeben ist) als die "binäre Ikosaedergruppe". Die Namensgebung hat mit geometrischen Figuren zu tun, die zu der Symmetriegruppe passen. Zur Beschreibung des Raumes gibt es ein "physikalisches Modell" (das Modell existiert in der hiesigen Fakultät). Bei dem Modell handelt sich um die Projektion eines 4-dimensionalen Polyeders in den 3-dimensionalen Raum. Das fragliche Polyeder (oder vielmehr sein Rand) ist eine Polyeder-Unterteilung der 3-Sphäre im  $\mathbb{R}^4$ ; diese ist so gemacht, daß die Decktransformationengruppe darauf operiert.

Im Anschluß an die Beschreibung des Beispiels stellte Poincaré eine naheliegende Frage: Wenn unter den geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten die 3-Sphäre schon nicht durch ihre Homologie allein gekennzeichnet ist, wie ist es dann, wenn man die Fundamentalgruppe zu den Daten noch hinzunimmt?

Man weiß nicht, ob Poincaré selbst die eine oder die andere Antwort auf diese Frage favorisiert hat; jedenfalls hat er sich in seinen Schriften dazu nicht weiter geäußert,



geschweige denn festgelegt. In der Folge sind die Leute aber stillschweigend dazu übergegangen, Poincaré eine bestimmte Erwartung zu unterstellen. Die Frage ist demgemäß nicht bekannt als die “Poincaré-Frage” (wie es eigentlich richtig wäre), sondern als die “Poincaré-Vermutung”.

Auf Grund von allgemeinen Dingen der Topologie kann man die Sache noch ein wenig umformulieren. Man hat nämlich den folgenden Sachverhalt:

**Satz.** Sei  $M$  eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Es sind äquivalent:

- (1)  $M$  ist homotopie-äquivalent zur 3-Sphäre,
- (2) die Fundamentalgruppe und die Homologiegruppen von  $M$  sind dieselben wie die von der 3-Sphäre,
- (3)  $M$  ist einfach-zusammenhängend.

BEWEIS (Skizze). Die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2) ist klar (Fundamentalgruppe und Homologiegruppen hängen nur vom Homotopietyp ab); die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (3) ist es auch (die 3-Sphäre hat triviale Fundamentalgruppe). Für die Implikation (3)  $\Rightarrow$  (1) wird etliches von dem Apparat der algebraischen Topologie benötigt.

Zunächst (nach Poincaré oder, wenn man so will, nach einem speziellen Fall des Hurewicz-Satzes) ist die erste Homologiegruppe von  $M$  isomorph zur abelsch gemachten Fundamentalgruppe. Da die Fundamentalgruppe von  $M$  nach Voraussetzung trivial ist, folgt, daß die Homologiegruppe  $H_1(M)$  ebenfalls trivial ist.

Die Trivialität der Fundamentalgruppe impliziert auch, daß die Mannigfaltigkeit  $M$  orientierbar ist. — Denn die Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$  kann man mit Hilfe der sogenannten *Orientierungs-Überlagerung* beschreiben: An jedem Punkt  $x$  der unberandeten  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  hat man zwei *lokale Orientierungen*; nämlich die beiden erzeugenden Elemente  $\pm 1$  in der abelschen Gruppe  $H_n(M, M - \{x\}) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx \mathbb{Z}$ . Diese beiden Elemente variieren in lokal-trivialer Weise mit dem Punkt  $x$ ; man hat also eine Überlagerung. Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit nun bedeutet, daß diese Überlagerung einen *Schnitt* besitzt; was offenbar in dem vorliegenden Fall einer zweiblättrigen Überlagerung darauf hinausläuft, daß die Überlagerung *trivial* ist (d.h. isomorph zum Produkt von  $M$  mit einer zwei-elementigen Menge). Die Nicht-Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit bedeutet demgemäß, daß die Überlagerung nicht-trivial ist. Insbesondere bedeutet sie die *Existenz* einer nicht-trivialen Überlagerung. Wegen der Klassifikation von zusammenhängenden Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe garantiert das, daß die Fundamentalgruppe nicht trivial sein *kann*.

Wir können nun auf die sogenannte *Poincaré-Dualität* verweisen (die wir, ebenso wie die Behandlung der *Kohomologiegruppen*, nicht gemacht haben — wenn wir das auch ohne Schwierigkeit bei etwas mehr Zeit hätten tun können). Im Fall einer orientierbaren<sup>1</sup> geschlossenen  $n$ -Mannigfaltigkeit sagt die Poincaré-Dualität, daß die Gruppe  $H_i(M)$  kanonisch isomorph ist zu einer bestimmten anderen Gruppe: die Dimension  $i$  wird

<sup>1</sup>genauer: *orientierten*, d.h. orientierbar und mit einer bestimmten Orientierung versehen

ersetzt durch die komplementäre Dimension  $n-i$ , und “Homologie” wird ersetzt durch “Kohomologie”; der Isomorphismus sagt also  $H_i(M) \cong H^{n-i}(M)$ . Die Kohomologie nun kann ihrerseits wieder durch Homologie ausgedrückt werden; das sagt der sogenannte *Universelle-Koeffizienten-Satz*.

Im vorliegenden Fall bekommen wir auf die Weise aus  $H_1(M) = 0$  (s. oben), daß

$$H_2(M) \approx H^1(M) \approx \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) = 0 ,$$

und aus  $H_0(M) \approx \mathbb{Z}$  (da  $M$  weg-zusammenhängend ist), daß

$$H_3(M) \approx H^0(M) \approx \text{Hom}(H_0(M), \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} .$$

Da nach Voraussetzung  $M$  einfach-zusammenhängend ist, können wir folglich den Hurewicz-Satz anwenden, um zu schließen, daß  $\pi_3(M) \approx H_3(M) \approx \mathbb{Z}$  (Basispunkte lassen wir in der Notation hier weg). Sei  $S^3 \rightarrow M$  eine Abbildung, die ein erzeugendes Element der Gruppe repräsentiert. Die Abbildung induziert dann einen Isomorphismus  $H_3(S^3) \rightarrow H_3(M)$ . Nun sind die Homologiegruppen oberhalb Nummer 3 (der Dimension) alle null; und die mit den Nummern 1 und 2 sind es auch. Es folgt, daß die Abbildung einen Isomorphismus *sämtlicher* Homologiegruppen induziert. Nach dem Whitehead-Satz ist die Abbildung  $S^3 \rightarrow M$  deshalb eine Homotopie-Äquivalenz. (Wir benutzen hier die Version des Whitehead-Satzes mit den *Homologie*-Gruppen, die man im einfach-zusammenhängenden Fall ja hat.)  $\square$

Mit dem Satz bekommt man die folgende Formulierung von Poincaré’s Frage:

**Frage** (Poincaré-Vermutung). *Sei  $M$  eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, die zu  $S^3$  homotopie-äquivalent ist. Ist  $M$  zu  $S^3$  dann auch topologisch äquivalent?*

Über die Frage weiß man heutzutage auch kaum mehr als Poincaré vor nun fast hundert Jahren. Es ist nicht so, daß nicht versucht worden wäre, daran etwas zu ändern. Einzelne Leute haben Jahre (oder gar Jahrzehnte) ihrer Arbeitskraft auf das Problem verwendet. Aber es ist bisher nichts dabei herausgekommen, was so aussieht, als hätte es das Problem einer Lösung nähergebracht.

Natürlich hat andererseits die Arbeit an diesem Problem (wie bei anderen schwierigen Problemen auch) eine Menge “spin-off” hervorgebracht; also so etwas wie beschichtete Bratpfannen als Nebenprodukt der Weltraumfahrt.

In den dreißiger Jahren hatte WHITEHEAD irgendwann die Poincaré-Vermutung bewiesen und, dummerweise, auch publiziert. Der dumme Teil dabei war, daß der Beweis nicht stimmte. Es war sogar so, daß die von Whitehead publizierte Version des *Satzes* nicht stimmte: der behauptete Satz war nachweislich falsch (wie Whitehead selber herausfand und, in der Folge, befriedigend klärte). [ Der falsche Satz sagt, daß  $\mathbb{R}^3$  unter den 3-Mannigfaltigkeiten durch seinen Homotopietyp charakterisiert ist. Für diesen “Satz” gibt es sehr viele, und relativ leicht verstehbare, Gegenbeispiele. Der Witz ist, daß es bei nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten so etwas wie einen “Rand” oder “unendlich-fernen Teil” gibt. Und, wenn man nicht explizit verlangt, daß dieser, bis auf Homotopie, *genau so aussieht wie bei  $\mathbb{R}^3$  auch*, so muß eben das nicht stimmen. Diese Sache mußte damals erst gelernt werden. ]

Man kann darüber spekulieren, ob Whitehead aufgrund dieser unangenehmen Erfahrung in der Folge vielleicht eine besondere Anstrengung unternommen hat, um die Poincaré-Vermutung doch noch zu beweisen. In den publizierten Arbeiten hat sich davon nichts (jedenfalls nicht direkt) niedergeschlagen. Man kann dort aber etliche sehr raffinierte (und sehr schwierige) Dinge finden, die so aussehen, als wären sie bei solcher Aktivität als Nebenprodukt entstanden. Dazu gehört eine Analyse dessen, was "Homotopie-Äquivalenzen" letztlich sein können. [ Bei dieser Aktivität entstanden die CW-Komplexe; und der Whitehead-Satz. Die "einfachen Homotopie-Äquivalenzen" kommen auch daher und damit, zumindest teilweise, die "Whitehead-Torsion". ]

In den späten fünfziger Jahren hat SMALE versucht (oder möglicherweise versucht), die Poincaré-Vermutung zu beweisen. Er hat jedenfalls eine Entdeckung gemacht, die man auf die folgende verblüffende Weise formulieren kann; und die, naturgemäß, damals auch großes Aufsehen erregt hat. Er fand, daß die Schwierigkeiten mit der Poincaré-Vermutung sozusagen von selbst verschwinden, wenn man das Problem durch ein "schwierigeres" ersetzt, nämlich durch sein höher-dimensionales Analogon. Nämlich auf die Frage ("höher-dimensionale Poincaré-Vermutung"):

**Frage.** Sei  $M$  eine Homotopie- $n$ -Sphäre (d.h. eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit, die zu  $S^n$  homotopie-äquivalent ist). Ist  $M$  zu  $S^n$  topologisch äquivalent?

konnte er die Antwort geben:

**Ja**, wenn  $n \geq 5$  und wenn  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Vorsicht! Hier ist als Hypothese vorausgesetzt, daß  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Die Schlußfolgerung sagt aber nur, daß  $M$  als *topologische* (nicht notwendigerweise dagegen als *differenzierbare*) Mannigfaltigkeit zur Sphäre äquivalent ist.

BEMERKUNG. Dies ist nicht Pedanterie. Hier ist ein weiteres überraschendes Phänomen angesprochen, das ebenfalls in den fünfziger Jahren entdeckt wurde (durch MILNOR): es gibt geschlossene differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeiten  $M$  (für gewisse Dimensionen  $n$ ) mit der Eigenschaft, daß  $M$  zwar zur  $n$ -Sphäre topologisch äquivalent ist; aber nicht dazu äquivalent als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein solches  $M$  wird auch als eine *exotische differenzierbare Struktur* auf der  $n$ -Sphäre bezeichnet; oder, kurz, als eine *exotische Sphäre*. Es gibt z.B. exotische Sphären in der Dimension 7. [ Es ist bekannt, daß es in jeder Dimension nur *endlich viele* differenzierbare Strukturen auf der Sphäre gibt; z.B. 28 in der Dimension 7. Solche Dinge auszurechnen, erfordert sehr viel an Apparat. Das unkommentierte Mitteilen der Ergebnisse hat wohl eher einen erheiternden Effekt. So sind die entsprechenden Anzahlen in den Dimensionen 8 bis 18 der Reihe nach gegeben durch die Zahlen: 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256, 2, 16, 16. ]

BEMERKUNG. Nachdem durch Smale's Resultate das Eis gebrochen war, wurden andere Beweise für Varianten der Ergebnisse gefunden; unter anderem auch ein Beweis für die höher-dimensionale Poincaré-Vermutung für topologische Mannigfaltigkeiten.

BEMERKUNG. Die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit gibt die Möglichkeit, Techniken der Analysis zu verwenden (Satz von Sard, Implizite-Funktionen-Satz). Auf die Weise war Smale in der Lage, so etwas wie eine Zellen-Struktur ins Spiel bringen. Die Grundidee dafür ist ähnlich wie bei den CW-Komplexen insofern, als man in der Lage sein möchte, bei einer anstehenden Konstruktion die einzelnen Teile der Reihe nach herzunehmen (in Analogie zu einem induktiven Vorgehen, bei dem die Zellen eine nach der andern behandelt werden). — Nun macht es natürlich nicht viel Sinn, eine Mannigfaltigkeit einfach als einen CW-Komplex ansehen zu wollen: vernünftigerweise sollten die “Skelette” doch wohl *Untermannigfaltigkeiten* sein (und zwar von derselben Dimension). Stellen wir uns etwa vor, wir hätten schon das “1-Skelett” als eine (berandete) Untermannigfaltigkeit (der Dimension  $n$ ) und wir wollten daran jetzt eine “2-Zelle” anhängen. Wenn  $n > 2$ , so sieht es nicht so aus, als könnte das Resultat überhaupt eine Chance haben, wieder eine Mannigfaltigkeit zu sein. Wie so oft, so kommt man auch hier mit einer (zumindest von der Idee her) ganz minimalen Änderung dahin, daß die Sache wieder funktioniert. Nämlich man wird nicht versuchen, wirklich eine 2-Zelle anzuheften. Man wird vielmehr diese Zelle zuerst *aufdicken*, damit sie die richtige Dimension bekommt. Im Klartext, was man anheftet, ist (in dem angedeuteten speziellen Fall) das Produkt  $D^2 \times D^{n-2}$ , und zwar wird es angeheftet entlang  $(\partial D^2) \times D^{n-2}$ . (Natürlich ist es so, daß hier von Rechts wegen einiges an technischen Details zu klären wäre, was wir einfach unterschlagen.) — Die angedeutete zusätzliche Struktur auf einer Mannigfaltigkeit wird als ein *Henkel-Aufbau* bezeichnet.

DEFINITION. Ein *Kobordismus* ist ein Tripel von (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten  $(W; M_0, M_1)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $M_0$  und  $M_1$  sind geschlossene Mannigfaltigkeiten (einer Dimension  $n$ );
- $W$  ist eine berandete Mannigfaltigkeit der Dimension  $n+1$ ;
- und zwar ist der Rand von  $W$  gleich der disjunkten Vereinigung  $M_0 \dot{\cup} M_1$ .

Er heißt *h-Kobordismus* (mit “h” für “Homotopie-Äquivalenz”), wenn zusätzlich gilt:

- die Inklusion  $M_0 \rightarrow W$  ist eine Homotopie-Äquivalenz,
- die Inklusion  $M_1 \rightarrow W$  ist eine Homotopie-Äquivalenz.

BEISPIEL (für h-Kobordismus). Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -Mannigfaltigkeit:

$$(W; M_0, M_1) = (M \times [0, 1], M \times \{0\}, M \times \{1\})$$

**Satz** (Smale). Für  $n+1 \geq 6$  und  $\pi_1(W) = 0$  gibt es keine anderen Beispiele von *h-Kobordismen* (bis auf Diffeomorphie).

Dieser Satz ist eine (sehr weitreichende) Verallgemeinerung der höher-dimensionalen Poincaré-Vermutung. Z.B. in Dimension  $\geq 6$  bekommt man die aus dem Satz, indem man den Satz anwendet auf das  $W$ , das aus der fraglichen Homotopie-Sphäre entsteht durch das Entfernen von zwei kleinen Bällen: man weist hier die “h”-Kobordismus-Eigenschaft nach (das läuft auf eine Anwendung von Poincaré-Dualität hinaus).

## Whitehead-Gruppe

Bei Smale's h-Kobordismus-Satz war vorausgesetzt, daß die beteiligten Mannigfaltigkeiten triviale Fundamentalgruppe haben. Der Satz kann übertragen werden auf den allgemeinen Fall, wo diese Voraussetzung über die Fundamentalgruppe nicht mehr gemacht wird. Dazu muß aber die Formulierung des Satzes geändert werden.

Man fixiert eine  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und betrachtet h-Kobordismen "mit  $M$  als unterem Ende". Das heißt, man betrachtet h-Kobordismen  $(W, M_0, M_1)$ , wo  $M_0$  zu  $M$  äquivalent ist (als differenzierbare Mannigfaltigkeit) und wo außerdem noch eine solche Äquivalenz  $M \rightarrow M_0$  ausdrücklich fixiert ist.

Diese h-Kobordismen werden nun in naheliegender Weise zu Äquivalenzklassen zusammengefaßt. Nämlich  $(W, M_0, M_1)$  und  $(W', M'_0, M'_1)$  sollen zueinander äquivalent sein, wenn ein Diffeomorphismus von Tripeln existiert,  $(W, M_0, M_1) \rightarrow (W', M'_0, M'_1)$ , derart, daß der induzierte Isomorphismus  $M_0 \rightarrow M'_0$  zu den fixierten Identifizierungen von  $M$  mit  $M_0$  und  $M'_0$  kompatibel ist. — Es sei in dem folgenden Satz wieder  $n \geq 5$ .

**Satz.** *Es gibt eine abelsche Gruppe  $Wh(M)$ . Es gibt eine 1:1 Beziehung zwischen:*

- Äquivalenzklassen von h-Kobordismen,
- Elementen von  $Wh(M)$ .

Die abelsche Gruppe  $Wh(M)$  ist die sogenannte *Whitehead-Gruppe*. Sie hängt, wie sich herausstellt, tatsächlich nur von der Fundamentalgruppe von  $M$  ab. Und im Fall der trivialen Fundamentalgruppe ist auch die Gruppe  $Wh(M)$  trivial. Auf die Weise ist hier der h-Kobordismus-Satz subsummiert.

Es sollen im folgenden zwei Beschreibungen der Whitehead-Gruppe gegeben werden: eine geometrische (mit Hilfe von endlichen relativen CW-Komplexen) und eine algebraische. Danach wird erläutert, wie diese beiden zueinander in Beziehung stehen.

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Menge der endlichen CW-Komplexe relativ zu  $X$  wird mit  $\text{Komp}(X)$  bezeichnet.  $Y \in \text{Komp}(X)$  bedeutet also die folgenden beiden Dinge:

- $X$  ist Unterraum von  $Y$ ,
- $Y$  ist versehen mit der Struktur eines endlichen CW-Komplexes, relativ zu dem Unterraum  $X$ .

Auf der Menge  $\text{Komp}(X)$  soll nun eine Äquivalenzrelation eingeführt werden, die als "einfache Homotopie-Äquivalenz" bezeichnet wird ("simple homotopy equivalence" im

englischen). Neben den zellulären Isomorphismen, relativ zu  $X$ , ist eine weitere Konstruktion zugelassen, die als “elementare Erweiterung” bezeichnet wird (“elementary expansion”).

Eine solche elementare Erweiterung kommt auf die folgende Weise zustande. Sei  $Y$  aus  $\text{Komp}(X)$ , sei  $\varphi : D^n \rightarrow Y$  eine “zelluläre” Abbildung; genauer: es sei vorausgesetzt, daß  $\varphi$  den  $n$ -Ball  $D^n$  in das  $n$ -Skelett von  $Y$  abbildet, und die Rand-Sphäre  $S^{n-1}$  in das  $(n-1)$ -Skelett. Wir können dieses  $\varphi$  dann benutzen, um an den CW-Komplex  $Y$  zwei weitere Zellen anzuheften: eine  $n$ -Zelle und eine  $(n+1)$ -Zelle. Und zwar werden diese beiden Zellen *simultan* angeheftet mit Hilfe der Verklebe-Konstruktion

$$Y' = Y \cup_{D^n} D^{n+1} .$$

Dabei bedeutet  $D^n_-$  die “südliche Halbkugel” im Rand von  $D^{n+1}$ , und die Anhefte-Abbildung  $D^n_- \rightarrow Y$  ist durch  $\varphi$  gegeben. Aus der “nördlichen Halbkugel”  $D^n_+$  wird bei der Konstruktion eine an  $Y$  angeheftete  $n$ -Zelle. Und aus  $D^{n+1}$  selbst wird bei der Konstruktion eine an  $Y \cup_{S^{n-1}} D^n_+$  angeheftete  $(n+1)$ -Zelle.

Die beiden neuen Zellen bilden ein “Standard-kürzendes-Paar” (standard cancelling pair); der Übergang von  $Y$  zu  $Y'$  heißt *elementare Erweiterung*. Umgekehrt ist in dieser Situation offenbar  $Y$  auch Deformationsretrakt von  $Y'$  (und zwar Deformationsretrakt von sehr spezieller Art): eine Deformationsretraktion ist induziert von einer Deformationsretraktion von  $D^{n+1}$  zu  $D^n_-$ .

**Definition.**  $\text{Sh}(X)$  bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen von  $\text{Komp}(X)$ .

Es kann nun ein wenig gezaubert werden. Der Trick ist, *Funktorialität* zu benutzen. Und zwar bekommt man aus einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  eine induzierte Abbildung

$$f_* : \text{Komp}(X) \longrightarrow \text{Komp}(X') , \quad Y \longmapsto X' \cup_X Y .$$

Unter dieser Abbildung gehen (offenbar) zelluläre Isomorphismen wieder in zelluläre Isomorphismen über; und elementare Erweiterungen in elementare Erweiterungen. Die Abbildung ist also mit der Äquivalenzrelation verträglich. Per Übergang zu den Äquivalenzklassen hat man deshalb auch eine induzierte Abbildung

$$f_* : \text{Sh}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X') .$$

Für diese Abbildung hat man die folgende fundamentale Tatsache:

**Lemma.** *Wenn  $f : X \rightarrow X'$  und  $f' : X \rightarrow X'$  homotope Abbildungen sind, dann sind die induzierten Abbildungen  $f_* : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(X')$  und  $f'_* : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(X')$  zueinander gleich.*

BEWEIS (Skizze). Sei  $Y \in \text{Komp}(X)$ . Es ist zu zeigen, daß man von  $f_*(Y)$  zu  $f'_*(Y)$  übergehen kann durch elementare Erweiterungen und deren inverse. Dazu wird es sicherlich genügen, ein  $Z$  in  $\text{Komp}(X')$  zu finden, das sowohl von  $f_*(Y)$  aus als auch von  $f'_*(Y)$  aus durch elementare Erweiterungen erhalten werden kann. Ein solches  $Z$  gibt es. Man bekommt es durch explizite Benutzung der Homotopie. Die Homotopie von  $f$

zu  $f'$  ist ja eine Abbildung  $F: X \times [0, 1] \rightarrow X'$ . Man benutzt diese Abbildung für die Verklebe-Konstruktion

$$Z := X' \cup_{X \times [0,1]} Y \times [0, 1] .$$

Es ist nun richtig, daß man  $Z$  von  $f_*(Y)$  aus durch eine Folge von elementaren Erweiterungen erreichen kann. Und zwar sind diese elementaren Erweiterungen in 1:1 Beziehung zu den Zellen von  $Y$ ; die Details hierfür lassen wir weg. Ähnlich auch kann man  $Z$  von  $f'_*(Y)$  aus durch eine Folge von elementaren Erweiterungen erreichen.  $\square$

Auf der Menge  $\text{Komp}(X)$  definieren wir eine Art von ‘Addition’ durch das Zusammenkleben entlang von  $X$ ,

$$Y_1 \perp Y_2 = Y_1 \cup_X Y_2 .$$

Wenn  $Y_1$  äquivalent ist zu  $Y'_1$ , dann ist auch  $Y_1 \perp Y_2$  äquivalent zu  $Y'_1 \perp Y_2$ ; und ähnlich mit der zweiten Komponente. Man bekommt also eine induzierte Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen,

$$[Y_1] + [Y_2] := [Y_1 \perp Y_2] .$$

Die Menge  $\text{Sh}(X)$  wird auf die Weise zu einer (kommutativen und assoziativen) *Halbgruppe*, mit  $[X]$  als neutralem Element. Was die Existenz von inversen Elementen bezüglich dieser Addition angeht, so haben wir den folgenden Sachverhalt:

**Satz.** Sei  $Y \in \text{Komp}(X)$ . Es sind äquivalent:

- (1) die Inklusion  $X \rightarrow Y$  ist Homotopie-Äquivalenz,
- (2)  $X$  ist Deformationsretrakt von  $Y$ ,
- (3)  $[Y]$  hat ein inverses Element bezüglich “+” in  $\text{Sh}(X)$ .

BEWEIS. Die Äquivalenz von (1) und (2) gilt für jeden relativen CW-Komplex. Die Äquivalenz von (2) und (3) müssen wir hier nachweisen.

Es sei zunächst (2) vorausgesetzt. Sei  $j: X \rightarrow Y$  die Inklusion und sei  $r: Y \rightarrow X$  eine Retraktion derart, daß die Abbildung  $j \circ r$  homotop ist zur identischen Abbildung auf  $Y$ . Sei  $Z(r)$  definiert als der reduzierte Abbildungszyylinder der Abbildung  $r$ ,

$$Z(r) = X \cup_{X \times [0,1]} Y \times [0, 1] \cup_{Y \times \{1\}} X .$$

Wie immer bei Abbildungszyindern, so hat  $Z(r)$  den (Ziel-) Raum  $X$  nicht nur als Deformationsretrakt; sondern  $Z(r)$  geht aus  $X$  hervor durch eine Folge von elementaren Erweiterungen, entsprechend den Zellen von  $Y$  (der Sachverhalt ist ähnlich wie im Beweis von dem obigen Lemma). Als Element von  $\text{Komp}(X)$  aufgefaßt, ist  $Z(r)$  also äquivalent zur Null.

Andererseits ist  $Y$  (als  $Y \times \{0\}$ ) in  $Z(r)$  enthalten. Wir können  $Z(r)$  deshalb auch als Element von  $\text{Komp}(Y)$  auffassen; das wir, zur Unterscheidung, mit  $Z$  bezeichnen wollen. Mit der Abbildung

$$r_* : \text{Komp}(Y) \longrightarrow \text{Komp}(X)$$

bekommen wir aus  $Z$  ein Element  $r_*(Z)$  von  $\text{Komp}(X)$ . Die Zellen von  $r_*(Z)$  sind in 1:1 Beziehung zu den Zellen von  $Y$ ; nur daß jeder Zelle von  $Y$  eine solche in  $r_*(Z)$  von einer Dimension höher entspricht.

Wir behaupten nun, daß  $[r_*(Z)]$  ein zu  $[Y]$  inverses Element ist; oder, was dasselbe sagt, daß das Element  $Y \perp r_*(Z)$  in  $\text{Komp}(X)$  äquivalent zum trivialen Element ist.

Dazu wird es genügen, daß das Element  $Y \perp r_*(Z)$  in  $\text{Komp}(X)$  äquivalent zu  $Z(r)$  ist (denn von  $Z(r)$  wissen wir schon, daß es äquivalent zum trivialen Element ist).

Wir benutzen jetzt das Lemma. Die identische Abbildung von  $Y$  ist homotop zu der Abbildung  $j \circ r$ , deshalb ist, nach dem Lemma, das Element  $Z$  in  $\text{Komp}(Y)$  äquivalent zu dem Element  $j_*(r_*(Z))$ . Das heißt, im Klartext, daß es eine Folge von elementaren Erweiterungen und deren inversen gibt, *und zwar relativ zu  $Y$* , die diese beiden verbindet. Da  $X$  in  $Y$  enthalten ist, folgt hieraus, daß es auch eine Folge (nämlich dieselbe!) von elementaren Erweiterungen und deren inversen gibt, die die beiden verbindet und die relativ zu  $X$  ist.  $Z$  nun, als Element von  $\text{Komp}(X)$ , ist  $Z(r)$ . Und  $j_*(r_*(Z))$ , als Element von  $\text{Komp}(X)$ , ist  $Y \cup_X r_*(Z)$ ; das heißt, dasselbe wie  $Y \perp r_*(Z)$ .

Sei umgekehrt nun (3) vorausgesetzt. Das heißt, daß ein  $\bar{Y}$  existiert derart, daß das Element  $Y \perp \bar{Y}$  von  $\text{Komp}(X)$  äquivalent zum trivialen Element ist. Da eine elementare Erweiterung eine Homotopie-Äquivalenz ist, folgt hieraus, daß die Inklusion  $i$  von  $X$  in  $Y \perp \bar{Y}$  eine Homotopie-Äquivalenz ist; daß deshalb auch  $X$  Deformationsretrakt von  $Y \perp \bar{Y}$  ist. Sei  $\tilde{r} : Y \perp \bar{Y} \rightarrow X$  eine Retraktion, sei  $H$  eine Homotopie von  $i \circ \tilde{r}$  zur identischen Abbildung auf  $Y \perp \bar{Y}$ . Per Einschränkung bekommen wir aus  $\tilde{r}$  nun Retraktionen  $r : Y \rightarrow X$  und  $\bar{r} : \bar{Y} \rightarrow X$ . Und wir bekommen auch eine Homotopie von der Selbst-Abbildung  $j \circ r$  von  $Y$  zur identischen Abbildung: die Homotopie ist gegeben durch die Komposition

$$Y \times [0, 1] \xrightarrow{\text{Inkl}} (Y \perp \bar{Y}) \times [0, 1] \xrightarrow{H} Y \perp \bar{Y} \xrightarrow{\text{Id} \perp \bar{r}} Y . \quad \square$$

**Definition** (*geometrische Definition der Whitehead-Gruppe*).  $\text{Wh}(X)$  ist die Gruppe der invertierbaren Elemente in der Halbgruppe  $\text{Sh}(X)$ .

**Satz** (Austauschtrick). *Sei  $Y$  Repräsentant eines Elements von  $\text{Wh}(X)$ .*

- (1) *Sei  $m$  die kleinste der vorkommenden Dimensionen der Zellen von  $Y$ . Es ist möglich, von  $Y$  zu einem äquivalenten Repräsentanten  $Y'$  überzugehen; wobei  $Y'$  in jeder Dimension genauso viele Zellen hat wie  $Y$ , ausgenommen die Dimensionen  $m$  und  $m+2$ . In Dimension  $m$  hat  $Y'$  keine Zellen, und in Dimension  $m+2$  entsprechend viele mehr.*
- (2) *Es gibt einen zu  $Y$  äquivalenten Repräsentanten  $Y''$ , der nur Zellen hat in zwei benachbarten Dimensionen  $n$  und  $n+1$ . Dabei kann man  $n$  so groß wählen, wie man will (insbesondere kann man z.B. darauf bestehen, daß  $n \geq 2$ ).*

**BEWEIS.** (2) resultiert, indem man (1) genügend oft anwendet. Nämlich man entfernt zunächst die  $m$ -Zellen, um sie durch  $(m+2)$ -Zellen zu ersetzen, danach entfernt man



die  $(m+1)$ -Zellen, um sie durch  $(m+3)$ -Zellen zu ersetzen, und so weiter. Sei  $n$  als eine genügend große Zahl gewählt; nämlich so, daß es oberhalb Dimension  $n+1$  keine Zellen mehr gibt. Man wiederholt den Schritt aus (1) so lange, bis alle Zellen bis zur Dimension  $n-1$  (einschließlich) entfernt sind.

(1) wurde im wesentlichen schon früher diskutiert (im Zusammenhang mit dem Hurewicz-Satz; nämlich der Variante des Beweises). Da die Betonung hier etwas anders ist, gehen wir noch einmal darauf ein. Es wird genügen, zu zeigen, wie eine einzelne Zelle der kleinsten Dimension  $m$  entfernt (und dabei durch eine Zelle der Dimension  $m+2$  ersetzt) werden kann. Sei  $\psi : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (Y, X)$  die charakteristische Abbildung einer solchen Zelle. Da  $X$  Deformationsretrakt von  $Y$  ist, läßt die Abbildung  $\psi$  sich fortsetzen zu einer (zellulären) Abbildung

$$\Psi : (D^{m+1}, D_-^m) \longrightarrow (Y, X) \quad , \quad \Psi|_{D_+^m} = \psi \quad .$$

Wir bilden den reduzierten Abbildungszyylinder der Abbildung  $\Psi$ . Das läuft auf dasselbe hinaus, wie die Abbildung  $\Psi$  für eine elementare Erweiterung zu benutzen; das heißt, als die Anhefte-Abbildung  $\Psi : D_-^{m+1} \rightarrow Y$  bei der Konstruktion

$$Y_1 = Y \cup_{D_-^{m+1}} D^{m+2} \quad .$$

In  $Y_1$  gibt es einen Unterkomplex  $Z_1$  mit genau zwei Zellen; nämlich der ursprünglichen  $m$ -Zelle und der durch das Anheften von  $D_+^{m+1}$  entstandenen  $(m+1)$ -Zelle. Wir können  $Z_1$  auffassen als eine elementare Erweiterung von dem Raum  $X$ ; insbesondere ist  $X$  damit auch Deformationsretrakt von  $Z_1$ . Der neue Komplex  $Y_1'$  wird nun definiert durch das Kollabieren von dem Unterkomplex  $Z_1$ ; das heißt, als

$$X \cup_{Z_1} Y_1 \quad .$$

Die ursprüngliche  $m$ -Zelle ist dann verschwunden, die hinzugekommene  $(m+1)$ -Zelle auch. Die hinzugekommene  $(m+2)$ -Zelle ist übriggeblieben. Es bleibt zu zeigen, daß  $Y_1'$  zu  $Y_1$  (und damit auch zu dem ursprüngliche  $Y$ ) einfach-homotopie äquivalent ist.

Bezeichne  $j : X \rightarrow Z_1$  die Inklusion und  $r : Z_1 \rightarrow X$  eine Retraktion (so daß  $j \circ r$  homotop ist, relativ zu  $X$ , zur identischen Abbildung von  $Z_1$ ). Wir fassen  $Y_1$  als Element von  $\text{Komp}(Z_1)$  auf. Damit sind wir in der Lage, das obige Lemma anzuwenden. Es sagt, daß  $Y_1$  äquivalent ist, als Element von  $\text{Komp}(Z_1)$ , zu dem Element  $j_*(r_*(Y_1))$ . Im Klartext, es gibt eine Folge von elementaren Erweiterungen und deren inversen, relativ zu  $Z_1$ , von  $Y_1$  zu  $j_*(r_*(Y_1))$ . Da  $X$  in  $Z_1$  enthalten ist, bedeutet das, daß es auch eine Folge (dieselbe Folge!) von elementaren Erweiterungen und deren inversen relativ zu  $X$  gibt, die  $Y_1$  verbindet mit  $j_*(r_*(Y_1))$  aufgefaßt als Element von  $\text{Komp}(X)$ . Dies Element ist gegeben durch

$$Z_1 \cup_X r_*(Y_1) \quad .$$

Es ist eine elementare Erweiterung von  $r_*(Y_1)$ , da, wie schon gesagt,  $Z_1$  eine elementare Erweiterung von  $X$  ist. □

**Folgerung.** *Ein solcher spezieller Repräsentant (er heiße  $Y$  statt  $Y''$ ) liefert, über den zellulären Kettenkomplex in der universellen Überlagerung, eine Abbildung von freien Moduln über dem Gruppenring der Fundamentalgruppe,  $R = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ ,*

$$R[J_{n+1}] \longrightarrow R[J_n] .$$

(1) *In den beiden freien Moduln gibt es bevorzugte Erzeugende, die wohldefiniert sind bis auf die Multiplikation mit Elementen der Gruppe  $\pi_1(X)$ .*

(2) *Die Abbildung ist ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Die Diskussion ist dieselbe wie eine weiter oben (im Zusammenhang mit der Konstruktion von Räumen mit vorgegebenen Homotopiegruppen). Sei, abkürzend,  $\pi = \pi_1(X) = \pi_1(Y)$ . Sei  $J_n$  definiert als die Indexmenge für die  $n$ -Zellen von  $Y$ ; und  $\tilde{J}_n$  als diejenige für die  $n$ -Zellen in der universellen Überlagerung  $\tilde{Y}$  von  $Y$ . Dann ist  $\tilde{J}_n$  eine  $\pi$ -Menge; und ist als solche isomorph zu dem Produkt  $\pi \times J_n$ . Der Isomorphismus  $\tilde{J}_n \approx \pi \times J_n$  ist nicht (oder, besser gesagt, nicht ganz) kanonisch. Um den Isomorphismus zu fixieren, muß man für jede der  $n$ -Zellen aus  $Y$  von den darüber liegenden Zellen aus  $\tilde{Y}$  eine auswählen. Das gibt die in (1) angesprochene Sache über die Erzeugenden des freien Moduls  $R[J_n]$ . — Die Angelegenheit für  $J_{n+1}$  geht genauso.

Was (2) angeht, so ist die Inklusion  $X \rightarrow Y$  eine Homotopie-Äquivalenz, wie oben gesehen. Die Inklusion der universellen Überlagerungen,  $\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ , ist deshalb ebenfalls eine Homotopie-Äquivalenz (z.B. weil die relativen Homotopiegruppen unten und oben zueinander isomorph sind). Der zelluläre Kettenkomplex des relativen CW-Komplexes  $(\tilde{Y}, \tilde{X})$  hat deshalb triviale Homologie. Der zelluläre Kettenkomplex ist reduziert auf die Abbildung  $R[J_{n+1}] \rightarrow R[J_n]$ ; der Kokern und der Kern der Abbildung bilden die  $n$ -te und die  $(n+1)$ -te Homologiegruppe von dem Kettenkomplex. Der Kokern und der Kern sind also beide null; was bedeutet, daß die Abbildung  $R[J_{n+1}] \rightarrow R[J_n]$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

BEMERKUNG. *Die beiden freien Moduln  $R[J_{n+1}]$  und  $R[J_n]$  haben denselben Rang (dieselbe Anzahl von erzeugenden Elementen). Denn zum Beispiel über Homomorphismen  $\mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  kann man aus ihnen eine Abbildung von Vektorräumen bekommen. Die ist auch wieder ein Isomorphismus, also haben die Vektorräume dieselbe Dimension. Die obige Abbildung ist also durch eine quadratische Matrix repräsentiert — man muß dazu nur die Elemente von  $J_n$ , bzw. von  $J_{n+1}$ , der Reihe nach anordnen.  $\square$*

Wir kommen zu der algebraischen Beschreibung der Whitehead-Gruppe. Sei  $\pi$  eine Gruppe; ihr soll eine abelsche Gruppe  $\text{Wh}(\pi)$  zugeordnet werden.

Die Konstruktion steht in Zusammenhang mit einer andern, die einem Ring  $R$  eine abelsche Gruppe  $K_1(R)$  zuordnet. Diese Konstruktion wird zuerst beschrieben.

Unter den  $n \times n$ -Matrizen über dem Ring  $R$  betrachten wir diejenigen, die bezüglich der Matrizen-Multiplikation ein Inverses besitzen. Sie bilden eine Gruppe  $GL_n(R)$ . Einer Matrix  $M \in GL_n(R)$  nun können wir eine Matrix in  $GL_{n+1}(R)$  zuordnen:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise bekommen wir eine aufsteigende Folge von Gruppen und Inklusionen

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset GL_3(R) \subset \dots$$

Die Vereinigung davon, die "Allgemeine lineare Gruppe" (general linear group) wird mit  $GL(R)$  bezeichnet.

Eine Matrix wird als *Elementarmatrix* bezeichnet, wenn sie mit der Identitätsmatrix übereinstimmt mit Ausnahme von einer einzigen Stelle außerhalb der Diagonalen. Eine Elementarmatrix ist invertierbar. Bezeichne  $E_n(R)$  die von den Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe in  $GL_n(R)$ ; und ebenso  $E(R)$  die in  $GL(R)$ .

**Lemma** (Whitehead). *Die Untergruppe  $E(R)$  von  $GL(R)$  stimmt überein mit der Kommutator-Untergruppe von  $GL(R)$ .*

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, daß  $E(R)$  enthalten ist in der Kommutator-Untergruppe. Sei  $I$  die Eins-Matrix. Bezeichne  $E_{i,j}$ , für  $i \neq j$ , die Matrix mit einer 1 an der Stelle  $(i, j)$  und sonst lauter Nullen. Bezeichne  $e_{i,j}(a) = (I + a \cdot E_{i,j})$  die Elementarmatrix mit dem Eintrag  $a$  an der  $(i, j)$ -ten Stelle. Es ist

$$e_{i,j}(a) \cdot e_{i,j}(b) = e_{i,j}(a+b),$$

insbesondere ist also  $e_{i,j}(-a)$  das Inverse von  $e_{i,j}(a)$ . Die Identität

$$e_{i,j}(a) \cdot e_{j,k}(1) \cdot e_{i,j}(-a) \cdot e_{j,k}(-1) = e_{i,k}(a),$$

für  $i \neq j \neq k \neq i$ , zeigt deshalb, daß jede Elementarmatrix in  $E_n(R)$  ein Kommutator ist, sobald nur  $n \geq 3$ .

Umgekehrt zeigen die drei folgenden Identitäten, daß jeder Kommutator  $ABA^{-1}B^{-1}$  in  $GL_n(R)$  als ein Produkt von Elementarmatrizen in der größeren Gruppe  $GL_{2n}(R)$  geschrieben werden kann:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (BA)^{-1} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I - A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I - A & I \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=n+1}^{2n} (I + a_{i,j} E_{i,j})$$

□

Nach dem Lemma bedeutet das Herauskürzen von  $E(R)$  dasselbe, wie die Gruppe  $GL(R)$  abelsch zu machen:  $GL(R)^{ab} = GL(R) / [GL(R), GL(R)] \cong GL(R) / E(R)$ .

**Definition.**  $K_1(R) = GL(R) / E(R)$

BEMERKUNG. Bezeichne  $U(R)$  die Gruppe der *Einheiten* in dem Ring  $R$  (englisch: *units*); d.h. die Gruppe derjenigen Elemente, die multiplikativ-inverse haben. Wenn  $R$  ein kommutativer Ring ist, dann gibt die *Determinante* eine Abbildung

$$\det : GL(R) \longrightarrow U(R) .$$

Die Abbildung faktorisiert über die abelsch-gemachte Gruppe, also  $K_1(R)$ , da eben  $U(R)$  nach Voraussetzung eine *abelsche* Gruppe ist; ferner ist die Einschränkung der Determinanten-Abbildung auf  $GL_1(R)$  ein Isomorphismus. Im kommutativen Fall resultiert also, daß die Gruppe der Einheiten,  $U(R)$ , ein Retrakt von  $K_1(R)$  ist; insbesondere ist die Abbildung

$$U(R) = GL_1(R) \longrightarrow K_1(R)$$

injektiv. □

Es sei nun  $R = \mathbb{Z}[\pi]$  ein Gruppenring. Bezeichne  $(\pm g)$  das Bild, in  $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ , von der Untergruppe in  $GL_1(\mathbb{Z}[\pi])$ , die von den Elementen  $g \in \pi$  und  $\pm 1 \in \mathbb{Z}$  gebildet ist. Es ist nicht schwer zu sehen, was das genau ist.

Da nämlich  $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  abelsch ist, faktorisiert die Abbildung  $\mathbb{Z}/2 \times \pi \longrightarrow K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  über die abelsch gemachte Gruppe  $\mathbb{Z}/2 \times \pi^{ab}$ . Andererseits haben wir auch noch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GL_1(\mathbb{Z}[\pi]) & \longrightarrow & K_1(\mathbb{Z}[\pi]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL_1(\mathbb{Z}[\pi^{ab}]) & \longrightarrow & K_1(\mathbb{Z}[\pi^{ab}]) \end{array}$$

in dem die untere Zeile nach der eben gemachten Bemerkung eine injektive Abbildung ist. Es folgt, daß die von den Elementen  $\pm g$  gebildete Untergruppe von  $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  zu der Gruppe  $\mathbb{Z}/2 \times \pi^{ab}$  isomorph ist.

Die *Whitehead-Gruppe* ist nun definiert als diejenige Gruppe, die durch das Entfernen der gerade beschriebenen "offensichtlichen" Elemente aus  $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  entsteht:

**Definition.**  $Wh(\pi) = K_1(\mathbb{Z}[\pi]) / (\pm g)$

**Satz.** Sei  $X$  weg-zusammenhängender 'vernünftiger' topologischer Raum (z.B. ein CW-Komplex). Es gibt einen kanonischen Isomorphismus der Whitehead-Gruppen,

$$Wh(X) \cong Wh(\pi_1(X)) .$$

Es wurde angedeutet, wie man aus einem Repräsentanten, links, eine Matrix über dem Gruppenring bekommt. Daß dies den behaupteten Isomorphismus liefert, ist ein nicht-triviales Nachprüfen.