Analysis I

Alexander Grigorian
Universität Bielefeld

SS 2012

Contents

Chapter 1

Mengen und Zahlen

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
11.04.12

Das Hauptziel dieses Kapitels ist die rigorose Entwicklung der Theorie von reellen Zahlen. Obwohl man die reellen Zahlen jeden Tag im wirklichen Leben trifft und benutzt, bedeutet es nicht, dass man wirklich versteht, *was* die reellen Zahlen sind und mit welchen Eigenschaften der reellen Zahlen man in der Mathematik immer rechnen kann.

Theoretisch kann man die ganze Mathematik als eine axiomatische Theorie darstellen. Das bedeutet, dass die Mathematik eine Sammlung von *Aussagen* (*Sätze*) und *Begriffe* ist, wo die neuen Aussagen aus schon bestehenden Aussagen mit Hilfe von logischer Argumentation (*Beweis*) erhalten werden, und die neuen Begriffe durch *Definitionen* erstellt werden.

Es muss allerdings etwas am Anfang der Theorie geben. Die axiomatische Theorie beginnt mit einer Liste von den *Grundbegriffen* und *Axiomen.* Die Axiome sind die Aussagen, die man ohne Beweis akzeptiert und die die Eigenschaften der Grundbegriffe darstellen. Dazu gehören auch die Regeln von logischer Argumentation, die man in den Beweisen benutzen darf.

Die reelle Zahlen gehören zu den Grundlagen der Mathematik, und die Theorie von reellen Zahlen befindet sich sehr nahe zum axiomatischen Anfang der Mathematik. Ganz am Anfang stehen die Mengenlehre und die Mathematische Logik. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Begriffen der Mengenlehre, obwohl ohne richtige Axiomatisierung. Danach führen wir die Axiome von reellen Zahlen ein und gewinnen aus den Axiomen alle wesentlichen Eigenschaften der reellen Zahlen.

1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.1.1 Mengen und Operationen auf den Mengen

Alle Objekte, die man in Mathematik trifft, sind entweder *Mengen* oder *Elemente von Mengen.* In axiomatischer Mengenlehre sind diese die Grundbegriffe, die man nicht definiert. In dieser Einführung benutzen wir keine axiomatische, sondern "naive" Mengenlehre, wo wir uns auf unserem intuitiven Verständnis von Objekten verlassen, das aus unserer Erfahrung stammt.

Der Begründer der Mengenlehre – der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918), erklärte den Begriff von Menge in 1895 wie folgt:

> "Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Obwohl sie keine mathematische Definition ist, hilft diese Erklärung die bestimmten Eigenschaften der Mengen zu etablieren. Sobald die Haupteigenschaften der Mengen angegeben sind, kann man die Mathematik, insbesondere Analysis, nur mit rigorosen logischen Methoden weiter entwickeln.

Für Mengen benutzt man häufig eine graphische Darstellung und zeigt sie als Figuren auf der Ebene. Diese sollen nicht als rigorose Methode angenommen werden, insbesondere als der mathematische Begriff von Ebene viel später definiert werden wird. Die graphischen Darstellungen soll man nur als Illustrationen auffassen, die enorm helfen die Beweise bzw Begriffe zu verstehen.

Elemente von Mengen. Jede Menge M besteht aus bestimmten Objekten, die die Elemente von M heißen. Ist x ein Element von M, so schreibt man

$$x \in M$$

("x gehört zu M", "x ist in M", "x ist ein Element der Menge M"). Ist x kein Element von M, so schreibt man

$$x \notin M.$$

Es gibt eine Menge, die keine Elemente besitzt. Diese Menge heißt die *leere Menge* und wird mit dem Zeichen $\emptyset$ bezeichnet.

Eine Menge kann explizit angegeben werden wie folgt. Zum Beispiel, die Menge M, die aus Elementen a, b, c, d besteht, bezeichnet man mit

$$M = \{a, b, c, d\}$$

(d.h. alle Elementen von M in den geschwungenen Klammern). Das bedeutet, dass die Elemente von M die Buchstaben a, b, c, d sind, und nichts anderes. Noch ein Beispiel: die Menge $M = \{a\}$ besteht nur aus einem Element a.

Die Elemente dürfen selber die Mengen sein. Zum Beispiel, die Menge $M = \{\emptyset\}$ besteht aus einem Element $\emptyset$.[1]

Teilmengen und Inklusion.

Definition. Menge A heißt *Teilmenge* von Menge B wenn aus $x \in A$ folgt $x \in B$. Man schreibt in diesem Fall

$$A \subset B$$

("A ist eine Teilmenge von B"). Die Beziehung $A \subset B$ zwischen den Mengen A und B heißt *Inklusion*.

Die Aussage "aus $x \in A$ folgt $x \in B$" schreibt man kurz so auf:

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

[1] Die Menge $\{\emptyset\}$ soll mit der Menge $\emptyset$ nicht verwechselt werden: die erste Menge hat ein Element, während die zweite Menge hat kein Element.

wobei der Pfeil $\Rightarrow$ bedeutet: "impliziert", "ergibt", "aus ... folgt ...".

Zwei Mengen A und B sind gleich genau dann wenn $A \subset B$ und $B \subset A$. In diesem Fall schreibt man $A = B$ ("A ist gleich B", "A ist identisch zu B"). Es ist klar, dass $A = B$ genau dann gilt, wenn

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

wobei der Doppelpfeil $\Leftrightarrow$ bedeutet: "genau dann, wenn" oder "äquivalent".

Mit Hilfe von den logischen Symbolen '$\Rightarrow$' und '$\Leftrightarrow$' können wir die Definitionen von Inklusion und Identität von Mengen so umschreiben:

$$\begin{array}{rcl} A & \subset & B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ A & = & B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,. \end{array}$$

Behauptung. *Die Inklusion von Mengen ist transitiv, d.h.*

$$A \subset B \textit{ und } \; B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Beweis. Wir haben nach $A \subset B$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

und nach $B \subset C$

$$x \in B \Rightarrow x \in C,$$

woraus folgt

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

und deshalb $A \subset C$. ■

Durchschnitt und Vereinigung. Jetzt definieren wir einige wichtigen Operationen auf den Mengen. Häufig ist eine Menge M durch eine Eigenschaft E von Elementen angegeben, d.h.

$$x \in M \;\;\Leftrightarrow\;\; x \text{ erfüllt } E,$$

was bedeutet: M ist die Menge von den Elementen x mit der Eigenschaft E. In diesem Fall schreibt man auch

$$M = \{x : x \text{ erfüllt } E\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \mid x \text{ erfüllt } E\}\,.$$

Definition. Der *Durchschnitt* der Mengen A und B ist die folgende Menge

$$A \cap B = \{x : x \in A \;\wedge\; x \in B\}\,,$$

wobei das Zeichen $\wedge$ bedeutet "und".

Die äquivalente Definition ist:

$$x \in A \cap B \;\;\Leftrightarrow\;\; x \in A \;\wedge\; x \in B.$$

Die Mengen A und B heißen *disjunkt* wenn $A \cap B = \emptyset$.

Definition. Die *Vereinigung* der Mengen A und B ist die folgende Menge:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

wobei das Zeichen $\vee$ bedeutet "oder".

Die äquivalente Definition ist:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$$

Beispiel. Es folgt aus den Definitionen, dass

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

und

$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Gelten die Inklusionen $A' \subset A$ und $B' \subset B$, so erhalten wir

$$A' \cap B' \subset A \cap B$$

und

$$A' \cup B' \subset A \cup B.$$

Auch gelten die Identitäten

$$A \cap A = A = A \cup A$$

und

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Die Gesetze von $\cap, \cup$.

Behauptung. *Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ, d.h. die folgenden Identitäten gelten für alle Mengen A, B:*

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

Man sagt auch, dass Durchschnitt und Vereinigung das *Kommutativgesetz* erfüllen. Das Word "kommutativ" bedeutet, dass die Operanden A und B vertauschbar sind.

Beweis. Es ist klar, dass

$$x \in A \ \wedge \ x \in B \ \Leftrightarrow \ x \in B \ \wedge \ x \in A$$

woraus die Identität $A \cap B = B \cap A$ folgt. Die zweite Identität beweist man analog.

$\blacksquare$

Behauptung. *Die Operationen* $\cap$ *und* $\cup$ *sind assoziativ, d.h. die folgenden Identitäten gelten für alle Mengen* A, B, C*:*

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\,.\end{aligned}$$

Man sagt auch, dass Durchschnitt und Vereinigung das *Assoziativgesetz* erfüllen. Das Word "assoziativ" bedeutet, dass das Ergebnis von zwei Operationen von der Reihenfolge der Operationen unabhängig ist.

Beweis. Nach den Definitionen erhalten wir

$$\begin{aligned}x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \ \wedge \ x \in C\\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C\\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C.\end{aligned}$$

Gleichfalls erhalten wir

$$\begin{aligned}x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \cap C\\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)\\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C,\end{aligned}$$

woraus die erste Identität folgt. Die zweite Identität beweist man gleichfalls. ■

Man definiert den Durchschnitt der Mengen A, B, C durch

$$A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C.$$

wobei das Zeichen ":=" bedeutet "ist definiert durch", und die Vereinigung dreier Mengen A, B, C durch

$$A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C.$$

Es folgt aus dem obigen Beweis, dass

$$\begin{aligned}x &\in A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C\\ x &\in A \cup B \cup C \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \ \vee \ x \in C.\end{aligned}$$

Behauptung. *Die Operationen* $\cap$ *und* $\cup$ *erfüllen die folgenden zwei Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (1.1)\\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

Beweis. Beweisen wir (1.1) (und das zweite Distributivgesetz wird analog bewiesen). We haben nach Definition

$$\begin{aligned}x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in C\\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C\end{aligned}$$

und

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \wedge x \in C).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \ \Leftrightarrow \ (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \wedge x \in C). \qquad (1.2)$$

Gilt $x \in C$, so sind die beiden Seiten von (1.2) wahr. Gilt $x \notin C$, so fällt die Bedingung $x \in C$ aus, und wir erhalten

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \ \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$$

und

$$(x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B,$$

woraus (1.2) folgt. ■

Subtraktion von Mengen.

Definition. Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A, B ist definiert wie folgt:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

Eine äquivalente Definition ist

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B.$$

Das Zeichen $\setminus$ heißt "Minus" oder "Mengenminus".

Es folgt, dass $A \setminus B \subset A$, während $A \setminus B$ und B disjunkt sind. Zum Beispiel, $A \setminus A = \emptyset$.

Potenzmenge. Betrachten wir jetzt nur die Teilmengen einer Grundmenge X. Die Menge von allen Teilmengen von X heißt die *Potenzmenge* von X und ist mit 2^X bezeichnet. d.h.

$$A \in 2^X \Leftrightarrow A \subset X.$$

Die Operationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$ auf den Mengen von 2^X ergeben auch die Mengen von 2^X.

Komplement. Für die Mengen aus 2^X gibt es noch eine Operation, die "Komplement" heißt.

Definition. Für jede Menge $A \in 2^X$ definieren wir das *Komplement* A^c durch

$$A^c = X \setminus A.$$

Äquivalent haben wir:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$

vorausgesetzt dass $x \in X$. Man benutzt für das Komplement A^c auch die Notation $\complement A$ (wobei 'C' aus dem englischen Wort "Complement" stammt).

Satz 1.1 *Die folgenden Identitäten gelten für die beliebigen Mengen* $A, B \in 2^X$*:*

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Identitäten heißen die *Formeln von De Morgan.* Man formuliert diese Formeln als die Regeln: das Komplement der Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplementen, und umgekehrt.

Beweis. We haben

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

woraus $A \setminus B = A \cap B^c$ folgt.

Um die zweite Identität zu beweisen, schreiben wir zuerst

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B.$$

Nun brauchen wir die Negation (Verneinung) der Aussage $x \in A \cap B$. Die Negation bezeichnet man mit dem Zeichen $\neg$, so dass

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg (x \in A \ \wedge \ x \in B).$$

Beachten wir, dass für die beliebigen Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \neg (\mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B}) &\Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \text{ oder } \neg\mathcal{B} \\ \neg (\mathcal{A} \text{ oder } \mathcal{B}) &\Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \text{ und } \neg\mathcal{B}, \end{aligned}$$

d.h. "und" und "oder" verwandeln sich ineinander nach der Negation.

Daher

$$\begin{aligned} \neg (x \in A \ \wedge \ x \in B) &\Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \ \vee \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c, \end{aligned}$$

woraus die Identität $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ folgt.

Gleichfalls wird die dritte Identität bewiesen:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg (x \in A \ \vee \ x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

∎

Beispiel. Hier zeigen wir, wie die obigen Identitäten benutzt werden können:

$$\begin{aligned}(A\cap B)\setminus C &= (A\cap B)\cap C^c\\ &= A\cap(B\cap C^c)\\ &= A\cap(B\setminus C)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}C\setminus(A\cap B) &= C\cap(A\cap B)^c\\ &= C\cap(A^c\cup B^c)\\ &= (C\cap A^c)\cup(C\cap B^c)\\ &= (C\setminus A)\cup(C\setminus B)\,.\end{aligned}$$

Familien von Mengen. Man definiert auch den Durchschnitt und die Vereinigung von einer Menge der Mengen. Sei I eine Menge und nehmen wir an, dass zu jedem $i\in I$ eine Menge A_i verknüpft ist. Man schreibt es so: $i\mapsto A_i$. Man nennt I als *Indexmenge* und bezeichnet die ganze Familie der Mengen A_i als $\{A_i\}_{i\in I}$.

Unterhalb benutzen wir die folgenden Symbolen (Quantoren):

$\forall$ bedeutet "für alle", "für jedes",

$\exists$ bedeutet "es existiert", "es gibt mindestens ein", "für mindestens ein".

Das Zeichen $\forall$ stammt aus dem umgedrehten Buchstabe A (Alle) und heißt *Allquantor*. Das Zeichen $\exists$ stammt aus dem umgedrehten E (Existiert) und heißt *Existenzquantor*.

Definition. Man definiert den Durchschnitt der Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ durch

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x:\forall i\in I\ \ x\in A_i\}$$

und die Vereinigung durch

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x:\exists i\in I\ \ x\in A_i\}\,.$$

Die äquivalenten Definitionen:

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\ x\in A_i \text{ für alle } i\in I$$

und

$$x\in\bigcup_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\ x\in A_i \text{ für mindestens ein } i\in I.$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
13.04.12

Die Distributivgesetze gelten auch für die Operationen $\bigcap_{i\in I}$ und $\bigcup_{i\in I}$ wie folgt.

Behauptung. *Die Operationen $\bigcap$ und $\bigcup$ erfüllen die folgenden Distributivgesetze:*

$$\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\bigcup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B) \tag{1.3}$$

und

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\bigcap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\,.$$

Beweis. Nach den obigen Definitionen erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\bigcup B &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \vee\ x \in B \\ &\Leftrightarrow \quad (\ \forall i \in I \quad x \in A_i) \ \vee \quad x \in B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B) &\Leftrightarrow \ \forall i \in I \quad x \in A_i \cup B \\ &\Leftrightarrow \ \forall i \in I \quad (x \in A_i \ \vee\ x \in B)\,. \end{aligned}$$

Um (1.3) zu beweisen, bleibt es zu zeigen, dass

$$(\ \forall i \in I \quad x \in A_i) \ \vee \quad x \in B \ \Leftrightarrow \ \forall i \in I \quad (x \in A_i \ \vee\ x \in B)\,. \tag{1.4}$$

Ist x in B, so sind die beiden Seiten von (1.4) wahr. Gilt $x \notin B$, so fällt die Bedingung $x \in B$ aus, und wir erhalten

$$(\ \forall i \in I \quad x \in A_i) \ \vee \quad x \in B \ \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \quad x \in A_i$$

und

$$\forall i \in I \quad (x \in A_i \ \vee\ x \in B) \ \Leftrightarrow \forall i \in I \quad x \in A_i,$$

woraus (1.4) und deshalb auch (1.3) folgen. Die zweite Identität wird analog bewiesen. ■

Satz 1.2 *Die folgenden Identitäten gelten für alle Mengen aus* 2^X*:*

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &= \bigcup_{i\in I} A_i^c \qquad (1.5)\\ \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &= \bigcap_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

Diese Identitäten heißen aus die Formeln von De Morgan.

Beweis. Zuerst beachten wir folgendes. Wir haben

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow \ x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \ \neg\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow \ \neg\,(\forall i \in I \ \ x \in A_i)\,. \end{aligned}$$

Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine Aussage. Nun benutzen wir die Äquivalenz

$$\neg(\text{“für jedes } i \in I \quad \text{gilt } \mathcal{A}_i\text{”}) \Leftrightarrow (\text{“es gibt } i \in I \ \text{ wenn } \mathcal{A}_i \text{ gilt nicht}),$$

d.h. mit den logischen Symbolen

$$\neg\left(\forall i\in I\ \ \mathcal{A}_i\right)\Leftrightarrow\left(\exists i\in I\ \ \neg\mathcal{A}_i\right). \tag{1.6}$$

Analog gilt

$$\neg\left(\exists i\in I\ \ \mathcal{A}_i\right)\Leftrightarrow\left(\forall i\in I\ \ \neg\mathcal{A}_i\right).$$

Man sieht, dass die folgende Regel gilt: bei der Negation verwandeln sich der Allquantor $\forall$ und der Existenzquantor $\exists$ ineinander.

Mit Hilfe von (1.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} x\in\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c &\Leftrightarrow \left(\exists i\in I\ \ x\notin A_i\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists i\in I\ \ x\in A_i^c\right)\\ &\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i^c, \end{aligned}$$

woraus (1.5) folgt. Die zweite Formel von De Morgan wird analog bewiesen. ■

Symmetrische Differenz. Es gibt noch eine interessante Operation auf Mengen, die *symmetrische Differenz* heißt und mit $A\bigtriangleup B$ bezeichnet wird:

$$A\bigtriangleup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Es folgt daraus, dass

$$x\in A\bigtriangleup B\Leftrightarrow\ (x\in A\ \wedge\ x\notin B)\ \vee\ (x\in B\ \ \wedge\ x\notin A),$$

d.h. $x\in A\bigtriangleup B$ gilt genau dann, wenn x genau zu einer Menge von A,B gehört.

Für symmetrische Differenz gelten die folgenden Identitäten.

1. Kommutativgesetz:
$$A\bigtriangleup B=B\bigtriangleup A.$$

2. Assoziativgesetz:
$$(A\bigtriangleup B)\bigtriangleup C=A\bigtriangleup(B\bigtriangleup C).$$

3. Distributivgesetz bezüglich $\cap$:
$$A\cap(B\bigtriangleup C)=(A\cap B)\bigtriangleup(A\cap C).$$

Kartesisches Produkt.

Definition. Für je zwei Mengen A,B definieren wir *kartesisches (direktes) Produkt* $A\times B$ der Mengen A,B wie folgt: die Menge $A\times B$ besteht aus allen geordneten *Paaren* (a,b) wobei $a\in A$ und $b\in B$:

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,\ \ b\in B\}.$$

Das geordnete Paar (a,b) ist ein neues Objekt, das man aus den Elementen von A und B erstellt. Zwei Paaren (a,b) und (a',b') sind gleich genau dann, wenn $a=a'$ und $b=b'$.

Kartesisches Produkt ist nicht kommutativ, aber assoziativ. Beachten wir, dass

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

und

$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) : a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Nun identifizieren wir die Paaren $((a, b), c)$ und $(a, (b, c))$ miteinander und mit dem geordneten Dreifache (a, b, c) (das auch 3-Tupel heißt), indem legen wir fest, dass

$$((a, b), c) = (a, (b, c)) = (a, b, c).$$

Dann gilt für kartesisches Produkt das Assoziativgesetz:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$$

wobei $A \times B \times C$ kartesisches Produkt dreier Mengen A, B, C ist, d.h.

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Kartesisches Produkt erfüllt auch das Distributivgesetz:

$$(A_1 \star A_2) \times B = (A_1 \times B) \star (A_2 \times B)$$

wobei $\star$ eine beliebige Mengenoperation $\cap, \cup, \setminus, \triangle$ bezeichnet.

1.1.2 Äquivalenzrelationen

Sei M eine Menge.

Definition. Eine Relation R auf M ist eine Teilmenge von $M \times M$.

Man benutzt eine Relation wenn man die bestimmten Paaren (x, y) mit $x \in M$ und $y \in M$ auszeichnen soll. Man kann es so vorstellen, dass zwischen $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ eine Relation besteht, und deshalb schreibt man xRy statt $(x, y) \in R$ um diese Beziehung zu bezeichnen. Es ist häufig bequemer statt R in der Relation xRy ein Symbol zu benutzen, wie $=, \subset, <, >$, usw.

Zum Beispiel, wählen wir eine Grundmenge X und definieren eine Relation R auf der Potenzmenge $M = 2^X$ durch

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow A = B,$$

Dann bedeutet ARB, dass $A = B$. Diese Relation heißt *Identitätsrelation*.

Ebenso, definiert man R durch

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subset B,$$

so erhält man, dass die Relation ARB bedeutet $A \subset B$. Wie wir es schon kennen, heißt diese Relation *Inklusion*.

In der nächsten Definition bezeichnen wir eine Relation R mit der Schlange $\sim$, d.h. wir schreiben $x \sim y$ falls $(x, y) \in R$, und $x \not\sim y$ sonst.

Definition. Die Relation $\sim$ heißt eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $x \sim x \quad \forall x \in M$ (Reflexivität)

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

3. $x \sim y \ \wedge \ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Zum Beispiel, die Identitätsrelation erfüllt diese Eigenschaften und deshalb ist Äquivalenzrelation. Die Inklusion ist keine Äquivalenzrelation, da sie nicht symmetrisch ist (obwohl reflexiv und transitiv).

Gegeben ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge M und ein Element $x \in M$, bezeichnen wir mit $[x]$ die folgende Teilmenge von M:

$$[x] = \{z \in M : z \sim x\}.$$

Die Teilmenge $[x]$ heißt die *Äquivalenzklasse* von x.

Satz 1.3 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt das folgende.*

(a) *Die Vereinigung von allen Äquivalenzklassen ist M (d.h. $\bigcup_{x \in M}[x] = M$).*

(b) *Je zwei Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ sind entweder identisch oder disjunkt.*

(c) *Für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x und y in derselber Äquivalenzklasse sind.*

Die Eigenschaften $(a) - (c)$ bedeuten zusammen, dass die verschiedene Äquivalenzklassen eine Zerlegung der M in disjunkte Teilmengen bilden, derart, dass je zwei Elemente von M genau dann äquivalent sind, wenn sie in derselber Teilmenge sind.

Die Menge von verschiedenen Äquivalenzklassen heißt der *Quotientraum* von $\sim$ und wird mit $M/\sim$ bezeichnet.

Beweis. (a) Nach Reflexivität gilt $x \in [x]$, woraus folgt, dass jedes x in einer Äquivalenzklasse ist und deshalb $\bigcup_{x \in M}[x] = M$.

(b) Seien $[x]$ und $[y]$ nicht disjunkt. Dann gibt es ein element $z \in [x] \cap [y]$. Nach Definition haben wir $z \sim x$ und $z \sim y$. Nach Symmetry und Transitivität erhalten wir $x \sim y$. Dann, für jedes $t \in [x]$, ergeben die Relations $t \sim x$ und $x \sim y$, dass $t \sim y$ und $t \in [y]$. Umgekehrt, $t \in [y]$ ergibt $t \in [x]$, woraus folgt, dass $[x] = [y]$.

(c) Sind x, y in derselber Äquivalenzklasse $[z]$, so erhalten wir $x \sim z$ und $y \sim z$, daher $x \sim y$. Umgekehrt, gilt $x \sim y$, so erhalten wir $y \in [x]$, was zusammen mit $x \in [x]$ ergibt, dass x, y in derselber Äquivalenzklasse sind. ∎

1.1.3 Funktionen und Abbildungen

Gegeben sind zwei Mengen X, Y, eine Funktion (=Abbildung) f von X nach Y ist eine Vorschrift $x \mapsto y$, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Die Abbildung wird mit

$$f : X \to Y$$

oder

$$X \xrightarrow{f} Y$$

bezeichnet. Das Element y heißt der *Wert* von f an der Stelle x (oder das *Bild* von x) und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Man schreibt auch

$$x \mapsto f(x)$$

oder

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

um die obige Zuordnung zu bezeichnen. Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* von f, die Menge Y – der *Wertebereich*.

Was genau eine Vorschrift bzw Zuordnung $x \mapsto y$ bedeutet? Sie ist eine Teilmenge G von $X \times Y$ (d.h. , G ist eine Menge von Paaren (x, y)) die die folgende zusätzliche Bedingung erfüllt:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \text{ mit } (x, y) \in G,$$

wobei $\exists!$ bedeutet: "es gibt genau ein". Die letzte Eigenschaft erlaubt zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnen. Da $y = f(x)$, es folgt, dass

$$G = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}.$$

Die Menge G heißt der *Graph* der Abbildung/Funktion f. Wie sehen, dass die Begriffe von Abbildung/Funktion, Vorschrift/Zuordnung, Graph logisch identisch sind, obwohl diese Wörter unterschiedlich benutzt werden.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
18.04.12

Beispiel. Die Abbildung $f : X \to X$ mit $f(x) = x$ heißt die *Identitätsabbildung* der Menge X. Man bezeichnet die Identitätsabbildung mit Id oder Id_X. Der Graph von Id_X besteht aus den Paaren (x, x), die die Diagonale von $X \times X$ formen.

Beispiel. Sei A eine Teilmenge von X und nehmen wir $Y = \{0, 1\}$. Definition wie eine Funktion $f : X \to Y$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Der Graph von f besteht aus den Paaren $(x, 1)$ mit $x \in A$ und $(x, 0)$ mit $x \in A^c$. Diese Funktion f heißt die *charakteristische* Funktion oder *Indikatorfunktion* von A und wird mit $\mathbf{1}_A$ bezeichnet.

Urbild. Jede Abbildung $f : X \to Y$ induziert die Abbildung $f^{-1} : 2^Y \to 2^X$ wie folgt. Für jede Teilmenge $A \subset Y$, definieren wir das *Urbild* $f^{-1}(A)$ von A durch

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Nach Definition ist $f^{-1}(A)$ eine Teilmenge von X, so dass die Zuordnung $A \mapsto f^{-1}(A)$ eine Abbildung von 2^Y nach 2^X bestimmt. Die Abbildung $f^{-1} : 2^Y \to 2^X$ heißt die *Urbildabbildung* von f.

Satz 1.4 *Die Urbildabbildung $f^{-1} : 2^Y \to 2^X$ ist mit den Mengenoperationen $\cap, \cup. \setminus$ vertauschbar:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Beweis. We haben

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \ \wedge \ f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \ \wedge \ x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

woraus die erste Identität folgt. Die anderen Identitäten werden analog bewiesen. ■

Bemerkung. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definiert man das Bild $f(A)$ von A wie folgt:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

so dass f als eine Abbildung von 2^X nach 2^Y betrachtet werden kann. Beachten wir folgendes: die Abbildung $f : 2^X \to 2^Y$ ist mit den Mengenoperationen generell *nicht* vertauschbar. Zum Beispiel, betrachten wir die Mengen $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$ und die einzige Abbildung $f : X \to Y$. Für die Mengen $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ erhalten wir $f(A) = f(B) = Y$ und deshalb

$$f(A) \cap f(B) = Y,$$

während $A \cap B = \emptyset$ und deshalb

$$f(A \cap B) = \emptyset.$$

Man sieht, dass $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

Komposition von Abbildungen.

Definition. Gegeben sind zwei Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$, definieren wir die *Komposition (Verkettung, zusammengesetzte Abbildung)* $f \circ g$ als eine Abbildung von X nach Z mit

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Man kann auch schreiben

$$f \circ g : X \to Z, \qquad x \mapsto f(g(x)).$$

Schematisch kann man die Verkettung so darstellen:

$$\begin{tikzcd} & {\scriptstyle g(x)\in Y} \arrow[dr, "f"] & \\ {\scriptstyle x\in X} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f\circ g"] & & {\scriptstyle f(g(x))\in Z} \end{tikzcd}$$

Man muss betonen, dass die Komposition $f \circ g$ nur dann wohldefiniert ist, wenn der Wertebereich von g im Definitionsbereich for f liegt. Daraus folgt, dass $g \circ f$ nicht unbedingt wohldefiniert sein soll, sogar wenn $f \circ g$ wohldefiniert ist. Insbesondere kann man nicht erwarten, dass die Komposition kommutativ ist. Aber die Komposition ist immer assoziativ.

Satz 1.5 (Assoziativgesetz für Komposition) *Die folgende Identität*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

gilt für je drei Abbildungen $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} U$.

Beweis. Bemerken wir zunächst, dass die beiden Verkettungen $(f \circ g) \circ h$ und $f \circ (g \circ h)$ von X nach U abbilden, wie man auf den folgenden Diagrammen sieht:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{(f\circ g)\circ h}{\longrightarrow} & U \\ \downarrow^{h} & \nearrow^{f\circ g} & \uparrow^{f} \\ Y & \overset{g}{\longrightarrow} & Z \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} X & \overset{f\circ(g\circ h)}{\longrightarrow} & U \\ \downarrow^{h} & \searrow^{g\circ h} & \uparrow^{f} \\ Y & \overset{g}{\longrightarrow} & Z \end{array}$$

Für jedes $x \in X$ gilt

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

und analog

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))),$$

woraus die Identität $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ folgt. ■

Das Assoziativgesetz erlaubt uns die Verkettung dreier Abbildungen zu definieren wie folgt:

$$f \circ g \circ h := (f \circ g) \circ h.$$

Schematisch sieht die Komposition $f \circ g \circ h$ so aus:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f\circ g\circ h}{\longrightarrow} & U \\ \downarrow^{h} & & \uparrow^{f} \\ Y & \overset{g}{\longrightarrow} & Z \end{array}$$

Satz 1.6 *Gegeben seien zwei Abbildungen* $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. *Die folgende Identität gilt für die Urbildabbildungen:*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Beweis. Nach Definition bilden die Urbildabbildungen f^{-1} und g^{-1} wie folgt ab:

$$2^X \xleftarrow{g^{-1}} 2^Y \xleftarrow{f^{-1}} 2^Z,$$

so dass $g^{-1} \circ f^{-1}$ wohldefiniert ist und

$$2^X \overset{g^{-1}\circ f^{-1}}{\longleftarrow} 2^Z.$$

Aus $X \xrightarrow{f\circ g} Z$ folgt, dass

$$2^X \overset{(f\circ g)^{-1}}{\longleftarrow} 2^Z.$$

Jetzt können wir die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$ vergleichen. Es gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$

$$\begin{aligned} x \in (f \circ g)^{-1}(A) &\Leftrightarrow f \circ g(x) \in A \\ &\Leftrightarrow f(g(x)) \in A \\ &\Leftrightarrow g(x) \in f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in g^{-1} \circ f^{-1}(A), \end{aligned}$$

woraus die Identität $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ folgt. ∎

Umkehrabbildung. Gegeben seien zwei Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$. Dann die beiden Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ wohldefiniert sind und

$$f \circ g : Y \to Y \ , \quad g \circ f : X \to X.$$

Definition. Die Abbildung g heißt *Umkehrabbildung (Umkehrfunktion, inverse Funktion)* von f, falls $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

In diesem Fall ist f auch die Umkehrabbildung von g.

Jetzt besprechen wir die Bedingungen für Existenz der Umkehrabbildung.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *bijektiv* falls

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y.$$

Satz 1.7 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ hat eine Umkehrabbildung genau dann, wenn f bijektiv ist.*

Beweis. Hat f eine Umkehrabbildung g, so gelten $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, d.h.

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y \tag{1.7}$$

und

$$g(f(x)) = x \ \ \forall x \in X. \tag{1.8}$$

Es folgt aus (1.7), dass $f(x) = y$ für mindestens ein x, nämlich für $x = g(y)$, erfüllt ist. Zeigen wir jetzt, dass es höchstens ein Element x mit $f(x) = y$ gibt. Gilt $f(x) = y$, so erhalten wir aus (1.8)

$$x = g(f(x)) = g(y),$$

so dass x eindeutig bestimmt ist. Damit ist f bijektiv.

Umgekehrt, ist f bijektiv, so definieren wir die Abbildung $g : Y \to X$ wie folgt: für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so setzen wir $g(y) = x$. Dann gelten

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

woraus $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ folgen. Damit hat f die Umkehrabbildung. ∎

Existiert die Umkehrfunktion von f, so bezeichnet man sie mit f^{-1}, d.h.

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y \text{ und } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X .$$

Man soll die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ mit der Urbildabbildung $f^{-1} : 2^Y \to 2^X$ nicht verwechseln, obwohl sie identisch bezeichnet werden. In der folgenden Definition benutzen wir die Urbildabbildung, die immer wohldefiniert ist.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *surjektiv* falls $\forall\ y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ mindestens ein Element enthält. Die Abbildung f heißt *injektiv* falls $\forall y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ höchstens ein Element enthält.

Behauptung. *Eine Abbildung f is bijektiv genau dann, wenn f ist surjektiv und injektiv.*

Beweis. Die Abbildung f ist surjektiv und injektiv genau dann, wenn für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ mindestens und höchstens ein Element enthält, d.h. genau ein Element, was äquivalent zur Bijektivität ist. ∎

Sei x das einzige Element im Urbild $f^{-1}(\{y\})$, d.h. $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Nach Definition der Umkehrabbildung f^{-1}, we haben $f^{-1}(y) = x$. Wir sehen, dass die Umkehrabbildung und die Urbildabbildung übereinstimmen. Kombinieren mit dem Satz 1.6 ergibt das folgende.

Behauptung. *Gegeben seien zwei bijektive Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Die folgende Identität gilt für die Umkehrabbildungen*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
20.04.12

1.2 Axiomensystem von reellen Zahlen

Hier definieren wir axiomatisch die *Menge von reellen Zahlen.* Eine Menge $\mathbb{R}$ heißt die Menge von reellen Zahlen und ihre Elemente heißen reelle Zahlen falls die folgenden vier Gruppen von Axiomen erfüllt sind.

Axiome der Addition. Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ ist die *Summe* $x + y$ definiert als Element von $\mathbb{R}$. Die Abbildung (Operation)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$

heißt *Addition* und erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. (Das Nullelement) Es existiert ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$x + 0 = 0 + x = x\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. (Das Negative) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element $-x \in \mathbb{R}$ (das Negative von x), so dass
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. (Assoziativgesetz für $+$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. (Kommutativgesetz für $+$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x + y = y + x.$$

Bemerkung. Betrachten wir die Potenzmenge $M = 2^I$ wobei I eine Grundmenge ist, und definieren wir die Addition auf M als Vereinigung $\cup$. Offensichtlich gilt das Axiom 1 mit dem Nullelement $\emptyset$, da $x \cup \emptyset = x$. Die Axiome 3 und 4 gelten auch, aber das Axiom 2 fehlt: die Identität $x \cup (-x) = \emptyset$ kann für nichtleere Menge x nicht gelten.

Axiome der Multiplikation. Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ ist das *Produkt* $x \cdot y$ (auch mit xy bezeichnet) definiert als Element von $\mathbb{R}$. Die Abbildung (Operation)
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$$
heißt *Multiplikation* und erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. (Einheitselement) Es existiert ein Element $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. (Das Inverse) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x), so dass
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. (Assoziativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4. (Kommutativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

5. (Distributivgesetz) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Eine Menge K (statt $\mathbb{R}$), wo die Operationen Addition und Multiplikation definiert sind und die obigen Axiome erfüllen, heißt *Körper*. Die erste zwei Gruppen von Axiomen heißen *Körperaxiome*. Deshalb ist $\mathbb{R}$ ein Körper. Weitere Beispiele von Körper betrachten wir später.

Bemerkung. Betrachten wir wieder die Potenzmenge $M = 2^I$ und definieren die Multiplikation auf M als Durchschnitt $\cap$. Offensichtlich gilt das Axiom 1 mit dem Einheitselement I, da $x \cap I = x$. Die Axiome $3, 4, 5$ gelten auch, aber das Axiom 2 fehlt: die Identität $x \cap x^{-1} = I$ gilt nicht für echte Teilmengen x von I.

Anordnungsaxiome. Zwischen Elementen von $\mathbb{R}$ ist eine Relation $\leq$ definiert, d.h. für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ ist $x \leq y$ entweder wahr oder falsch. Diese Relation heißt *Ungleichheit* und erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. (Reflexivität) $x \leq x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. (Antisymmetrie) $x \leq y \ \wedge \ y \leq x \Rightarrow x = y$.

3. (Transitivität) $x \leq y \ \wedge \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

4. (Vergleichbarkeit) Für je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y \ \vee \ y \leq x$.

5. (Anordnung und Addition) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \ \ \forall z \in \mathbb{R}$

6. (Anordnung und Multiplikation) $0 \leq x \ \wedge \ 0 \leq y \ \Rightarrow \ 0 \leq x \cdot y$.

Eine Menge A (statt $\mathbb{R}$) wo die Relation $\leq$ definiert ist und die Anordnungsaxiome $1 - 4$ erfüllt, heißt *total angeordnet*. In diesem Fall heißt $\leq$ die *Anordnungsrelation*. Deshalb ist $\mathbb{R}$ eine total angeordnete Menge. Die Anordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ hat die zusätzlichen Eigenschaften, die in den Axiomen 5 und 6 dargestellt werden und die die Beziehungen zwischen der Ungleichheit und den arithmetischen Operationen $\cdot$ und $+$ bestimmen.

Bemerkung. Auf der Potenzmenge $M = 2^I$ definieren wir die Relation $\leq$ als Inklusion $\subset$. Offensichtlich gelten die Axiome $1 - 3$. Die Axiome $5, 6$ gelten auch, vorausgesetzt, dass Addition bzw Multiplikation von Mengen als $\cup$ bzw $\cap$ wie früher definiert werden. Das Axiom 2 fehlt allerdings: es kann sein, dass $x \not\subset y$ und $y \not\subset x$.

Vollständigkeitsaxiom. Seien X, Y nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft dass $x \leq y$ für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ so dass $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Man stellt die reellen Zahlen dar als die Punkte auf einer waagerechten Gerade (obwohl eine Gerade noch nicht definiert ist!). Die Punkte am links sind immer kleiner als die Punkte am rechts, so dass die Vergleichbarkeit gilt. Die Vollständigkeitsaxiom bedeutet folgendes: liegt die ganze Menge X links von Y, so existiert ein Punkt c zwischen X und Y, d.h. ein Punkt, der X und Y trennt. Man kann es auch so vorstellen, dass die Gerade keine Löcher enthält.

Bemerkung. Betrachten wir noch einmal die Potenzmenge $M = 2^I$ mit Operationen $\cup, \cap$ und mit Relation $\subset$. Wir behaupten, dass das Vollständigkeitsaxiom gilt für M. In der Tat, gegeben sind zwei Teilmengen X und Y von M mit Eigenschaft, dass $x \subset y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$, definieren wir das Element $c \in M$ durch

$$c = \bigcup_{x \in X} x.$$

Offensichtlich gilt $x \subset c$ für alle $x \in X$. Die Voraussetzung, dass $x \subset y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$, impliziert, dass $c \subset y$ für alle $y \in Y$, so dass $x \subset c \subset y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt. Auch die Menge $c' = \bigcap_{y \in Y} y$ trennt X und Y.

Folgerungen aus den Axiomen der Addition. Jetzt zeigen wir, wie man aus den Axiomen die üblichen algebraischen Regeln bzw die weiteren Eigenschaften von reellen Zahlen gewinnt.

- *Das Nullelement ist eindeutig bestimmt.*

Sei $0'$ ein anderes Nullelement. Dann haben wir $0' + 0 = 0$ und $0' + 0 = 0'$ woraus $0' = 0$ folgt.

- *Das Negative eines $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.*

Seien y und z zwei Negative von x. Dann erhalten wir

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z,$$

so that $y = z$.

Daraus folgt, dass

$$-(-x) = x$$

weil $x + (-x) = 0$ und deshalb x die Definition des Negatives von $-x$ erfüllt. Wir sehen auch, dass

$$-0 = 0$$

weil $0 + 0 = 0$.

- *Die Gleichung $x + a = b$ hat eine eindeutige Lösung $x = b + (-a)$.*

Der Wert $x = b + (-a)$ erfüllt die Gleichung, weil

$$x + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b.$$

Andererseits folgt es aus der Gleichung $x + a = b$, dass

$$x = x + 0 = x + (a + (-a)) = (x + a) + (-a) = b + (-a),$$

daher $x = b + (-a)$.

Die Summe $b + (-a)$ wird auch mit $b - a$ bezeichnet und heißt die *Differenz* von b und a. Die Abbildung (Operation) $(a, b) \mapsto b - a$ heißt *Subtraktion.*

Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation.

- *Das Einheitselement ist eindeutig bestimmt.*
- *Das Inverse eines $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eindeutig bestimmt. Auch gelten*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \quad \textit{und} \quad 1^{-1} = 1.$$

- *Die Gleichung* $x \cdot a = b$ *hat genau eine Lösung* $x = b \cdot a^{-1}$ *vorausgesetzt* $a \neq 0$.

Die Beweise sind analog zum Fall der Addition. Das Produkt $b \cdot a^{-1}$ heißt der *Quotient* von b und a und wird mit b/a oder $\frac{b}{a}$ bezeichnet. Die Abbildung (Operation) $(a, b) \mapsto b/a$ heißt *Division.*

Folgerungen aus dem Distributivgesetz.

- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

Wir haben

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

woraus folgt

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0.$$

- $x \cdot y = 0$ *ergibt* $x = 0$ *oder* $y = 0$. *Äquivalent,* $x \neq 0$ *und* $y \neq 0$ *ergeben* $x \cdot y \neq 0$.

Sei $y \neq 0$. Die Lösung der Gleichung $x \cdot y = 0$ bezüglich x ergibt $x = 0/y = 0 \cdot y^{-1} = 0$.

- $(-1) \cdot x = -x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

Es gilt

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

woraus folgt, dass $(-1) \cdot x$ das Negative von x ist.

Es folgt, dass

$$-(x + y) = -x - y$$

weil

$$-(x + y) = (-1) \cdot (x + y) = (-1) \cdot x + (-1) \cdot y = -x - y.$$

Es gilt auch

$$(-1) \cdot (-x) = -(-x) = x.$$

- $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ *und* $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Die erste Identität wird wie folgt bewiesen:

$$x \cdot (-y) = x \cdot ((-1) \cdot y) = (-1) \cdot (x \cdot y) = -(x \cdot y).$$

Einsetzen hier $-x$ statt x ergibt

$$(-x) \cdot (-y) = -((-x) \cdot y) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

Insbesondere gilt

$$(-1) \cdot (-1) = 1.$$

Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen. Die Relation $x \leq y$ wird auch als $y \geq x$ geschrieben. Gilt $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreibt man $x < y$ oder $y > x$ (echte Ungleichung).

• *$x < y$ und $y \leq z$ ergeben $x < z$.*

Nach der Transitivität haben wir $x \leq z$. Es bleibt nur zu zeigen, dass $x \neq z$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $x = z$. Dann gelten $x \leq y$ und $y \leq x$, und die Antisymmetrie impliziert, dass $x = y$, was nach $x < y$ nicht möglich ist. Analog beweist man, dass $x \leq y$ und $y < z$ ergeben $x < z$.

• *Für je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist genau eine der Relationen $x < y$, $x = y$, $x > y$ wahr.*

Gilt $x = y$, so gelten $x < y$ und $x > y$ nicht. Nun nehmen wir an, dass $x \neq y$. Nach der Vergleichbarkeit gilt $x \leq y$ oder $x \geq y$. Diese zwei Relationen können nicht gleichzeitig gelten, weil sie sonst implizieren $x = y$. Daraus folgt, dass genau eine der Relationen $x < y$ und $x > y$ gilt.

• *$a \leq b$ und $x \leq y$ implizieren $a + x \leq b + y$.*

Wir haben

$$a + x \leq b + x \quad \text{und} \quad b + x \leq b + y$$

woraus $a + x \leq b + y$ folgt.

• *$a \leq b$ und $x < y$ implizieren $a + x < b + y$.*

Wie in dem vorigen Beweis haben wir $b + x \leq b + y$, aber jetzt gilt auch $b + x < b + y$. Wäre es nicht der Fall, dann hätten wir $b + x = b + y$ und damit $x = y$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $x < y$ steht. Dann

$$a + x \leq b + x \quad \text{und} \quad b + x < b + y$$

implizieren $a + x < b + y$.

• *Die folgenden Ungleichungen sind äquivalent:*

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -y\ .$$

Es reicht die folgenden Implikationen zu beweisen:

$$x \leq y \;\Rightarrow\; 0 \leq y - x \;\Rightarrow\; -y \leq -x \;\Rightarrow\; x \leq y. \tag{1.9}$$

Addieren $(-x)$ zu den beiden Seiten von $x \leq y$ ergibt $0 \leq y - x$, und Addieren noch $(-y)$ ergibt $-y \leq -x$. Damit sind die erste und zweite Implikationen in (1.9) bewiesen. Insbesondere haben wir

$$x \leq y \;\Rightarrow\; -y \leq -x.$$

Ersetzen von x mit $-y$ und y mit $-x$ ergibt

$$-y \leq -x \;\Rightarrow\; x \leq y,$$

und damit ist auch die dritte Implikation in (1.9) bewiesen.

• *Die folgenden Ungleichungen sind äquivalent:*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad y - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -y\ . \tag{1.10}$$

Der Beweis ist analog zum vorigen Beweis, nur benutzen wir immer $<$ anstelle $\leq$.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
25.04.12

Positive und negative Zahlen. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *positiv* falls $x > 0$ und *negativ* falls $x < 0$. Anwendung von (1.10) mit $y = 0$ ergibt, dass

$$x \text{ negativ } \Leftrightarrow -x \text{ positiv},$$

und analog

$$x \text{ positiv } \Leftrightarrow -x \text{ negativ}.$$

• *Sind die beiden Zahlen x und y gleichzeitig positiv oder negativ, so ist $x \cdot y$ positiv (insbesondere $x \cdot x > 0$ falls $x \neq 0$). Ist eine von x, y positiv und andere negativ, so ist $x \cdot y$ negativ.*

Falls $x, y > 0$, ergibt das Axiom $x \cdot y \geq 0$. Da $x, y \neq 0$, erhalten wir $x \cdot y \neq 0$, woraus $x \cdot y > 0$ folgt. Falls $x, y < 0$, dann $-x, -y > 0$ und

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y) > 0.$$

Falls $x > 0$ und $y < 0$, dann $-y > 0$,

$$-(x \cdot y) = x \cdot (-y) > 0$$

woraus $x \cdot y < 0$. Das Gleiche gilt wenn $x < 0$ und $y > 0$.

• $1 > 0$ *und* $(-1) < 0$.

Da $1 \neq 0$, gilt $1 \cdot 1 > 0$ nach der vorigen Aussage. Da $1 = 1 \cdot 1$, erhalten wir $1 > 0$. Es folgt, dass $(-1) < 0$.

Behauptung *Sei $x \leq y$. Ist $a \geq 0$, so gilt $a \cdot x \leq a \cdot y$. Ist $a \leq 0$, so gilt $a \cdot x \geq a \cdot y$.*

Die Bedingungen $x \leq y$ und $a \geq 0$ ergeben $y - x \geq 0$ und

$$a \cdot y - a \cdot x = a \cdot (y - x) \geq 0,$$

woraus $a \cdot x \leq a \cdot y$ folgt. Für $a \leq 0$ haben wir $-a \geq 0$ und

$$-(a \cdot x) = (-a) \cdot x \leq (-a) \cdot y = -(a \cdot y),$$

woraus $a \cdot x \geq a \cdot y$ folgt.

• *Sei $x < y$. Ist $a > 0$, so gilt $a \cdot x < a \cdot y$. Ist $a < 0$, so gilt $a \cdot x > a \cdot y$.*

Die Bedingungen $x < y$ und $a > 0$ ergeben $y - x > 0$ und

$$a \cdot y - a \cdot x = a \cdot (y - x) > 0,$$

woraus $a \cdot x < a \cdot y$ folgt. Der Fall $a < 0$ wird wie in dem obigen Beweis behandelt.

• *Ist $x > 0$, so gilt $x^{-1} > 0$. Für alle $x \geq y > 0$ gilt $x^{-1} \leq y^{-1}$. Ist zusätzlich $x > y$, so gilt $x^{-1} < y^{-1}$.*

Da $x \cdot x^{-1} = 1$, ist x^{-1} nicht Null. Wäre $x^{-1} < 0$, so würden wir erhalten

$$1 = x \cdot x^{-1} < 0,$$

was im Widerspruch zu $1 > 0$ steht. Deshalb muss x^{-1} positiv sein.

Für die zweite Aussage bemerken wir, dass $y \le x$ und $x^{-1} > 0$ ergeben

$$x^{-1} \cdot y \le x^{-1} \cdot x = 1$$

und analog

$$\left(x^{-1} \cdot y\right) \cdot y^{-1} \le 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}.$$

Da

$$\left(x^{-1} \cdot y\right) \cdot y^{-1} = x^{-1} \cdot \left(y \cdot y^{-1}\right) = x^{-1},$$

erhalten wir $x^{-1} \le y^{-1}$. Die echte Ungleichung wird analog bewiesen.

Damit haben wir praktisch alle notwendigen "Bausteine" geschafft, mit denen man weiter die elementare Algebra von reellen Zahlen entwickeln kann. Insbesondere haben wir alle grundlegenden Regeln für Umformen von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen bewiesen.

Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom. Sei S eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine reelle Zahl a heißt *obere Schranke* von S falls gilt: $x \le a$ für alle $x \in S$. Analog heißt a *untere Schranke* von S falls gilt: $x \ge a$ für alle $x \in S$.

Definition. Die kleinste obere Schranke von S heißt das *Supremum* (oder *obere Grenze*) von S und wird mit $\sup S$ bezeichnet. Die größte untere Schranke von S heißt das *Infimum* (oder *untere Grenze*) von S und wird mit $\inf S$ bezeichnet.

Supremum und Infimum existieren nicht immer. Zum Beispiel, die Menge $S = \mathbb{R}$ hat weder Supremum noch Infimum. In diesem Fall gibt es sogar keine obere bzw untere Schranke: für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $x = a + 1$ echt grösser als a, so dass a keine obere Schranke ist, und $x = a - 1$ ist echt kleiner als a, so dass a keine untere Schranke ist. Andererseits hat die Menge $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ das Supremum 1 und das Infimum 0.

Es ist klar aus den obigen Definitionen, dass

$$\forall x \in S \qquad \inf S \le x \le \sup S,$$

vorausgesetzt, dass $\sup S$ und $\inf S$ existieren.

Definition. Die Menge S heißt *nach oben (bzw unten) beschränkt* falls S eine obere (bzw untere) Schranke besitzt. Die Menge S heißt *beschränkt* falls S nach oben *und* nach unten beschränkt ist. Die Menge S heißt *halbbeschränkt* falls S nach oben *oder* nach unten beschränkt ist.

Satz 1.8 *Sei S eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist S nach oben beschränkt, so hat S das Supremum. Ist S nach unten beschränkt, so hat S das Infimum. Ist S beschränkt, so hat S das Supremum und das Infimum.*

Beweis. Bezeichnen wir mit T die Menge von oberen Schranken von S. Ist S nach oben beschränkt, so ist T nicht leer. Für alle $x \in S$ und $y \in T$ gilt nach Definition $x \le y$. Das Vollständigkeitsaxiom ergibt: es existiert die Zahl $c \in \mathbb{R}$, die S und T trennt, d.h.

$$x \le c \le y \quad \forall x \in S \quad \forall y \in T.$$

Da $x \le c$ für alle $x \in S$, ist c eine obere Schranke von S und deshalb $c \in T$. Da $c \le y$ für alle $y \in T$, ist c das kleinste Element von T. Nach Definition $\sup S = c$. Die Existenz des Infimums wird analog bewiesen. ∎

Intervalle. Für je zwei reellen Zahlen a, b mit $a < b$ definieren wir die Intervalle wie folgt:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{– offenes Intervall}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{– halboffenes (linksoffenes) Intervall}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{– halboffenes (rechtsoffenes) Intervall}\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{– (abgeschlossenes Intervall)}
\end{aligned}$$

Die Zahlen a, b heißen die Grenzen des Intervalles.

Satz 1.9 *Sei S eines von den obigen Intervallen. Dann ist S nicht leer,*

$$\inf S = a, \qquad \sup S = b.$$

Beweis. Zeigen wir zunächst, dass das Intervall $(0,1)$ nicht leer ist. Setzen wir $2 := 1 + 1$ und bemerken, dass $2 > 1$ weil $1 > 0$. Daraus folgt $0 < 2^{-1} < 1^{-1}$, d.h. $\frac{1}{2} := 2^{-1} \in (0,1)$ und $(0,1)$ nicht leer ist. Für beliebige $a < b$ beweisen wir, dass $c := \frac{1}{2} \cdot (a + b)$ ein Element von (a,b) ist. Wir haben

$$a + b < b + b = 2b,$$

woraus folgt

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b) < b,$$

d.h. $c < b$. Analog beweist man $c > a$ und damit $S \neq \emptyset$.

Beweisen wir jetzt, dass $\inf S = a$. Nach definition von S ist a eine untere Schranke von S. Sei a' noch eine untere Schranke von S. Wir müssen zeigen, dass $a' \le a$. Nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass $a' > a$. Da a' eine untere Schranke von S ist und $c \in S$, erhalten wir $a' \le c$ und damit $a' < b$, woraus folgt $(a, a') \subset (a, b)$. Setzen wir $c' = \frac{1}{2} \cdot (a + a')$ und bemerken, dass nach dem obigen Argument

$$c' \in (a, a') \subset (a, b) \subset S$$

so dass $c' \in S$. Da a' eine untere Schranke von S ist, erhalten wir $a' \le c'$. Andererseits haben wir $c' \in (a, a')$ und somit $c' < a'$. Dieser Widerspruch beschließt den Beweis. Die Identität $\sup S = b$ wird analog bewiesen. ■

Maximum und Minimum.

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Maximum* von S und wird mit $\max S$ bezeichnet, falls $a \in S$ und $x \le a$ für alle $x \in S$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Minimum* von S und wird mit $\min S$ bezeichnet, falls $a \in S$ und $x \ge a$ für alle $x \in S$.

Behauptung. *Existiert* $\max S$, *so existiert auch* $\sup S$ *und gilt* $\max S = \sup S$. *Existiert* $\min S$, *so existiert auch* $\inf S$ *und gilt* $\min S = \inf S$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $\max S$ nach Definition eine obere Schranke von S ist. Beweisen wir, dass $\max S$ die kleinste obere Schranke ist, d.h. das Supremum. Sei a eine andere obere Schranke. Da $\max S \in S$, gilt $\max S \le a$, was zu beweisen war. Analog beweist man, dass $\min S = \inf S$ vorausgesetzt, dass $\min S$ existiert. ∎

Beispiel. Das abgeschlossene Intervall $S = [a, b]$ hat offensichtlich $\max S = a$ und $\max S = b$. Das offene Intervall $S = (a, b)$ hat weder Maximum noch Minimum. In der Tat, existiert $\max S$, so gilt $\max S = \sup S = b$, was in Widerspruch zu $b \notin S$ steht. Analog hat das linksoffene Intervall $[a, b)$ das Minimum a und kein Maximum, und das rechtsoffene Intervall $(a, b]$ das Maximum b und kein Minimum.

Die Zeichen $+\infty$ und $-\infty$. Nach Satz 1.8 existiert $\sup S$ bzw $\inf S$ für jede nach oben bzw nach unten beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}$. Definieren wir jetzt $\sup S$ und $\inf S$ für *alle* Mengen $S \subset \mathbb{R}$ mit Hilfe von den Zeichen $+\infty$ und $-\infty$, die die unendlichen Elemente heißen. Man betrachtet die erweiterte Menge von reellen Zahlen

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

und definiert die Anordnungsrelation $\leq$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt $a \leq b$ falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$ gilt für a, b als Elemente von $\mathbb{R}$;

2. $b = +\infty$ (d.h. $a \leq +\infty$ gilt immer);

3. $a = -\infty$ (d.h. $-\infty \leq b$ gilt immer).

Die Begriffe von oberen bzw unteren Schranken definiert man für nicht leere Teilmengen S von $\overline{\mathbb{R}}$ genau so, wie für Teilmengen von $\mathbb{R}$. Beachten wir, dass $+\infty$ immer eine obere Schranke von S ist, und $-\infty$ – eine untere Schranke. Erhält S das Element $+\infty$ oder ist S nach oben unbeschränkt, so ist $+\infty$ die einzige obere Schranke, woraus folgt

$$\sup S = +\infty.$$

Analog enthält S das Element $-\infty$ oder ist S nach unten unbeschränkt, so haben wir

$$\inf S = -\infty.$$

Für die leere Menge $S = \emptyset$ nehmen wir folgendes nach Definition an:

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Die Motivation dafür ist wir folgt. Für die leere Menge sind alle Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ die obere und untere Schranken. Deshalb ist $-\infty$ die kleinste obere Schranke und $+\infty$ die größte untere Schranke.

Somit sind die Begriffe $\sup S$ und $\inf S$ wohl-definiert für beliebigen Teilmengen S von $\overline{\mathbb{R}}$. Zusammen mit Satz 1.8 erhalten wir die folgende Aussage.

Korollar 1.10 *Jede Teilmenge S von $\mathbb{R}$ (oder sogar von $\overline{\mathbb{R}}$) hat $\sup S$ und $\inf S$ als Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$.*

Der Begriff von Intervall lässt sich auch verallgemeinern zu dem Fall, wenn die Grenzen a, b die Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ sind. Zum Beispiel, für $a \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < +\infty\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty, a] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty < x \leq a\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
[a, +\infty] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq +\infty\right\} = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}.
\end{aligned}$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
27.04.12

Satz 1.9 gilt auch in diesem Fall.

1.3 Ganze Zahlen und vollständige Induktion

Natürliche Zahlen. In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff von natürlichen Zahlen. Man erwartet, dass die Menge $\mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $1 \in \mathbb{N}$
- $x \in \mathbb{N}$ ergibt $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Jedoch bestimmen these diese zwei Eigenschaften die Menge $\mathbb{N}$ nicht eindeutig. Zum Beispiel, die ganze Menge $\mathbb{R}$ erfüllt sie. Um eine vollständiger Definition von $\mathbb{N}$ zu geben, führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv* falls $x \in S$ ergibt $x + 1 \in S$.

Zum Beispiel ist die ganze Menge $\mathbb{R}$ induktiv. Auch die Intervalle $(a, +\infty)$ und $[a, +\infty)$ sind induktive Mengen, während die beschränkten Intervalle nicht induktiv ist.

Definition. Die Menge $\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt von allen induktiven Mengen die 1 enthalten. Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen *natürliche Zahlen.*

Satz 1.11 *Die Menge $\mathbb{N}$ ist induktiv. Folglich ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge die 1 enthält.*

Das Wort "kleinste" bezieht sich auf Inklusion, d.h. $\mathbb{N} \subset S$ für jede andere induktive Menge S die 1 enthält.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge von allen induktiven Mengen, die 1 enthalten. Die Familie $\mathcal{F}$ ist nicht leer da $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$. Nach Definition haben wir

$$\mathbb{N} = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S. \tag{1.11}$$

Da jedes S induktiv ist, so erhalten wir

$$x \in \mathbb{N} \implies x \in S \quad \forall S \in \mathcal{F} \implies x + 1 \in S \quad \forall S \implies x + 1 \in \mathbb{N},$$

d.h. $\mathbb{N}$ ist induktiv. Da $1 \in S$ für jedes $S \in \mathcal{F}$, daraus folgt, dass $1 \in \mathbb{N}$, insbesondere $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$. Die Menge $\mathbb{N}$ ist das kleinste Element von $\mathcal{F}$, da nach (1.11) $\mathbb{N} \subset S$ für jedes $S \in \mathcal{F}$. $\blacksquare$

Beispiel. Das Intervall $[1, +\infty)$ ist eine induktive Menge die 1 enthält. Es folgt, dass $\mathbb{N} \subset [1, +\infty)$. Insbesondere ist 1 die kleinste natürliche Zahl. Da $1 \in \mathbb{N}$, daraus folgt auch $2 := 1 + 1 \in \mathbb{N}$, $3 := 2 + 1 \in \mathbb{N}$ usw.

Induktionsprinzip. Häufig braucht man eine Aussage beweisen, die von einem natürlichen Parameter n abhängt. Bezeichnen wir diese Aussage mit $A(n)$. Satz 1.11 liefert die folgende Methode um $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, die aus den folgenden zwei Schritten besteht:

(i) *Induktionsanfang*: beweisen, dass $A(1)$ ist wahr.

(ii) *Induktionsschritt*: beweisen, dass $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Im zweiten Schritt nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*. Hat man die Schritte (i) und (ii) durchgeführt, so kann man beschließen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, wie es in der folgenden Behauptung gesagt wird:

Behauptung. (Induktionsprinzip) *Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- *$A(1)$ ist wahr;*
- *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Bezeichnen wir mit S die Menge von allen n, für die $A(n)$ wahr ist. Nach dem Induktionsanfang $1 \in S$, und nach dem Induktionsschritt ist S induktiv. Nach Definition von $\mathbb{N}$ gilt $\mathbb{N} \subset S$, d.h. $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Die Beweismethode, die das Induktionsprinzip benutzt, heißt die *vollständige Induktion*. Der folgende Satz wird mit Hilfe von vollständiger Induktion bewiesen.

Satz 1.12 *Seien n, m zwei natürliche Zahlen. Dann das folgende gilt.*

(a) $n + m \in \mathbb{N}$

(b) $nm \in \mathbb{N}$

(c) *Ist $n > m$, so gilt $n - m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. (a) Wir beweisen per Induction nach n, dass $n + m \in \mathbb{N}$. Wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ und bezeichnen with $A(n)$ die Aussage, dass $n + m \in \mathbb{N}$.

- Induktionsanfang. $A(1)$ ist die Aussage, dass $1 + m \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist und $m \in \mathbb{N}$, daraus folgt, dass $m + 1 \in \mathbb{N}$, was zu beweisen war.

- Induktionsschritt. Die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ ist: $n + m \in \mathbb{N}$, die Induktionsbehauptung $A(n+1)$ ist: $(n+1) + m \in \mathbb{N}$. Ist $A(n)$ wahr, d.h. $n + m \in \mathbb{N}$, dann auch $(n+m) + 1 \in \mathbb{N}$, woraus folgt
$$(n+1) + m = (n+m) + 1 \in \mathbb{N}.$$
Damit ist $A(n+1)$ bewiesen. Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Beweisen wir per Induktion nach n, dass $nm \in \mathbb{N}$.

- Induktionsanfang. Ist $n = 1$, dann $nm = m \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt. Ist es schon bekannt, dass $nm \in \mathbb{N}$, dann nach (a)
$$(n+1)\, m = nm + m \in \mathbb{N}$$
da die beiden Zahlen nm und m natürlich sind.

(c) Beweisen wir zunächst diese Behauptung für $m = 1$, d.h. $n > 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$. Das letztere ist äquivalent zu der folgenden Aussage $A(n)$:

$$\text{entweder } n = 1 \text{ oder } n - 1 \in \mathbb{N},$$

die wir per Induktion nach n beweisen.

- Induktionsanfang. $A(1)$ ist offensichtlich wahr.
- Induktionsschritt. Ist $A(n)$ wahr, so folgt $A(n+1)$ aus $(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$.

Beweisen wir per Induktion nach m die neue Aussage $A(m)$: für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.

- Induktionsanfang. $A(1)$ bedeutet: für jedes $n > 1$ gilt $n - 1 \in \mathbb{N}$, was schon bewiesen ist.
- Induktionsschritt. Angenommen, dass $A(m)$ wahr ist, beweisen wir $A(m+1)$, d.h.
$$n \in \mathbb{N} \text{ und } n > m + 1 \Rightarrow n - (m+1) \in \mathbb{N}.$$
Da $n > m$, erhalten with nach Induktionsvoraussetzung, dass $n - m \in \mathbb{N}$. Da
$$n - (m+1) = n + (-m) + (-1) = (n - m) - 1,$$
erhalten wir $n - m > 1$ und damit, nach dem Induktionsanfang, $(n-m) - 1 \in \mathbb{N}$, woraus $n - (m+1) \in \mathbb{N}$ folgt.

■

Ganze Zahlen. Bezeichnen with mit $\mathbb{Z}$ die Vereinigung von $\{0\}$, $\mathbb{N}$, und von den Negativen von $\mathbb{N}$, d.h.
$$\mathbb{Z} := \{0\} \cup \mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}).$$
Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen die *ganze Zahlen* und $\mathbb{Z}$ heißt die Menge von ganzen Zahlen. Offensichtlich
$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}.$$

Korollar 1.13 *Für jede $x, y \in \mathbb{Z}$ sind $x + y$, $x - y$, xy auch in $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Da $x-y=x+(-y)$ und $(-y)\in\mathbb{Z}$, es reicht zu beweisen, dass xy und $x+y$ ganze Zahlen sind. Ist $x=0$ oder $y=0$, so ist die Aussage trivial. Sonst gibt es natürliche Zahlen n,m mit $x=\pm n$ und $y=\pm m$. Betrachten wir, zum Beispiel, den Fall $x=n$ und $y=-m$. Dann $nm\in\mathbb{N}$ und $xy=n(-m)=-nm\in\mathbb{Z}$. Beweisen wir jetzt, dass $x+y=n-m$ ist eine ganze Zahl. Ist $n=m$ dann $n-m=0\in\mathbb{Z}$. Ist $n>m$ dann $n-m\in\mathbb{N}$ nach Satz 1.12. Ist $n<m$, dann $m-n\in\mathbb{N}$ und $n-m=-(m-n)\in\mathbb{Z}$.

Die anderen Fälle von Vorzeichen in $x=\pm n$ und $y=\pm m$ werden analog betrachtet. ■

Korollar 1.14 *Für $x,y\in\mathbb{Z}$ ist die Bedingung $x>y$ äquivalent zu $x\geq y+1$. Folglich, für jedes $n\in\mathbb{Z}$ enthält das Intervall $(n,n+1)$ keine ganze Zahl.*

Beweis. Sei $x>y$. Da $x-y\in\mathbb{Z}$ und $x-y>0$, erhalten wir $x-y\in\mathbb{N}$. Da 1 die kleinste natürliche Zahl ist, folgt $x-y\geq 1$ und damit $x\geq y+1$. Die Implikation in der Rückrichtung ist offensichtlich: $x\geq y+1$ und $y+1>y$ ergeben $x>y$.

Ist m eine ganze Zahl in $(n,n+1)$, so gilt $m>n$ und somit $m\geq n+1$, was im Widerspruch zu $m<n+1$ steht. ■

Behauptung. (Verallgemeinerung des Induktionsprinzipes) *Sei n_0 eine ganze Zahl und sei $A(n)$ eine von n abhängige Aussage. Angenommen ist das folgende:*

- *$A(n_0)$ ist wahr.*
- *Für jedes $n\in\mathbb{Z}$ mit $n\geq n_0$ gilt $A(n)\Rightarrow A(n+1)$.*

Dann gilt $A(n)$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ mit $n\geq n_0$.

1.4 Endliche Folgen und Mengen

Für je zwei ganzen Zahlen n,m mit $n\leq m$, betrachten wie die Menge

$$\{k\in\mathbb{Z}: n\leq k\leq m\}=[n,m]\cap\mathbb{Z}$$

von ganzen Zahlen zwischen n und m und bezeichnen sie kurz mit $\{n,...,m\}$.

Definition. Eine *endliche Folge* ist eine Abbildung $a:\{n,...,m\}\to\mathbb{R}$. Man bezeichnet den Wert $a(k)$ auch mit a_k und die Folge a mit $\{a_k\}_{k=n}^m$ oder kurz mit $\{a_k\}$.

Die Summe und das Produkt von Elementen der Folge. Definieren wir die Summe $\sum_{k=n}^m a_k$ der Folge $\{a_k\}$ per Induction nach m wie folgt:

- ist $m=n$ dann setzen wir $\sum_{k=n}^m a_k=a_n$;
- ist $\sum_{k=n}^m a_k$ schon definiert, so setzen wir

$$\sum_{k=n}^{m+1} a_k=\left(\sum_{k=n}^m a_k\right)+a_{m+1}. \tag{1.12}$$

Man schreibt auch

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + ... + a_m.$$

Alle Eigenschaften der Summe $\sum_{k=n}^{m} a_k$ werden per Induktion bewiesen. Zum Beispiel, sind alle a_k gleich a, so gilt

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = (m - n + 1)\, a.$$

Analog definiert man das Produkt $\prod_{k=n}^{m} a_k$ der Folge $\{a_k\}$ mit:

- $\prod_{k=n}^{n} a_k = a_n$
- $\prod_{k=n}^{m+1} a_k = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right) \cdot a_{m+1}.$

Man schreibt auch

$$\prod_{k=n}^{m} a_k = a_n \cdot a_{n+1} \cdot ... \cdot a_m.$$

Betrachten wir die Folge $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ mit $a_k = a \in \mathbb{R}$ für alle k und definieren wir die *Potenzen* von a mit

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ times}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Äquivalent kann man die Potenzen a^n direkt per Induktion definieren:

$$a^1 = a \ \text{ und } \ a^{n+1} = a^n \cdot a \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Man beweist per Induktion die folgenden Identitäten:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \tag{1.14}$$

Ist $a \neq 0$, so definiert man die Potenzen a^n auch für nicht-positive ganze n wie folgt:

$$a^0 := 1 \ \text{ und } \ a^n := \left(a^{-1}\right)^{-n} \ \text{ für } n < 0.$$

A.Grigorian Analysis 1 SS2012 02.05.12

Die Identitäten (1.14) gelten in diesem Fall auch für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Maximum und Minimum der Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Satz 1.15 *Sei S eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Ist S nach oben beschränkt, so existiert* $\max S$. *Ist S nach unten beschränkt, so existiert* $\min S$. *Insbesondere existiert* $\min S$ *für jede nicht-leere Teilmenge von* $\mathbb{N}$.

Beweis. Sie S nach oben beschränkt. Nach Satz 1.8 existiert $\sup S$ als Element von $\mathbb{R}$. Setzen wir $a = \sup S$ und beweisen wir, dass $a \in S$, woraus die Identität $a = \max S$ folgen wird. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a \notin S$. Da $a - 1$ keine obere Schranke von S ist, dann existiert $n \in S$ mit $n > a - 1$. Da a eine obere

Schranke von S ist, so haben wir $n \leq a$. Da $a \notin S$ und $n \in S$, erhalten wir $a \neq n$ und somit $n < a$. Deshalb haben wir gezeigt, dass

$$a - 1 < n < a.$$

Nach Korollar 1.14 enthält das Intervall $(n, n+1)$ keine ganze Zahl, insbesondere kein Element von S. Da

$$n + 1 > a = \sup S,$$

auch das Intervall $[n+1, +\infty)$ enthält kein Element von S. Daraus folgt, dass das Intervall $(n, +\infty)$ kein Element von S enthält und somit n eine obere Schranke von S ist, was im Widerspruch mit $n < a = \sup S$ steht.

Der Fall von $\min S$ wird analog behandelt.

Die Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind immer nach unten von 1 beschränkt, woraus die zweite Aussage folgt. ■

Satz 1.16 (Archimedisches Axiom) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$n \leq x < n + 1. \tag{1.15}$$

Die Zahl n ist damit die größte ganze Zahl mit $n \leq x$. Diese Zahl n wird mit $[x]$ (x in den rechteckigen Klammern) bezeichnet und heißt die *Gaußklammer* von x. Der Wert von n heißt auch der *Ganzzahlanteil* von x. Zum Beispiel, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ und $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$. Für ganze Zahlen x gilt $[x] = x$.

Beweis. Für gegebenes $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Zeigen wir zunächst, dass diese Menge nicht leer ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass S leer ist. Dann gilt $k > x$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, d.h. x eine untere Schranke von $\mathbb{Z}$ ist. Somit ist $\mathbb{Z}$ nach unten beschränkt und nach Satz 1.15 hat $\mathbb{Z}$ das Minimum. Sei $m = \min \mathbb{Z}$. Aber dann ist $m - 1$ auch in $\mathbb{Z}$, was im Widerspruch mit $m - 1 < \min \mathbb{Z}$ steht.

Da S nicht-leer ist und nach oben mit x beschränkt, erhalten wir nach Satz 1.15, dass S das Maximum hat. Setzen wir $n = \max S$. Da $n \in S$, erhalten wir nach Definition von S, dass $n \leq x$. Da $n + 1 > n = \max S$ und deshalb $n + 1 \notin S$, erhalten wir, dass $n + 1 > x$. Damit erfüllt n die Bedingungen (1.15).

Um die Eindeutigkeit von n zu beweisen, nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass es noch ein $n' \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n' \leq x < n' + 1.$$

Daraus folgt, dass $n' < n + 1$ und somit nach Korollar 1.14 $n' \leq n$. Analog sieht man, dass $n \leq n'$, woraus $n = n'$ folgt. ■

Endliche Mengen.

Definition. Eine nicht-leere Menge X heißt *gleichmächtig* zu einer Menge Y falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. In diesem Fall schreibt man $X \sim Y$. Die leere Menge $\emptyset$ ist gleichmächtig zu sich selbst, d.h. $\emptyset \sim \emptyset$.

Behauptung. *Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie erfüllt die folgenden Bedingungen:*

- $X \sim X$
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- $X \sim Y \ \wedge \ Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z.$

Beweis. Der Fall mit leeren Mengen ist trivial, so nehmen wir an, dass alle Mengen X, Y, Z nicht leer sind. Da die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_X : X \to X$ bijektiv ist, haben wir $X \sim X$. Gilt $X \sim Y$, so existiert eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ wohldefiniert und bijektiv, woraus $Y \sim X$ folgt. Existieren die bijektiven Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, woraus $X \sim Z$ folgt. ∎

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_n$ die folgende Menge

$$\mathcal{E}_n := \{1, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\},$$

und $\mathcal{E}_0 = \emptyset$. Es ist klar, dass $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_m$ für $n \leq m$. Bemerken wir auch folgendes:

- Ist $a \in \mathcal{E}_n$, so gilt $\mathcal{E}_n \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_{n-1}$.
- Ist $a \notin \mathcal{E}_n$, so gilt $\mathcal{E}_n \cup \{a\} \sim \mathcal{E}_{n+1}$.

Definition. Eine Menge S heißt *endlich* falls entweder $S = \emptyset$, oder $S \sim \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Die Bedingung $S \sim \mathcal{E}_n$ bedeutet die Existenz einer Bijektion $f : \mathcal{E}_n \to S$, d.h. man kann die Menge S mit den Zahlen $1, ..., n$ aufzählen.

Definition. Ist $S \sim \mathcal{E}_n$, so sagen wir: die Anzahl von Elementen von S ist n, oder die *Kardinalität* von S ist n. Man bezeichnet die Kardinalität von S mit $\operatorname{card} S$ oder mit $|S|$ (Betrag von S). Ist S leer, so setzen wir $\operatorname{card} S = 0$.

Zunächst zeigen wir, dass die Kardinalität wohl-definiert ist, d.h. $S \sim \mathcal{E}_n$ und $S \sim \mathcal{E}_m$ sind mit verschiedenen n, m unmöglich.

Satz 1.17 *Sind n, m natürliche Zahlen mit $n > m$, so gibt es keine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_n$ nach $\mathcal{E}_m$. Insbesondere sind $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}_m$ gleichmächtig genau dann, wenn $n = m$.*

Beweis. Soll eine injektive Abbildung $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ mit $n > m$ existieren, so ergibt die Beschränkung $f|_{\mathcal{E}_{m+1}}$ eine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{m+1}$ nach $\mathcal{E}_m$. Deshalb reicht es zu beweisen, dass es keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_{m+1} \to \mathcal{E}_m$ gibt. Diese Aussage beweisen wir per Induktion nach m.

Induktionsanfang für $m = 1$. Es gibt nur eine Abbildung $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ da $f(k)$ gleich 1 für $k = 1, 2$ sein soll, und diese Abbildung ist nicht injektiv.

Induktionsschritt von m nach $m + 1$. Sei

$$f : \mathcal{E}_{m+2} \to \mathcal{E}_{m+1}$$

eine injektive Abbildung. Setzen with $a = f(m+2)$. Dann gilt

$$\forall k \in \mathcal{E}_{m+1} \quad f(k) \in \mathcal{E}_{m+1} \setminus \{a\},$$

und deshalb ergibt die Beschränkung von f auf $\mathcal{E}_{m+1}$ eine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{m+1}$ nach $\mathcal{E}_{m+1} \setminus \{a\}$. Da

$$\mathcal{E}_{m+1} \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_m,$$

so existiert eine injektive Abbildung $\mathcal{E}_{m+1} \to \mathcal{E}_m$, die die Verkettung der folgenden Abbildungen ist:

$$\mathcal{E}_{m+1} \overset{\text{injektiv}}{\longrightarrow} \mathcal{E}_{m+1} \setminus \{a\} \overset{\text{bijektiv}}{\longrightarrow} \mathcal{E}_m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert allerdings keine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{m+1}$ nach $\mathcal{E}_m$. Mit diesem Widerspruch ist die erste Aussage bewiesen.

Ist $n = m$ so sind $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}_m$ offensichtlich gleichmächtig. Ist $n > m$, so existiert keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ und um so mehr keine bijektive Abbildung $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$. Somit sind $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}_m$ nicht gleichmächtig. Im Fall $n < m$ sind $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}_m$ analog nicht gleichmächtig. ■

Die Aussage von Satz 1.17 heißt das *Schubfachprinzip*: sind n Objekten zwischen m Schubfächer verteilt, wobei $n > m$, so gibt es ein Schubfach mit mehr als ein Objekt. Es gibt viele interessante Anwendungen von diesem Prinzip.

Korollar 1.18 *Eine injektive Abbildung $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ ist immer bijektiv.*

Beweis. Sei $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ eine injektive Abbildung, die nicht surjektiv ist, d.h. es existiert ein $a \in \mathcal{E}_n$ mit $f(k) \neq a$ für alle $k \in \mathcal{E}_n$. Erweitern wir f auf $\mathcal{E}_{n+1}$, indem wir setzen

$$f(n+1) = a.$$

Dann ist f eine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{n+1}$ nach $\mathcal{E}_n$, was nach Satz 1.17 nicht möglich ist. ■

Im Beweis des nächsten Satzes benutzen wir den Begriff von *disjunkter* Vereinigung.

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Die disjunkte Vereinigung $A \sqcup B$ ist gleich die Vereinigung $A \cup B$, vorausgesetzt $A \cap B = \emptyset$. Sonst ist $A \sqcup B$ nicht definiert.

Satz 1.19 (a) *Eine Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.*

(b) *Die Vereinigung zweier endlichen Mengen ist endlich.*

(c) *Kartesisches Produkt zweier endlichen Mengen ist endlich.*

Beweis. (a) Es reicht zu beweisen, dass jede Teilmenge von $\mathcal{E}_n$ endlich ist.

Induktionsanfang. Ist $n = 1$, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{E}_1 = \{1\}$ entweder $\mathcal{E}_1$ oder $\emptyset$, und die beiden sind endlich.

Induktionsschritt. Angenommen sei, dass jede Teilmenge von $\mathcal{E}_n$ endlich ist. Beweisen wir, dass jede Teilmenge $S \subset \mathcal{E}_{n+1}$ endlich ist. Betrachten wir zwei Fälle.

Gilt $S \subset \mathcal{E}_n$, so ist S endlich nach Induktionsvoraussetzung.

Gilt $S \not\subset \mathcal{E}_n$, so enthält S die Zahl $n + 1$. Die Menge $S' = S \setminus \{n+1\}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{E}_n$. Ist S' leer, so gilt $S = \{n+1\}$ und $S \sim \mathcal{E}_1$. Ist S' nicht leer, so ist S' endlich nach Induktionsvoraussetzung, d.h. $S' \sim \mathcal{E}_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$S = S' \sqcup \{n+1\} \sim \mathcal{E}_{m+1},$$

was die Endlichkeit von S beweist.

(b) Für zwei Mengen A, B gilt

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$$

Nach Teil (a) sind alle Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ endlich. Deshalb reicht es zu beweisen, dass eine disjunkte Vereinigung zweier Mengen endlich ist. Seien A, B zwei disjunkte Mengen mit

$$A \sim \mathcal{E}_n \quad \text{und} \quad B \sim \mathcal{E}_m. \tag{1.16}$$

Betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}'_m = \{n+1, ..., n+m\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{E}_m \sim \mathcal{E}'_m$ (mit Bijektion $k \mapsto n+k$) somit $B \sim \mathcal{E}'_m$. Die Mengen $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}'_m$ sind disjunkt, woraus folgt, dass

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_n \sqcup \mathcal{E}'_m.$$

Andererseits haben wir

$$\mathcal{E}_n \sqcup \mathcal{E}'_m = \{1, ..., n\} \cup \{n+1, ..., n+m\} = \mathcal{E}_{n+m},$$

woraus folgt

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_{n+m}$$

und die Endlichkeit von $A \sqcup B$.

Bemerkung. Es folgt aus dem Beweis von (b), dass für disjunkte endlichen Mengen A und B gilt

$$\operatorname{card}(A \sqcup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Für allgemeinen endlichen Mengen A und B gilt

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

(c) Wir zeigen per Induktion nach m, dass unter den Bedingungen (1.16),

$$A \times B \sim \mathcal{E}_{nm}. \tag{1.17}$$

Ist $m = 1$, so gilt $A \times B \sim A$ woraus die Aussage folgt. Für Induktionsschritt mit $B \sim \mathcal{E}_{m+1}$, wählen wir ein Element $x \in B$ und betrachten die Menge $B' = B \setminus \{x\}$, so dass $B' \sim \mathcal{E}_m$. Nach Induktionsvoraussetzung,

$$A \times B' \sim \mathcal{E}_{nm}.$$

Auch haben wir

$$A \times \{x\} \sim A \sim \mathcal{E}_n.$$

Da

$$A \times B = (A \times B') \sqcup (A \times \{x\}),$$

erhalten wir nach (b)

$$A \times B \sim \mathcal{E}_{nm+m} = \mathcal{E}_{n(m+1)},$$

was zu beweisen war. $\blacksquare$

Bemerkung. Man schreibt die Relation (1.17) in der Form

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A) \operatorname{card}(B).$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
04.05.12

Beispiel – die Restklassen modulo m. Dieses Beispiel bedient drei Begriffe: Äquivalenzrelation, Archimedisches Axiom, und Schubfachprinzip.

Gegeben seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Die Zahl m teilt die Zahl n falls $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$. Man schreibt in diesem Fall $m|n$ oder $n \vdots m$ (n ist teilbar durch m).

Man sagt, dass zwei ganze Zahlen a, b *kongruent modulo* m sind und schreibt

$$a \equiv b \mod m$$

falls $m| (a - b)$. Die Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation, und die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen die *Restklassen modulo* m. Die Restklasse von $a \in \mathbb{Z}$ wird mit $[a]$ bezeichnet. Die Restklasse $[a]$ ist die Menge von allen ganzen Zahlen x mit $m| (x - a)$. Zum Beispiel, $[0]$ ist die Menge von ganzen Zahlen, die teilbar durch m sind.

Die Restklassen $[0], [1], ..., [m - 1]$ sind alle unterschiedlich, da für verschiedene $a, b \in \{0, ..., m - 1\}$ die Differenz $|a - b|$ auch zwischen 0 und $m - 1$ ist und deshalb durch m nicht teilbar ist.

Wir behaupten, dass es keine andere Restklasse gibt. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ existiert nach Archimedischem Axiom ein $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$q \leq \frac{x}{m} < q + 1$$

(q ist die Gaußklammer von $\frac{x}{m}$). Die Zahl $r = x - mq$ ist ganz und erfüllt $0 \leq r < m$, woraus folgt

$$r \in \{0, ..., m - 1\}.$$

Offensichtlich ist r der Rest der ganzzahligen Division von x durch m. Da $x \equiv r \mod m$, so erhalten wir $[x] = [r]$ und somit $[x] \in \{[0], ..., [m - 1]\}$.

Die Menge $\{[0], ..., [m - 1]\}$ von Restklassen $\mathrm{mod}\, m$ wird mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\operatorname{card} \mathbb{Z}_m = m$.

Als ein Beispiel von Anwendung von Schubfachprinzip, beweisen wir die folgende Behauptung.

Behauptung. *Ist M eine n-elementige Menge von ganzen Zahlen mit $n > m$, so existieren zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ derart, dass $m| (x - y)$.*

Beweis. Betrachten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{Z}_m \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Da $\operatorname{card} M > \operatorname{card} \mathbb{Z}_m$, so ist nach Satz 1.17 die obige Abbildung nicht injective. Damit existieren zwei verschiedene Zahlen $x, y \in M$ mit $[x] = [y]$, was bedeutet $x \equiv y \mod m$ und $m| (x - y)$. ■

Die Summe der Werte einer Funktion. Sei M eine endliche Menge. Betrachten wir eine reellwertige Funktion auf M, d.h. eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$. We möchten die Summe

$$\sum_{k \in M} f(k) \tag{1.18}$$

der Werte von f definieren. Die Definition erfolgt per Induktion nach $n = \operatorname{card} M$.

Induktionsanfang für $n = 1$. Ist $M = \{a\}$, so setzen wir

$$\sum_{k \in M} f(k) = f(a).$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Sei die Summe (1.18) für n-elementige Mengen M schon definiert. Für jede $(n+1)$-elementige Menge M wählen wir ein Element $a \in M$ und setzen

$$\sum_{k \in M} f(k) = \sum_{k \in M \setminus \{a\}} f(k) + f(a). \tag{1.19}$$

Bemerken wir, dass $\operatorname{card}(M \setminus \{a\}) = n$ und somit die rechte Seite von (1.19) nach Induktionsvoraussetzung definiert ist.

Jetzt beweisen wir, auch per Induktion nach $m = \operatorname{card} M$, dass der Wert der rechten Seite von (1.19) unabhängig von der Wahl von a ist, so dass die Summe $\sum_{k \in M} f(k)$ wohl-definiert ist.

Induktionsanfang für $m = 2$. Ist $M = \{a, b\}$, so erhalten wir

$$\sum_{k \in M \setminus \{a\}} f(k) + f(a) = \sum_{k \in \{b\}} f(k) + f(a) = f(b) + f(a)$$

und analog

$$\sum_{k \in M \setminus \{b\}} f(k) + f(b) = f(a) + f(b).$$

Wir sehen, dass die beiden Summen gleich sind.

Induktionsschritt von m nach $m+1$. Angenommen, dass die Unabhängigkeit von der Wahl von a für m-elementige Mengen schon bewiesen ist, betrachten wir eine $(m+1)$-elementige Menge M und beweisen, dass für beliebige zwei Elemente $a, b \in M$ gilt

$$\sum_{k \in M \setminus \{a\}} f(k) + f(a) = \sum_{k \in M \setminus \{b\}} f(k) + f(a). \tag{1.20}$$

Da $\operatorname{card}(M \setminus \{a\}) = m$, so haben wir

$$\sum_{k \in M \setminus \{a\}} f(k) + f(a) = \left[\sum_{k \in (M \setminus \{a\}) \setminus \{b\}} f(k) + f(b)\right] + f(a) = \sum_{k \in M \setminus \{a,b\}} f(k) + f(b) + f(a)$$

und analog

$$\sum_{k \in M \setminus \{b\}} f(k) + f(b) = \sum_{k \in M \setminus \{a,b\}} f(k) + f(a) + f(b),$$

woraus die Identität (1.20) folgt.

Analog definiert man das Produkt

$$\prod_{k \in M} f(k).$$

Erwähnen wir ohne Beweis die weiteren Eigenschaften der Summe. Sie alle können per Induktion bewiesen werden.

1. Im Fall $M = \mathcal{E}_n$ haben wir auch die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

per Induktion nach n definiert. Vergleichen von zwei Definitionen ergibt ihre Identität:

$$\sum_{k \in \mathcal{E}_n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Um diese zwei Begriffe zu unterscheiden, nennt man $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ geordnete Summe und $\sum_{k \in M} f(k)$ – ungeordnete Summe.

2. Ist $M = M_1 \sqcup M_2$, so gilt

$$\sum_{k \in M_1 \sqcup M_2} f(k) = \sum_{k \in M_1} f(k) + \sum_{k \in M_2} f(k),$$

was man auch per Induktion beweist.

3. Seien f, g zwei Funktionen auf M. Dann gilt

$$\sum_{k \in M} (f(k) + g(k)) = \sum_{k \in M} f(k) + \sum_{k \in M} g(k).$$

Auch für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in M} c f(k) = c \sum_{k \in M} f(k).$$

4. Ist $f(k) \leq g(k)$ für alle $k \in M$, so gilt

$$\sum_{k \in M} f(k) \leq \sum_{k \in M} g(k).$$

5. Ist $f(k) = 1$ für alle $k \in M$, so gilt

$$\sum_{k \in M} f(k) = \operatorname{card} M.$$

6. Seien M, N zwei endliche Mengen. Die folgende Identität gilt für alle Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ und $g : N \to \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k \in M} f(k)\right)\left(\sum_{l \in N} g(l)\right) = \sum_{(k,l) \in M \times N} f(k) g(l). \tag{1.21}$$

Darüber hinaus gilt für jede Funktion $h : M \times N \to \mathbb{R}$ die Identität

$$\sum_{(k,l) \in M \times N} h(k,l) = \sum_{k \in M} \left(\sum_{l \in N} h(k,l)\right).$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Satz 1.20 *Für beliebige Folgen* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *und* $\{y_k\}_{k=1}^n$ *von reellen Zahlen gilt die folgende Ungleichung:*

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 .$$

Beweis. Wir benutzen die Identität (1.21):

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) &= \left(\sum_{k\in\mathcal{E}_n} x_k^2\right)\left(\sum_{l\in\mathcal{E}_n} y_l^2\right) \\ &= \sum_{(k,l)\in\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_n} x_k^2 y_l^2 .\end{aligned}$$

Vertauschen von k und l ergibt

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_n} x_l^2 y_k^2$$

woraus folgt

$$2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_n} \left(x_k^2 y_l^2 + x_l^2 y_k^2\right) .$$

Wir haben

$$\begin{aligned} x_k^2 y_l^2 + x_l^2 y_k^2 &= x_k^2 y_l^2 + x_l^2 y_k^2 - 2x_k x_l y_k y_l + 2x_k x_l y_k y_l \\ &= \left(x_k y_l - x_l y_k\right)^2 + 2x_k x_l y_k y_l \\ &\geq 2x_k x_l y_k y_l ,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) &\geq \sum_{(k,l)\in\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_n} x_k x_l y_k y_l = \left(\sum_{k\in\mathcal{E}_n} x_k y_k\right)\left(\sum_{l\in\mathcal{E}_n} x_l y_l\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 .\end{aligned}$$

■

1.5 Die weiteren Folgerungen des Vollständigkeitsaxioms

Intervallschachtelungsprinzip. Zunächst definieren wir unendliche Folge.

Definition. Sei X eine Menge. Eine (unendliche) Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ von Elementen aus X ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$, wobei $x_k = x(k)$.

Insbesondere betrachten wir eine Folge $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ von Intervallen. Die Folge $\{I_k\}$ heißt *Intervallschachtelung* falls es gilt $I_{k+1} \subset I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Hauptsatz 1.21 (Intervallschachtelungsprinzip) *Sei* $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Intervallschachtelung wobei alle Intervalle* I_k *abgeschlossen und beschränkt sind. Dann gibt es eine reelle Zahl, die in allen Intervallen* I_k *enthalten ist, d.h. der Durchschnitt* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ *nicht leer ist.*

Bemerkung. Es ist wichtig, dass alle Intervalle abgeschlossen sind. Betrachten wir die folgende Intervallschachtelung: $I_k = (0, \frac{1}{k}]$. Wir behaupten, dass der Durchschnitt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ leer ist: gilt $x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $0 < x < \frac{1}{k}$ und somit $x^{-1} \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zum Archimedischen Axiom steht. Auch ist die Beschränktheit der Intervalle wichtig: die unbeschränkte Intervalle $I_k = [k, +\infty)$ haben den leeren Durchschnitt.

Beweis. Sei $I_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k \leq b_k$. Die Bedingung $I_{k+1} \subset I_k$ ist äquivalent zu

$$a_k \leq a_{k+1} \text{ und } b_k \geq b_{k+1}.$$

Aus diesen Bedingungen erhalten wir per Induktion folgendes: $k \leq l$ ergibt $a_k \leq a_l$ und $b_k \geq b_l$.

Beweisen wir zunächst, dass $a_k \leq b_l$ für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$. Ist $k \leq l$, so gilt

$$a_k \leq a_l \leq b_l.$$

Ist $k > l$, so gilt

$$a_k \leq b_k \leq b_l.$$

In den beiden Fällen haben wir $a_k \leq b_l$.

Sei A die Menge von allen Zahlen a_k, und B – die Menge von allen Zahlen b_k. Nach der obigen Behauptung, $a \in A$ und $b \in B$ implizieren $a \leq b$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom beschließen wir, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a \leq c \leq b$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$. Daher $c \in [a_k, b_k]$ für alle k, was zu beweisen war. ■

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
09.05.12

Überdeckungssatz. Betrachten wir eine Familie $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ von Intervallen, wobei S eine Indexmenge ist. Gilt für eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$

$$M \subset \bigcup_{\alpha\in S} I_\alpha,$$

so nennt man die Familie $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ eine *Überdeckung* von M.

Ist T eine Teilmenge von S, so betrachten wir auch die Teilfamilie $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$. Ist $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ auch eine Überdeckung von M, so heißt sie *Teilüberdeckung* von $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$.

Hauptsatz 1.22 (Satz von Heine-Borel[2], Überdeckungssatz) *Sei* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ *eine Familie von offenen Intervallen. Ist* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ *eine Überdeckung von einem abgeschlossenen beschränkten Intervall* $[a, b]$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, *so existiert eine endliche Teilüberdeckung* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ *von* $[a, b]$.

[2] Auch als "Satz von Borel-Lebesgue" genannt.

Bemerkung. Die Endlichkeit von $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ bedeutet, dass T eine endliche Menge ist. Soll eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ die folgende Eigenschaft erfüllen:

"für jede Überdeckung von M mit offenen Intervallen existiert eine endliche Teilüberdeckung",

so heißt M *kompakt.* Satz 3.4 kann man kurz formulieren wie folgt: jedes Intervall $[a, b]$ ist kompakt.

Der Begriff von Kompaktheit ist einer von zentralen Begriffen in der Mathematik. Wir vertiefen und benutzen ihn später. Jetzt zeigen wir die Beispiele von nicht-kompakten Mengen.

Beispiel. Zeigen wir, dass $M = [1, +\infty)$ nicht kompakt ist. Dafür betrachten wir die offenen Intervalle $I_k = (0, k)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist die Familie $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M. Soll $\{I_k\}_{k\in T}$ eine endliche Teilfamilie sein, so existiert das Maximum von T, $m = \max T$. Dann gilt $I_k \subset I_m$ für alle $k \in T$ und somit

$$\bigcup_{k\in T} I_k = I_m \not\supset M.$$

Deshalb enthält $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung und $[1, +\infty)$ ist nicht kompakt.

Zeigen wir, dass auch halboffenes Intervall $M = (0, 1]$ nicht kompakt ist. Dafür betrachten wir die offenen Intervalle

$$I_k = (\frac{1}{k}, 2), \quad k \in \mathbb{N}$$

und beachten, dass $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Überdeckung von $(0, 1]$ ist, die keine endliche Teilüberdeckung hat. In der Tat sei T eine endliche Teilmenge der Indexmenge $\mathbb{N}$. Wie in dem obigen Argument setzen wir $m = \max T$ und erhalten, dass

$$\bigcup_{k\in T} I_k = I_m,$$

während ein einziges Intervall I_m keine Überdeckung von $(0, 1]$ ist.

Beweis von Satz 1.22. Der Fall $a = b$ ist trivial, da in diesem Fall $[a, b]$ aus einem Element besteht, das mit einem Intervall überdecken kann. Nehmen wir an, dass $a < b$. Nehmen wir auch das Gegenteil an, dass es keine endliche Teilüberdeckung von $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ gibt. Setzen wir $c = \frac{a+b}{2}$ und betrachten die Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$. Die Familie $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ist eine Überdeckung von den beiden Intervallen. Existieren die endlichen Teilüberdeckung für $[a, c]$ und $[c, b]$, zum Beispiel, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_1}$ bzw $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_2}$, so erhalten wir die endliche Teilüberdeckung $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_1\cup T_2}$ für $[a, b]$ (da die Vereinigung $T_1 \cup T_2$ endlich ist nach Satz 1.19).

Deshalb zulässt eines von den Intervallen $[a, c]$, $[c, b]$ keine endliche Teilüberdeckung. Bezeichnen wir mit $[a_1, b_1]$ dieses Intervall, d.h. $[a_1, b_1]$ ist entweder $[a, c]$ oder $[c, b]$, und es gibt keine endliche Teilüberdeckung für $[a_1, b_1]$.

Setzen wir $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ und erhalten analog, dass eines von den Intervallen $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ keine endliche Teilüberdeckung zulässt. Bezeichnen wir dieses Intervall mit $[a_2, b_2]$. Wir setzen diese Konstruktion fort, indem wir eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ bilden, derart, dass jedes $[a_n, b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung zulässt.

Rigoros definieren wir die Folge $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ von Intervallen per Induktion nach n wie folgt. Bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}_+$ die Menge von allen nicht-negativen ganzen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}.$$

- Induktionsanfang für $n = 0$. Setzen wir $a_0 = a$ und $b_0 = b$.
- Induktionsschritt. Sei $[a_n, b_n]$ für ein $n \in \mathbb{Z}_+$ schon definiert. Setzen wir $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ und bemerken, dass eines von den Intervallen $[a_n, c_n]$, $[c_n, b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung zulässt. Wählen wir dieses Intervall und bezeichnen es mit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Nach dem Induktionsprinzip wird $[a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{Z}_+$ definiert. Nach Konstruktion ist die Folge $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ Intervallschachtelung. Nach Satz 1.21 existiert eine Zahl x, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt. Da $x \in [a, b]$ und $\{I_\alpha\}_{\alpha \in S}$ eine Überdeckung von $[a, b]$ ist, so gehört x zu einem Intervall I_α mit $\alpha \in S$.

Sei $I_\alpha = (c, d)$ mit $c < d$ und somit $c < x < d$. Wie behaupten, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$[a_n, b_n] \subset (c, d). \tag{1.22}$$

Die Inklusion 1.22 steht im Widerspruch zur Bedingung, dass $[a_n, b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung zulässt. Deshalb reicht es (1.22) zu beweisen um den ganzen Beweis zu beschließen.

In der Tat haben wir nach der Konstruktion

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2},$$

woraus folgt per Induktion

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{l}{2^n},$$

wobei $l = b - a$. Um die Inklusion (1.22) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass

$$c < a_n \quad \text{und} \quad b_n < d. \tag{1.23}$$

Da $x \in [a_n, b_n]$, wir haben

$$a_n = b_n - (b_n - a_n) \geq x - \frac{l}{2^n}$$

und

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) \leq x + \frac{l}{2^n}.$$

Dann ist (1.23) eine Folgerung aus

$$c < x - \frac{l}{2^n} \qquad \text{und} \quad x + \frac{l}{2^n} < d,$$

was äquivalent zu

$$\frac{l}{2^n} < x - c \quad \text{und} \quad \frac{l}{2^n} < d - x,$$

ist, d.h.

$$\frac{l}{2^n} < m := \min(x-c, d-x).$$

Da m und l positive sind, existiert nach dem Archimedischen Axiom (Satz 1.16) eine natürliche Zahl $n > \frac{l}{m}$, woraus folgt

$$\frac{l}{n} < m.$$

Nach Bernoullische Ungleichung gilt

$$2^n \geq 1 + n > n,$$

woraus folgt

$$\frac{l}{2^n} < m,$$

was zu beweisen war. ■

1.6 Zahlensystem

In diesem Abschnitt verwenden wir die folgende Variante des Induktionsprinzips.

Behauptung. (Induktionsprinzip) *Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- *$A(1)$ ist wahr;*
- *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$A(k) \text{ ist wahr für alle } k \in \{1, ..., n\} \Rightarrow A(n+1) \tag{1.24}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $B(n)$ die Aussage, dass $A(k)$ wahr für alle $k \in \{1, ..., n\}$ ist. Beweisen wir per Induktion nach n, dass $B(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, woraus folgt, dass $A(n)$ auch wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Induktionsanfang. $B(1)$ ist wahr, weil $B(1)$ äquivalent zu $A(1)$ ist.

Induktionsschritt. Sei $B(n)$ wahr, beweisen wir, dass $B(n+1)$ wahr ist. In der Tat bedeutet $B(n)$, dass $A(k)$ wahr für alle $k \in \{1, .., n\}$ ist. Nach der Voraussetzung (1.24) erhalten wir $A(n+1)$. Somit ist $A(k)$ wahr für alle $k \in \{1, ..., n+1\}$, d.h. $B(n+1)$ wahr ist.

Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass $B(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, was zu beweisen war. ■

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
11.05.12

1.6.1 q-adische Darstellung von natürlichen Zahlen

Im nächsten Satz führen wir ein q-adisches Zahlensystem ein.

Satz 1.23 *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{N}$ existieren genau ein $n \in \mathbb{Z}_+$ und genau eine Folge $\{a_k\}_{k=0}^n$ von Zahlen $a_k \in \{0, ..., q-1\}$ mit*

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k \quad \left(= a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + ... + a_1 q + a_0\right). \tag{1.25}$$

Die Identität (1.25) ist die Darstellung von x im q-adischen Zahlensystem (= *das Zahlensystem zur Basis* q). Die übliche symbolische Abkürzung von (1.25) sieht wie folgt aus:

$$x = a_n a_{n-1} ... a_0$$

(nicht mit dem Produkt zu verwechseln). Die Zahlen $\{0, ..., q-1\}$ heißen q-adische Ziffern. Jede Zahl a_k heißt der *Ziffernwert* an der Stelle k, und q^k heißt der *Stellenwert* an der Stelle k.

Die gängigsten Basen sind $q = 2$ (Dualsystem), $q = \text{zehn} := 9 + 1$ (Dezimalsystem) und $q = \text{sechzehn} := 9 + 7$ (Hexadezimalsystem). Im Dualsystem gibt es nur zwei Ziffern 0 und 1, und somit sind die Operationen im Dualsystem sehr einfach. Insbesondere hat die Multiplikationstabelle nur einen Eintrag $1 \cdot 1 = 1$. Die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ werden im Dualsystem wie folgt dargestellt:

$$1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ 1000,\ 1001.$$

Die Ziffern im Dezimalsystem sind $0, 1, 2, ..., 9$. Im Hexadezimalsystem sind die Ziffern $0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F$, wobei die Buchstaben die Ziffern zwischen zehn und fünfzehn bezeichnen. Zum Beispiel, die Zahl $C3F$ im Hexadezimalsystem ist gleich

$$\underbrace{C3F = C \cdot q^2 + 3 \cdot q + F}_{\text{hex}} = \underbrace{12 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 3135}_{\text{dez}}.$$

Beweis von Satz 1.23. Induktion nach x.

Induktionsanfang. Ist $x = 1$ so ist (1.25) erfüllt mit $n = 0$ und $a_0 = 1$. Diese Darstellung ist eindeutig bestimmt, da für die anderen Werte von n und a_k die rechte Seite von (1.25) größer als 1 ist.

Induktionsschritt. Angenommen ist, dass jedes $y \in \mathbb{N}$ mit $y < x$ eine eindeutige q-adische Darstellung hat. Beweisen wir das Gleiche für x. Wir benutzen die ganzzahlige Division von x durch q, was ergibt

$$x = qy + r \tag{1.26}$$

mit $y = \left[\frac{x}{q}\right] \in \mathbb{Z}_+$ und $r \in \{0, ..., q-1\}$. Insbesondere ist r eine q-adische Ziffer. Ist $y = 0$, so ist die q-adische Darstellung von x wie folgt: $x = a_0$ mit $a_0 = r$ und $n = 0$. Sei $y > 0$. Da $y < x$, so hat y nach Induktionsvoraussetzung eine q-adische Darstellung

$$y = \sum_{k=0}^{m} b_k q^k.$$

Einsetzen in (1.26) ergibt

$$x = q \sum_{k=0}^{m} b_k q^k + r = \sum_{k=0}^{m} b_k q^{k+1} + r = \sum_{l=1}^{m+1} b_{l-1} q^l + r = \sum_{l=0}^{m+1} a_l q^l,$$

wobei $a_l = b_{l-1}$ für $l \geq 1$ und $a_0 = r$.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit der q-adischen Darstellung (1.25). Beachten wir, dass

$$x = a_n q^n + ... + a_1 q_1 + a_0 = q\left(a_n q^{n-1} + ... + a_1\right) + a_0 = qy + a_0,$$

wobei

$$y = a_n q^{n-1} + ... + a_1. \tag{1.27}$$

Es folgt aus $x = qy + a_0$, dass y der Quotient und a_0 der Rest von der ganzzahligen Division x durch q sind. Deshalb sind y und a_0 eindeutig bestimmt. Da $y < x$, so ist die q-adische Darstellung (1.27) von y eindeutig bestimmt nach Induktionsvoraussetzung, woraus folgt, dass der Wert von n und alle Ziffern $a_1, ..., a_n$ auch eindeutig bestimmt sind. ■

1.6.2 q-adische Brüche

Jetzt definieren wir q-adische Darstellung von den reellen Zahlen. Betrachten wir zunächst eine unendliche Folge$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q-adischen Ziffern (d.h. $a_k \in \{0, ..., q-1\}$) und den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + ... \,. \tag{1.28}$$

Der Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ heißt eine *Reihe*, und den Wert davon definieren wir unterhalb[3].

Satz 1.24 *Für jede Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q-adischen Ziffern existiert eine eindeutige Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}, \tag{1.29}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt auch $x \in [0, 1]$.

Definition. Die eindeutige (1.29) erfüllende Zahl x heißt die *Summe* (der Wert) der Reihe (1.28). Man schreibt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}. \tag{1.30}$$

Die endliche Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k}$ heißt die n-te *Partialsumme* der Reihe (1.28). Die Ungleichung (1.29) bedeutet, dass die n-te Partialsumme betrachtet werden kann als eine Annäherung der vollen Summe mit dem Approximationsfehler $\leq q^{-n}$.

Die Reihe in (1.30) heißt q-adischer *Bruch*, und die Zahl x heißt der Wert des Bruches. Die übliche symbolische Abkürzung von (1.30) ist

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 ...$$

oder

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 ...$$

[3] Später definieren wir den Begriff der Summe für allgemeinere Reihen.

Beweis von Satz 1.24. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k}$$

und

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n} = x_n + q^{-n}.$$

Die Ungleichung (1.29) bedeutet $x \in [x_n, y_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit müssen wir beweisen, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n]$ genau ein Element enthält. Zeigen wir zunächst, dass die Folge $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung ist. Offensichtlich haben wir

$$x_n \le x_{n+1} < y_{n+1},$$

und es bleibt noch zu zeigen, dass $y_{n+1} \le y_n$. Mit Hilfe von $a_{n+1} \le q - 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k q^{-k} + q^{-(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + a_{n+1} q^{-(n+1)} + q^{-(n+1)} \\ &= x_n + (a_{n+1} + 1)\, q^{-(n+1)} \\ &\le \left(y_n - q^{-n}\right) + q \cdot q^{-(n+1)} \\ &= y_n. \end{aligned}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 1.21) beschließen wir, dass der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{\infty} [x_k, y_k]$ nicht-leer ist.

Beweisen wir die Eindeutigkeit von $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n]$. Nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass es zwei verschiedene Zahlen x und x' im Durchschnitt gibt. Sei $x > x'$, so dass $l := x - x' > 0$. Da die beiden Zahlen x, x' in $[x_n, y_n]$ liegen, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$l = x - x' \le y_n - x_n = q^{-n} \le 2^{-n} < \frac{1}{n},$$

d.h. $l < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zum Archimedischen Axiom ist.

Um zu beweisen, dass $x \in [0, 1]$, es reicht zu zeigen, dass $[x_1, y_1] \subset [0, 1]$. In der Tat, we haben

$$x_1 = a_1 q^{-1} \ge 0$$

und

$$y_1 = x_1 + q^{-1} = a_1 q^{-1} + q^{-1} = (a_1 + 1)\, q^{-1} \le q q^{-1} = 1,$$

woraus $[x_1, y_1] \subset [0, 1]$ folgt. ■

Beispiel. Setzen wir $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und betrachten den q-adischen Bruch

$$\underbrace{0,111...}_{q\text{-adisch}} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = q^{-1} + q^{-2} + \dots \,. \tag{1.31}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}$ heißt die unendliche *geometrische Reihe*. Beweisen wir die folgende Formel für den Wert der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = \frac{1}{q-1}. \tag{1.32}$$

Wir benutzen die folgende Summenformel von Aufgabe 19:

$$1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \tag{1.33}$$

die für alle reellen Zahlen $r \neq 1$ gilt. Daraus folgt

$$r + r^2 + ... + r^n = r\left(1 + ... + r^{n-1}\right) = r\frac{r^n - 1}{r - 1} = r\frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Einsetzen $r = q^{-1}$ und benutzen die Notation x_n, y_n wie in dem obigen Beweis ergeben für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = q^{-1} + q^{-2} + ... + q^{-n} = q^{-1}\frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}} = \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} < \frac{1}{q - 1}$$

und

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + q^{-n} = \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} + q^{-n} \\ &= \frac{1 - 2q^{-n} + q^{-(n-1)}}{q - 1} \geq \frac{1 - qq^{-n} + q^{-(n-1)}}{q - 1} = \frac{1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\frac{1}{q-1} \in [x_n, y_n]$, was zu beweisen war, und wir erhalten

$$\underbrace{0,111...}_{q\text{-adisch}} = \frac{1}{q - 1}.$$

Beispiel. In diesem Beispiel zeigen wir, dass zwei verschiedene q-adische Brüche gleichen Wert haben können. Setzen wir $b_1 = 0$ und $b_k = q - 1$ für alle $k \geq 2$. Nach (1.32) erhalten wir

$$\begin{aligned} b &= \underbrace{0,0\,(q-1)\,(q-1)\,...}_{q\text{-adisch}} \\ &= (q-1)\,q^{-2} + (q-1)\,q^{-3} + ... \\ &= q^{-1}\,(q-1)\left(q^{-1} + q^{-2} + ...\right) \\ &= q^{-1} \\ &= \underbrace{0,100...}_{q\text{-adisch}} \end{aligned}$$

Deshalb hat die Zahl $b = q^{-1}$ zwei q-adische Darstellungen.

Die Eindeutigkeit der q-adischen Darstellung von einem $x \in [0, 1)$ kann man unter zusätzlichen Bedingungen sichern.

Definition. Ein q-adischer Bruch $0, a_1a_2a_3...$ heißt *echt* falls die Menge

$$\{k \in \mathbb{N} : a_k < q - 1\} \tag{1.34}$$

unendlich ist.

Ist die Menge (1.34) endlich, so hat diese Menge das Maximum m, woraus folgt, dass $a_k = q - 1$ für alle $k > m$. Das was genau der Fall im obigen Beispiel, wo der q-adischer Bruch $0, 0\,(q-1)\,(q-1)\,...$ nicht echt war.

Der nächste Satz ist die Umkehrung von Satz 1.24.

Satz 1.25 *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in [0, 1)$ gibt es genau einen q-adischen echten Bruch mit dem Wert x.*

Vor dem Beweis besprechen wir die Folgerungen von Satz 1.25. Bezeichnen wir

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Mit Hilfe von Sätzen 1.23 und 1.25 kann jedes $x \in \mathbb{R}_+$ im q-adischen Zahlensystem dargestellt werden, wie folgt. In der Tat kann jedes $x \geq 0$ eindeutig in der Form

$$x = a + b$$

zerlegt werden, wobei $a \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in [0, 1)$. Die Zahl a heißt der *Ganzzahlanteil* von x und wird durch $a = [x]$ gegeben. Die Zahl b heißt der *Bruchteil* von x und wird durch $b = x - [x]$ gegeben. Manchmal benutzt man die Bezeichnung $b = \{x\}$ (x in den geschwungenen Klammern – nicht mit der Menge $\{x\}$ zu verwechseln).

Ist $a = 0$, so gilt $x \in [0, 1)$ und die q-adische Darstellung von x wird von Satz 1.25 gegeben. Sei $a > 0$. Nach Satz 1.23 hat a die q-adische Darstellung

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k = \underbrace{a_n a_{n-1} ... a_0}_{q\text{-adisch}}.$$

Nach Satz 1.25 hat b die Darstellung als ein q-adischer Bruch

$$b = \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l} = \underbrace{0, b_1 b_2 b_3 ...}_{q\text{-adisch}}.$$

Deshalb erhalten wir die Identität

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l},$$

die symbolisch abgekürzt wird wie folgt

$$x = \underbrace{a_n a_{n-1} ... a_0, b_1 b_2 b_3 ...}_{q\text{-adisch}}.$$

Der Ausdruck $a_n a_{n-1} ... a_0, b_1 b_2 b_3 ...$ (wobei a_k und b_l die q-adischen Ziffern sind) heißt eine *q-adische Zahl.* Die q-adische Zahl heißt *echt*, falls ihrer Bruchteil echt ist. Damit erhalten wir folgendes.

Folgerung. *Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ existiert genau eine echte q-adische Zahl mit dem Wert x.*

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
16.05.12

Beweis von Satz 1.25. Nach Definition ist der Wert des q-adischen Bruches $0,a_1a_2...$ eine reelle Zahl x mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}, \tag{1.35}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.24 existiert der Wert x für jeden Bruch und $x \in [0,1]$.

Der q-adische Bruch $0,a_1a_2...$ ist echt, falls die Menge

$$S = \{k \in \mathbb{N} : a_k < q-1\}$$

unendlich ist. Zunächst beweisen wir die folgende Eigenschaft von echten Brüchen.

Behauptung. *Ein q-adischer Bruch $0,a_1a_2...$ mit dem Wert x ist echt genau dann, wenn*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n} \tag{1.36}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Unterschied zwischen (1.35) und (1.36) ist, dass die rechte Ungleichung in (1.36) *echt* ist[4].

Beweis der Implikation

$$(1.36) \Rightarrow 0,a_1a_2... \text{ ist echt.}$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass der Bruch $0,a_1a_2...$ nicht echt ist, und beweisen, dass

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n} \tag{1.37}$$

für mindestens einen Wert von n. Da der Bruch $0,a_1a_2...$ nicht echt ist, so ist die Menge S endlich und somit hat das Maximum. Sei $m = \max S$. Dann gilt $a_k = q-1$ für alle $k > m$. Setzen wir

$$y = \sum_{k=1}^{m} a_k q^{-k}.$$

[4] Zum Beispiel, betrachten wir im Dezimalsystem den Bruch $0,19999...$ mit dem Wert $x = 0,2$. Für jedes $n \geq 2$ ist die rechte Seite von (1.36) gleich

$$0,\underbrace{199...9}_{n} + 10^{-n} = 0,2 = x,$$

und die rechte Ungleichung in (1.36) gilt nicht.

Mit Hilfe von der Summenformel (1.32) für unendliche geometrische Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = \sum_{k=1}^{m} a_k q^{-k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k q^{-k} \\ &= y + \sum_{k=m+1}^{\infty} (q-1)\, q^{-k} \\ &= y + (q-1)\, q^{-m} \left(q^{-1} + q^{-2} + ...\right) \\ &= y + (q-1)\, q^{-m} \frac{1}{q-1} \\ &= y + q^{-m}, \end{aligned}$$

d.h. (1.37) gilt für $n = m$.

Beweis der Implikation

$$0, a_1 a_2 ... \text{ ist echt} \Rightarrow (1.36).$$

Wir müssen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x < \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}.$$

Da die Menge S unendlich ist, so hat sie keine obere Schranke: für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in S$ mit $m > n$. Für dieses m gilt $a_m < q - 1$. Anwendung von (1.35) mit m statt n ergibt

$$\begin{aligned} x &\leq \sum_{k=1}^{m} a_k q^{-k} + q^{-m} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} a_k q^{-k} + q^{-m} \\ &< \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + (q-1) \sum_{k=n+1}^{m} q^{-k} + q^{-m}, \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichungen $a_k \leq q - 1$ und $a_m < q - 1$ benutzt haben. Mit Hilfe von der Summenformel (1.33) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} q^{-k} &= q^{-(n+1)} + q^{-(n+2)} + ... + q^{-m} \\ &= q^{-(n+1)} \left(1 + q^{-1} + ... + q^{-(m-n-1)}\right) \\ &= q^{-(n+1)} \frac{1 - q^{-(m-n)}}{1 - q^{-1}} \\ &= q^{-(n+1)} q \frac{1 - q^{-(m-n)}}{q-1} = \frac{q^{-n} - q^{-m}}{q-1}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} x &< \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + (q-1)\frac{q^{-n}-q^{-m}}{q-1} + q^{-m} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe von der obigen Behauptung kann der Satz 1.25 so umformuliert werden: für jedes $x \in [0,1)$ existiert ein q-adischer Bruch $0, a_1 a_2 ...$, der die Ungleichung (1.36) für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wir bestimmen a_n per Induktion nach n.

Induktionsanfang für $n = 1$. Die Ungleichung (1.36) für $n = 1$ ist

$$a_1 q^{-1} \le x < a_1 q^{-1} + q^{-1}, \tag{1.38}$$

was äquivalent zu

$$a_1 \le qx < a_1 + 1 \tag{1.39}$$

ist, d.h.

$$a_1 = [qx].$$

Da $0 \le x < 1$, so erhalten wir $0 \le qx < q$ und somit $0 \le a_1 < q$. Deshalb ist a_1 eine q-adische Ziffer ist. Damit haben wir gezeigt, dass a_1 existiert und eindeutig bestimmt ist.

Induktionsschritt von $< n$ nach n. Seien a_k für alle $k < n$ schon bestimmt. Wir müssen beweisen, dass es genau eine Ziffer a_n gibt mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} \le x < \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}. \tag{1.40}$$

Setzen wir

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} a_k q^{-k}$$

und umschreiben (1.40) wie folgt:

$$y + a_n q^{-n} \le x < y + a_n q^{-n} + q^{-n}.$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent zu

$$a_n \le q^n (x-y) < a_n + 1,$$

was ergibt

$$a_n = [q^n (x-y)].$$

Insbesondere ist a_n eindeutig bestimmt. Es bleibt nur zu zeigen, dass a_n eine q-adische Ziffer ist. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir

$$y \le x < y + q^{-(n-1)},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - y < q^{-n+1}, \\ 0 &\leq q^n (x - y) < q, \\ 0 &\leq [q^n (x - y)] < q \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Mit Hilfe von der q-adischen Darstellung der reellen Zahlen können die arithmetischen Operationen mit Zahlen durchgeführt werden. Das Dezimalsystem wird für schriftliche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division benutzt, während das Dual- und Hexadezimalsystem sind als Standard im Rechner benutzt.

1.7 Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ (Skizze)

Die Menge $\mathbb{R}$ von reellen Zahlen wurde von uns axiomatisch eingeführt. Natürlich entsteht die Frage, ob eine Menge $\mathbb{R}$ existiert, die alle Axiomen erfüllt, und ob sie eindeutig bestimmt ist. Die Existenz von $\mathbb{R}$ kann nur in den Rahmen von anderen axiomatischen Theorien bewiesen werden. Zum Beispiel, man kann zunächst die Menge $\mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen axiomatisch definieren, und danach die Menge $\mathbb{R}$ aufbauen.

Die Menge $\mathbb{N}$ wird mit Hilfe von *Peano-Axiomen* definiert, wie folgt. Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt die Menge von natürlichen Zahlen und die Elementen von $\mathbb{N}$ heißen die natürlichen Zahlen, falls es eine Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, die die folgenden Axiome erfüllt:

1. F ist injektiv (d.h. $F(n) = F(m) \Rightarrow n = m$).

2. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$ das nicht zum Bild von F gehört (d.h. $F(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

3. Sei M eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) $1 \in M$

   (b) $n \in M \Rightarrow F(n) \in M$

   Dann enthält M die ganze Menge $\mathbb{N}$.

Die Zahl $F(n)$ heißt der Nachfolger von n und entspricht zu $n + 1$. Die dritte Axiom ist genau das Induktionsprinzip.

Man definiert die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen per Induktion wie folgt:

1. $n + 1 = F(n)$

2. $n + F(m) = F(n + m)$

3. $n \cdot 1 = n$

4. $n \cdot F(m) = (n \cdot m) + m.$

Die Ungleichheit ist wie folgt definiert: $n < m$ genau dann, wenn $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann werden die üblichen Eigenschaften von Addition, Multiplikation und Ungleichheit bewiesen. Danach definiert man zusätzlich 0, die negativen Zahlen und die Operationen in $\mathbb{Z}$.

Weiter gibt es verschiedene Möglichkeiten die ganze Menge $\mathbb{R}$ aufzubauen.

Eine Möglichkeit ist das q-adische Zahlensystem zu benutzen (zum Beispiel, mit $q = 2$) um $\mathbb{R}_+$ als die Menge von q-adischen Zahlen (Folgen)

$$a_n a_{n-1} ... a_0, b_1 b_2 ...$$

zu definieren, wobei a_k, b_l die q-adischen Ziffern sind. Man muß sowohl die Operationen $+$ und $\cdot$ als auch die Relation $\leq$ mit Hilfe von q-adischen Darstellungen definieren und die Gültigkeit von allen Axiomen von reellen Zahlen beweisen.

Eine andere Möglichkeit ist zunächst die *rationalen* Zahlen zu definieren. Ist die Menge $\mathbb{R}$ von reellen Zahlen schon vorhanden, so definiert man die rationalen Zahlen als die reellen Zahlen der Form p/q mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Die Menge von rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Ist noch nur die Menge $\mathbb{Z}$ vorhanden, so definiert man erst die Brüche $\frac{p}{q}$ als Paaren (p, q) von ganzen Zahlen mit $q \neq 0$. Die zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ heißen äquivalent, falls $pq' = qp'$. Die Menge von Äquivalenzklassen von Brüchen bezeichnet man mit $\mathbb{Q}$, und die Elementen von $\mathbb{Q}$ heißen die rationalen Zahlen. Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ kann auch als Element von $\mathbb{Q}$ betrachten werden mit Hilfe von der Zuordnung $n \mapsto \frac{n}{1}$.

Man definiert die Summe und das Produkt von Brüchen mit

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$
2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Auch definiert man die Ungleichheit $\leq$ auf $\mathbb{Q}$: für positive b und d gilt $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ genau dass, wenn $ad \leq bc$. Für negativen Werten von den Nennern gibt es eine offensichtliche Modifikation.

Man zeigt, dass die Operationen $+, \cdot$ und die Relation $\leq$ auch für Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und mit den Operationen $+, \cdot$ bzw mit der Relation $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ kompatibel sind. Die so definierte Menge $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper. Das einzige Axiom von $\mathbb{R}$, das noch fehlt, ist das Vollständigkeitsaxiom. In der Tat impliziert das Vollständigkeitsaxiom die Existenz von $\sqrt{2}$, d.h. die Existenz von einer positiven reellen Zahl x mit $x^2 = 2$. Die Menge $\mathbb{Q}$ hat keine Zahl mit dieser Eigenschaft und somit ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Im nächsten Schritt erstellt man die Menge $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ wie folgt. Eine Teilmenge S von $\mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt* falls

1. S ist nicht leer und ist nach oben beschränkt;
2. ist $x \in S$, so ist auch $y \in S$ für alle $y < x$;
3. S hat kein maximales Element.

Zu jedem $a \in \mathbb{Q}$ entspricht ein Schnitt

$$S_a = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}.$$

Aber es gibt die Schnitte, die keiner rationalen Zahl entsprechen, zum Beispiel

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ oder } x^2 < 2\right\}.$$

Hätten wir $\sqrt{2}$ schon definiert, so könnten wir diesen Schnitt als

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}$$

darstellen.

Die Dedekindschen Schnitten von $\mathbb{Q}$ heißen die reellen Zahlen und die Menge von den reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Die Zuordnung $a \mapsto S_a$ erlaubt uns die rationalen Zahlen als Elementen von $\mathbb{R}$ identifizieren.

Man definiert die Operationen $+, \cdot$ und die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel, für Schnitte S und T ist die Summe $S + T$ der folgende Schnitt:

$$S + T = \{x + y : x \in S, y \in T\}.$$

Die Ungleichung $S \leq T$ gilt genau dann, wenn

$$\forall x \in S \;\; \exists y \in T \;\; x \leq y.$$

Man beweist, dass alle Axiome von $\mathbb{R}$ erfüllt sind, insbesondere das Vollständigkeitsaxiom.

Alle Wege von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$ sind ziemlich lang (auch langweilig) und wir werden keine weiteren Einzelheiten geben.

Zum Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ soll man folgendes bemerken. Es gibt verschiedene Mengen, die die Axiome von $\mathbb{R}$ erfüllen. Alle solchen Mengen heißen die *Modelle* von $\mathbb{R}$. Wir haben schon zwei Modellen von $\mathbb{R}$ gesehen: die Menge von q-adischen Brüchen[5] und die Menge von Dedekindschen Schnitten. Die Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ gilt im folgenden Sinn. Gegeben seien zwei Modellen $\mathbb{R}'$ und $\mathbb{R}''$ von $\mathbb{R}$, dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$ mit Eigenschaften:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
3. $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Daraus folgt, dass auch $\varphi(0') = 0''$, $\varphi(1') = 1''$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Eine Abbildung φ mit diesen Eigenschaften heißt *Isomorphismus*, und die Modellen $\mathbb{R}'$ und $\mathbb{R}''$, für die ein Isomorphismus existiert, heißen *isomorph*. Somit sind je zwei beliebigen Modellen von reellen Zahlen isomorph.

Wir müssen unbedingt betonen, dass die Existenz von Isomorphismus das Vollständigkeitsaxiom benötigt. Zum Beispiel, $\mathbb{Q}$ erfüllt alle anderen Axiome von reellen Zahlen, aber $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht isomorph.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
18.05.12

[5] Für verschiedene Werte von q erhält man allerdings verschiedene Modelle von $\mathbb{R}$.

1.8 Kardinalzahlen

Wir haben schon die Gleichmächtigkeit von zwei Mengen definiert: die Mengen X und Y heißen gleichmächtig, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. In diesem Fall schreibt man $X \sim Y$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation zwischen Mengen. Somit bestimmt jede Menge X eine Äquivalenzklasse, die wird mit $|X|$ bezeichnet. Die Elementen von der Klasse $|X|$ sind alle Mengen, die zu X gleichmächtig sind. Insbesondere gilt $|X| = |Y|$ genau dann, wenn $X \sim Y$.

Definition. Die Äquivalenzklasse $|X|$ heißt die *Kardinalzahl* (oder *Kardinalität*, *Mächtigkeit*) von X.

Jede endliche nicht-leere Menge X ist äquivalent zu einer der Mengen $\mathcal{E}_n = \{1, ..., n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, d.h. $|X| = |\mathcal{E}_n|$. In diesem Fall sagen wir, dass die Anzahl von Elementen von X ist n und schreiben $\operatorname{card} X = n$. Nach Satz 1.17 ist die Kardinalzahl $|X|$ einer endlichen Menge X von n eindeutig bestimmt. Häufig identifiziert man $|X|$ mit n und schreibt $|X| = n$. Deshalb sind die Kardinalzahlen von endlichen Mengen äquivalent zu natürlichen Zahlen. In der Tat kann man die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen der endlichen Mengen definieren. In dieser Theorie wird die Endlichkeit der Mengen mit Hilfe von Schubfachprinzip definiert: eine Menge M heißt endlich, falls sie zu keiner ihren echten Teilmenge gleichmächtig ist (siehe auch die Aufgabe 33).

Die Kardinalzahlen von unendlichen Mengen können als Verallgemeinerung von natürlichen Zahlen betrachtet werden. In diesem Abschnitt definieren wir die Ungleichungen zwischen Kardinalzahlen.

Definition. Für je zwei Mengen X, Y gilt $X \leq Y$ falls X zu einer Teilmenge von Y gleichmächtig ist.

Insbesondere gilt $X \leq Y$ fall X eine Teilmenge von Y ist.

Behauptung. *Die Ungleichung $X \leq Y$ gilt genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*

Beweis. Ist X zu einer Teilmenge $Y' \subset Y$ gleichmächtig, so existiert eine bijektive Abbildung $g : X \to Y'$. Definieren wir $f : X \to Y$ mit $f(x) = g(x)$ und erhalten somit eine injektive Abbildung. Umgekehrt, existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$, so bezeichnen wir $Y' = f(X)$ und erhalten damit eine bijektive Abbildung $f : X \to Y'$ wobei Y' eine Teilmenge von Y ist. ■

Die Ungleichung $X \leq Y$ zwischen Mengen kann zu Kardinalzahlen erweitert werden wie folgt.

Definition. Die Ungleichung $|X| \leq |Y|$ gilt genau dann, wenn $X \leq Y$.

Behauptung. *Die Relation "$\leq$" zwischen den Kardinalzahlen ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei a, b zwei Kardinalzahlen, d.h. zwei Äquivalenzklassen von Mengen. Nach Definition bedeutet die Ungleichung $a \leq b$ folgendes: wir wählen Mengen $X \in a$ und $Y \in b$ und sagen $a \leq b$ falls $X \leq Y$. Offensichtlich muss man zeigen, dass die Bedingung $X \leq Y$ unabhängig von der Wahl von X und Y ist. Ist sie unabhängig, so sagt man, dass die Ungleichheit "$\leq$" zwischen Äquivalenzklassen wohldefiniert ist.

Seien X' und Y' andere Mengen aus der Klassen a bzw b. Wir müssen zeigen, dass $X \leq Y$ gilt genau dann, wenn $X' \leq Y'$, vorausgesetzt $X \sim X'$ und $Y \sim Y'$. Ist

$X \leq Y$, so existieren die Abbildungen wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow^{f} & & \downarrow^{g} \\ X' & & Y' \end{array}$$

wobei f und g bijektiv und h injektiv sind. Dann ist die Verkettung $g \circ h \circ f^{-1}$ eine injektive Abbildung von X' nach Y', woraus folgt $X' \leq Y'$, was zu beweisen war. ■

Die Ungleichheit zwischen Kardinalzahlen erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. $|X| \leq |Y| \ \wedge \ |Y| \leq |Z| \ \Rightarrow \ |X| \leq |Z|$ (Aufgabe 34).
2. $|X| \leq |Y| \ \wedge \ |Y| \leq |X| \ \Rightarrow \ |X| = |Y|$
3. für je zwei Mengen X, Y gilt $|X| \leq |Y|$ oder $|Y| \leq |X|$ (oder die beiden).

Die Eigenschaften 2 und 3 haben die komplizierten Beweise, die wir nicht geben (und nicht brauchen).

Abzählbare Mengen. Seien $Y = \mathbb{N}$ und X die Menge von geraden Zahlen, d.h.

$$X = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, ...\}.$$

Da $X \subset Y$, so erhalten wir $|X| \leq |Y|$. Es gilt allerdings $|X| = |Y|$ weil es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt: $f(x) = 2 \cdot x$.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine echte Teilmenge X von Y zu Y gleichmächtig sein kann. Diese Situation für endliche Mengen Y ist unmöglich (siehe Aufgabe 35 und Satz 1.17 – Schubfachprinzip).

Definition. Eine Menge X heißt *abzählbar* falls $X \sim \mathbb{N}$ (d.h. $|X| = |\mathbb{N}|$).

Die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ wird auch mit $\aleph_0$ bezeichnet und *Aleph-null* genannt (wobei $\aleph$ der erste Buchstabe *Aleph* des hebräischen Alphabetes ist).

Zum Beispiel, die Mengen von allen geraden Zahlen ist abzählbar. Ist X abzählbar, so existiert ein Bijektion $f : \mathbb{N} \to X$. Bezeichnen wir $f(n) = x_n$ und erhalten die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von allen Elementen von X. Wir schreiben auch $X = \{x_1, x_2, ...\}$ und sagen, dass die Menge X mit natürlichen Zahlen abgezählt ist.

Beispiel. (*Hilberts Hotel*) Stellen wir ein Hotel mit einer abzählbaren Menge von Zimmern vor, die mit allen natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Seien alle Zimmer schon belegt, aber es kommt noch ein Gast an. Man kann doch Platz für den neuen Gast machen, indem man den Gast aus Zimmer Nr 1 nach Zimmer Nr 2 versetzt, den Gast aus Zimmer Nr 2 nach Zimmer Nr 3, usw. Damit wird das Zimmer Nr 1 frei für den neuen Gast.

Außerdem kann man Platz für abzählbar vielen neuen Gäste machen. Seien die neuen Gäste auch durchnummeriert mit natürlichen Zahlen. Der alte Gast aus Zimmer Nr n wir nach Zimmer Nr $2n$ versetzt, und somit werden alle ungeraden Zimmer frei. Dann schickt man den neuen Gast mit Nummer m in Zimmer Nr $2m - 1$.

Es ist noch interessanter, dass man den Platz für die neuen Gäste aus abzählbar vielen Gruppen je mit abzählbar vielen Gästen machen kann. Wie macht man das, sehen wir im folgenden Satz, wo auch die anderen Eigenschaften von abzählbaren Mengen bewiesen werden.

Satz 1.26 (a) *Eine Teilmenge von einer abzählbaren Menge ist entweder endlich oder abzählbar.*

(b) *Kartesisches Produkt von zwei abzählbaren Mengen ist auch abzählbar (d.h.* $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$*)*

(c) *Sei* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von abzählbaren Mengen. Dann ist die Vereinigung* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *auch abzählbar.*

Bemerkung. Der Teil (a) impliziert, dass $|\mathbb{N}|$ die kleinste unendliche Kardinalzahl ist, im folgenden Sinn: gilt für eine unendliche Menge $|X| \leq |\mathbb{N}|$, so gilt $|X| = |\mathbb{N}|$. In der Tat bedeutet $|X| \leq |\mathbb{N}|$, dass X zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Da diese Teilmenge unendlich sein soll, erhalten wir nach (a), dass sie abzählbar ist.

Der Teil (c) beweist die obige Aussage, dass man im Hilberts Hotel auch alle Gäste aus abzählbar vielen Gruppen je mit abzählbar vielen Gästen unterbringen kann.

Beweis. (a) Es reicht zu zeigen, dass jede Teilmenge X von $\mathbb{N}$ entweder endlich oder abzählbar ist. Sei X unendlich. Dann erstellen wir eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to X$ woraus die Abzählbarkeit von X folgen wird. Dafür definieren wir $f(n)$ per Induktion nach n.

Induktionsanfang. Nach Satz 1.15 existiert das Minimum von X. Setzen wir $f(1) = \min X$.

Induktionsschritt. Seien $f(k)$ für alle $k < n$ schon definiert. Die Menge

$$X_n = \{f(k) : k < n\} = \{f(k) : k \in \mathcal{E}_{n-1}\}.$$

ist eine endliche Teilmenge von X. Deshalb ist die Differenz $X \setminus X_n$ nicht leer, und wir können setzen

$$f(n) = \min(X \setminus X_n). \tag{1.41}$$

Nach Induktionsprinzip erhalten wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$. Diese Abbildung ist injektiv, da $f(n) \notin X_n$ und somit $f(n) \neq f(k)$ für alle $n > k$. Das Bild $f(\mathbb{N})$ ist somit eine unendliche Menge. Beweisen wir, dass f surjektiv ist, d.h. $f(\mathbb{N}) = X$. Die unendliche Menge $f(\mathbb{N})$ ist Teilmenge von $\mathbb{N}$ und deshalb hat keine obere Schranke. Daraus folgt, dass für jedes $x \in X$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < f(n)$. Es folgt aus (1.41), dass x nicht in $X \setminus X_n$ liegen kann, und somit $x \in X_n$. Nach Definition von X_n existiert ein $k < n$ mit $f(k) = x$, d.h. $x \in f(\mathbb{N})$.

(b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $X = Y = \mathbb{N}$. Dann beweisen wir, dass die Menge

$$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

abzählbar ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$D_k = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N},\ n + m = k\}.$$

Die Menge D_k ist endlich (enthält $k - 1$ Elementen) und $\mathbb{N}^2$ ist die disjunkte Vereinigung von allen Mengen D_k, $k \in \mathbb{N}$. Auf dem Diagramm unterhalb sind die Elementen von $\mathbb{N}^2$ in einer Tabelle angeordnet, und die Mengen D_k sind Diagonalen in dieser Tabelle. Man kann die Menge $\mathbb{N}^2$ abzählen indem man die Mengen D_k

hintereinander abzählt – die Nummer N von (n,m) wird als $(n,m)_N$ gezeigt. Dieses Argument heißt die Diagonal-Abzählung.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & m=1 & & m=2 & & m=3 & & m=4 & & m=5 & \cdots \\
n=1 & (1,1)_1 & & (1,2)_3 & & (1,3)_6 & & (1,4)_{10} & & (1,5)_{15} & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
n=2 & (2,1)_2 & & (2,2)_5 & & (2,3)_9 & & (2,4)_{14} & & \cdots & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
n=3 & (3,1)_4 & & (3,2)_8 & & (3,3)_{13} & & \cdots & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
n=4 & (4,1)_7 & & (4,2)_{12} & & \cdots & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & & \\
n=5 & (5,1)_{11} & & \cdots & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Die genaue Definition der Bijektion $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ ist wie folgt. Sei a_k die Anzahl von Elementen in der Menge $\bigcup_{i=1}^k D_i$ (d.h. die ersten k Diagonalen). Da $\operatorname{card} D_k = k-1$, so erhalten wir

$$a_k = \operatorname{card}\bigcup_{i=1}^k D_i = \sum_{i=1}^k (i-1) = \sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{(k-1)\,k}{2}.$$

Dann setzen wir

$$f(n,m) = a_{n+m-1} + m = \frac{(n+m-2)\,(n+m-1)}{2} + m$$

Ist $(n,m)\in D_k$, so haben wir

$$f(n,m) = a_{k-1} + m.$$

Somit ist $f|_{D_k}$ injektiv. Für $(n,m)\in D_k$ nimmt m die Werte $\{1,...,k-1\}$, woraus folgt

$$f(D_k) = \{a_{k-1}+1,...,a_{k-1}+(k-1)\} = \{a_{k-1}+1,...,a_k\}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$a_k = a_{k-1} + (k-1)\,.$$

Wir haben dann

$$f(D_k) = \{x\in\mathbb{N} : a_{k-1} < x \le a_k\}\,,$$

woraus folgt, dass $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung aller Mengen $f(D_k)$ ist. Damit ist f eine Bijektion von $\mathbb{N}^2$ nach $\mathbb{N}$, was zu beweisen war.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
23.05.12

(c) Jede Menge X_n kann mit natürlichen Zahlen abgezählt werden. Bezeichnen wir mit x_{nm} das m-te Element von X_n, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Definieren wir eine Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to X$ durch

$$f(n, m) = x_{nm}$$

Die Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to X$ ist offensichtlich surjektiv, was impliziert $|X| \leq |\mathbb{N}^2|$ (Aufgabe 32). Nach (b) haben wir $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$ und somit $|X| \leq |\mathbb{N}|$. Da X unendlich ist, so erhalten wir $|X| = |\mathbb{N}|$. ■

Die Vereinigung $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ist auch abzählbar when alle Mengen X_n *höchstens abzählbar* sind (d.h. abzählbar oder endlich) und mindestens eine Menge von X_n abzählbar ist, da man die endlichen Mengen X_n immer in die abzählbaren Mengen umwandeln kann; dann ist X abzählbar als eine unendliche Teilmenge von einer abzählbaren Menge.

Auch die endliche Vereinigung $X = \bigcup_{n=1}^{N} X_n$ ist abzählbar, vorausgesetzt, dass alle Mengen X_n höchstens abzählbar sind und mindestens eine Menge von X_n abzählbar ist, da man die endliche Folge $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ immer in die unendliche Folge $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ fortsetzen kann, indem man setzt $X_n = X_N$ für alle $n > N$.

Zum Beispiel, daraus folgt, dass die Menge $\mathbb{Z}$ von ganzen Zahlen abzählbar ist, da $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$. Darüber hinaus gilt folgendes.

Korollar 1.27 *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *von rationalen Zahlen ist abzählbar, d.h.* $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Beweis. Definieren wie die Abbildung $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$f(n, m) = \begin{cases} \frac{n}{m}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

wobei $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann ist f eine surjektive Abbildung, woraus folgt

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}^2| = \left|\mathbb{N}^2\right| = |\mathbb{N}|.$$

Damit haben wir $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$, woraus $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ folgt. ■

Überabzählbare Mengen. Wir schreiben $|X| < |Y|$ falls $|X| \leq |Y|$ aber $|X| \neq |Y|$.

Definition. Eine Menge X heißt *überabzählbar* falls $|\mathbb{N}| < |X|$.

Satz 1.28 *Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar, d.h.* $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Die Kardinalzahl $|\mathbb{R}|$ heißt das *Kontinuum* und wird mit c bezeichnet.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist, so dass $\mathbb{R} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Konstruieren wir eine Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen beschränkten Intervallen wie folgt. Sei I_1 ein beliebiges Intervall, das x_1 nicht enthält, zum Beispiel $I_1 = [x_1 + 1, x_2 + 2]$. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ schon definiert. Wählen wir I_{n+1} als ein Teilintervall von I_n, das x_{n+1} nicht enthält. In der Tat, gilt $x_{n+1} \notin I_n$, so setzen wir $I_{n+1} = I_n$. Gilt $x_{n+1} \in I_n$, so gilt auch $x_{n+1} < b_n$ oder $x_{n+1} > a_n$. Im ersten Fall setzen wir

$$I_{n+1} = \left[\frac{x_{n+1} + b_n}{2}, b_n\right],$$

und im zweiten Fall

$$I_{n+1} = \left[a_n, \frac{a_n + x_{n+1}}{2}\right].$$

Damit erhalten wir eine Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit abgeschlossenen beschränkten Intervallen mit $x_n \notin I_n$ für alle $n \geq 1$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip es gibt eine reelle Zahl $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Dann gilt $x \neq x_n$ für alle $n \geq 1$ weil $x_n \notin I_n$. Deshalb gehört x nicht zu der Folge $\{x_n\}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbb{R} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ steht. Damit ist $|\mathbb{R}|$ überabzählbar. ■

Korollar 1.29 *Es gibt irrationale Zahlen.*

Beweis. Da $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, es folgt, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht leer ist. Ein anderer Beweis: $\sqrt{2}$ist irrational (siehe Aufgabe 29). ■

In der Tat hat die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von irrationalen Zahlen die Kardinalzahl c, was aus dem nächsten Satz folgt. In diesem Satz beweisen wir weitere Eigenschaften der kleinsten Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$.

Satz 1.30 *Seien X, Y zwei Mengen mit $|Y| \leq |\mathbb{N}|$.*
(a) Ist X unendlich, so gilt $|X \cup Y| = |X|$.
(b) Ist X überabzählbar, so gilt $|X \setminus Y| = |X|$.

Insbesondere gelten

$$|\mathbb{R} \cup Y| = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\mathbb{R} \setminus Y| = |\mathbb{R}|.$$

Daraus folgt, dass $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$.

Beweis. (a) Zunächst bemerken wir, dass

$$X \cup Y = X \sqcup (Y \setminus X)$$

und $|Y \setminus X| \leq |Y| \leq |\mathbb{N}|$. Somit reicht es zu beweisen, dass

$$|X \sqcup Y| = |X|$$

vorausgesetzt $|Y| \leq |\mathbb{N}|$ (wobei wir $Y \setminus X$ in Y umbenennen).

Jede unendliche Menge erhält eine abzählbare Teilmenge (Aufgabe 33). Sei X_0 eine abzählbare Teilmenge von X und sei $X_1 = X \setminus X_0$. Dann gilt

$$X = X_0 \sqcup X_1$$

und somit

$$X \sqcup Y = X_0 \sqcup X_1 \sqcup Y = (X_0 \sqcup Y) \sqcup X_1. \tag{1.42}$$

Da $|X_0| = |\mathbb{N}|$ und $|Y| \leq |\mathbb{N}|$, erhalten wir nach Satz 1.26 (oder nach Aufgabe 27), dass $|X_0 \sqcup Y| = |\mathbb{N}|$. Daraus folgt

$$X_0 \sqcup Y \sim X_0,$$

was zusammen mit (1.42) ergibt

$$X \sqcup Y \sim X_0 \sqcup X_1 = X,$$

was zu beweisen war.

(b) Da $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ und $|X \cap Y| \leq |Y| \leq |\mathbb{N}|$, so können wir $X \cap Y$ in Y umbenennen und somit voraussetzen, dass $Y \subset X$. Dann haben wir

$$X = (X \setminus Y) \cup Y. \tag{1.43}$$

Da die Menge $X \setminus Y$ unendlich ich (sonst wäre X abzählbar als die Vereinigung von $Y \leq \mathbb{N}$ und endlicher Menge $X \setminus Y$). Es folgt aus (a), dass

$$|(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| \, .$$

Zusammen mit (1.43) ergibt das $|X| = |X \setminus Y|$. ■

Mit Hilfe von Satz 1.30 kann man beweisen, dass alle Intervalle (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ mit $a < b$ die Kardinalzahl $|\mathbb{R}|$ haben (siehe Aufgaben).

Algebraische Zahlen. Die folgenden Teilmengen von reellen Zahlen sind uns schon bekannt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

deren Kardinalzahlen die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| \, .$$

Betrachten wir noch eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, fall x eine Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

erfüllt, wobei $n \in \mathbb{N}$ und alle Koeffizienten a_k rationale Zahlen sind, d.h. x eine Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

Zum Beispiel, jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist algebraisch, da es die Gleichung $x + a_1 = 0$ erfüllt mit $a_1 = -x \in \mathbb{Q}$ (und $n = 1$). Auch die Zahl $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch da sie die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ erfüllt (mit $n = 2$).

Bezeichnen wir mit $\mathbb{A}$ die Mengen von allen algebraischen Zahlen. Es möglich zu beweisen, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und das Verhältnis zweier algebraischen Zahlen wieder algebraisch sind, und somit ist $\mathbb{A}$ ein Körper.

Offensichtlich gelten die Inklusionen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q} \neq \mathbb{A}$. Man kann beweisen, dass $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ (siehe Aufgaben), woraus folgt, dass es nicht-algebraische Zahlen gibt. Die reellen Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendent.* Ein Beispiel von transzendenter Zahl ist die Zahl π, die später rigoros definiert wird.

Kardinalzahl $\left|2^X\right|$. Alle uns bisher getroffenen unendlichen Mengen haben die Kardinalzahlen $|\mathbb{N}|$ oder $|\mathbb{R}|$. Man kann fragen, ob es andere Kardinalzahlen gibt, zum Beispiel zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$. Die Vermutung, dass es eine Kardinalzahl zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$ gibt, heißt die *Kontinuumshypothese.* Die Antwort darauf ist erstaunlich: in den Rahmen von der üblichen axiomatischen Theorie von Mengen und Zahlen kann diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden. Deshalb kann die Existenz bzw nicht-Existenz der Kardinalzahl zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$ als ein unabhängiges Axiom betrachtet werden.

Im Gegensatz dazu kann die Existenz von Kardinalzahlen $> |\mathbb{R}|$ leicht geantwortet werden.

Satz 1.31 *Für jede Menge X gilt* $|X| < \left|2^X\right|$.

Insbesondere gilt $\left|2^{\mathbb{R}}\right| > |\mathbb{R}|$. Man kann zeigen, dass $|\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$ (siehe Aufgaben), was einen anderen Beweis von der Ungleichung $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ liefert. Satz 1.31 ergibt auch, dass es keine maximale Kardinalzahl gibt.

Beweis. Die Ungleichung $|X| \leq |Y|$ gilt genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, und die Gleichheit $|X| = |Y|$ gilt, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. Um die echte Ungleichung $|X| < |Y|$ zu beweisen, müssen wir folgendes zeigen:

- es existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$,
- es existiert keine bijektive Abbildung $f : X \to Y$.

Eine injective Abbildung $f : X \to 2^X$ kann ma wie folgt definieren: $f(x) = \{x\}$, wobei $\{x\}$ eine Teilmenge von X ist, die aus einem Element x besteht.

Sei $f : X \to 2^X$ eine beliebige Abbildung. Beweisen wir, dass f nicht surjektiv ist (und somit auch nicht bijektiv). Betrachten wir die Menge

$$S = \{x \in X : x \notin f(x)\}. \tag{1.44}$$

Beachten wir, dass $f(x)$ eine Teilmenge von X ist, und die Frage, ob x ein Element von $f(x)$ ist, ist völlig sinnvoll. Die Menge S ist eine Teilmenge von X und deshalb ein Element von 2^X. Zeigen wir, dass die Menge S kein Urbild hat. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $f(y) = S$ für ein $y \in X$, und betrachten zwei Fälle.

1. Ist $y \in S$ so gilt nach (1.44) $y \notin f(y) = S$, was ist unmöglich.
2. Ist $y \notin S$ so gilt nach (1.44) $y \in f(y) = S$ – auch unmöglich.

Deshalb führt die Bedingung $f(y) = S$ zum Widerspruch, woraus folgt, dass f keine surjektive Abbildung ist. ■

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
25.05.12

1.9 Komplexe Zahlen

Definition. Die Menge $\mathbb{C}$ von *komplexen Zahlen* its die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von allen Paaren (x, y) von reellen Zahlen x, y, mit den folgenden Operationen $+$ und $\cdot$:

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

Betrachten wir die komplexen Zahlen der Form $(x, 0)$. Es folgt aus der Definition, dass

$$\begin{aligned}(x,0)+(y,0) &= (x+y,0)\\(x,0)\cdot(y,0) &= (xy,0).\end{aligned}$$

Die mit $\varphi(x) = (x, 0)$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine injektive Abbildung, und sie erhält die Operationen $+$ und $\cdot$. Deshalb identifiziert man die Menge $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, indem man x mit $(x, 0)$ identifiziert.

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ ist besonders wichtig und wird mit i bezeichnet (in einigen Bücher wird $(0, 1)$ mit j bezeichnet). Die Zahl $i = (0, 1)$ heißt die *imaginäre Einheit.* Nach Definition haben wir

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

so that $i^2 = -1$.

Bemerken wir auch, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{C}$,

$$a \cdot (x, y) = (a, 0) \cdot (x, y) = (ax, ay),$$

woraus folgt

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0, 1) = x + yi.$$

Somit kann jede komplexe Zahl in der Form $x + yi$ (oder $x + iy$) dargestellt werden. Diese Darstellung heißt die *kartesische* oder *algebraische* Form der komplexen Zahl. Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Dabei wird x als Realteil und y als Imaginärteil von z bezeichnet. Man schreibt: $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$. Folglich haben wir

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Offensichtlich gilt $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\operatorname{Im} z = 0$.

In der kartesischen Form sehen die Rechenregeln von komplexen Zahlen wie folgt aus:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

und

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Man addiert und multipliziert die Ausdrücke $x + iy$ und $x' + iy'$ genau so, wie die reellen Zahlen, aber mit zusätzlicher Regel $i^2 = -1$.

Um weiter zu gehen brauchen wir die folgende Behauptung.

Behauptung. *Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}_+$ existiert genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = a$.*

Definition. Die eindeutige Zahl x mit $x^2 = a$ heißt die Quadratwurzel aus a und wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Für Beweis siehe die Aufgaben.

Erwähnen wir die folgenden Eigenschaften von Quadratwurzel.

1. $0 \le a \le b$ ergibt $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$. In der Tat würde die Ungleichung $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ implizieren $a > b$, was im Widerspruch mit der Voraussetzung $a \le b$ steht.

2. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{a^2} = |a|$. Ist $a \ge 0$, so gilt es nach Definition. Für $a < 0$ haben wir $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a = |a|$.

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ definieren wir den Betrag $|z|$ durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}. \tag{1.45}$$

Insbesondere gilt $|z| \in \mathbb{R}_+$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, wie es aus (1.45) folgt. Ist z reell, d.h. $z = x$, so gilt

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x| .$$

Wie sehen, dass die Begriffe von Beträgen für reelle Zahlen und für komplexe Zahlen übereinstimmen.

Für komplexe Zahlen gibt es eine neue Operation – die *Konjugation.*

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir die *konjugiert komplexe* Zahl $\bar{z}$ durch

$$\bar{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

Offensichtlich gilt $\bar{\bar{z}} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und auch $\bar{z} = z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Im nächsten Satz In the next statement versammeln wir einige Eigenschaften der Operationen mit komplexen Zahlen.

Satz 1.32 (a) *Die folgenden Identität gelten für alle komplexen Zahlen* z_1, z_2, z_3*:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{1.46}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3) \tag{1.47}$$

$$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \tag{1.48}$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z\bar{z} = |z|^2 \tag{1.49}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \tag{1.50}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\, |z_2| \quad \textit{und} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \tag{1.51}$$

(b) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_2 \neq 0$ *existiert eine eindeutige Zahl* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $z_2 w = z_1$*. Die Zahl* w *wird mit* $\frac{z_1}{z_2}$ *bezeichnet. Es gelten auch die Identitäten:*

$$\frac{z_1}{z_2} = |z_2|^{-2}\, z_1 \bar{z}_2 \quad \textit{und} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{1.52}$$

Die Ungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (und ihre Folgerung $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$) heißt die *Dreiecksungleichung.*

Beweis. (a) Die Kommutativgesetze für Addition und Multiplikation, das Assoziativgesetz für Addition, und das Distributivgesetz (die Identitäten (1.46), (1.48) und die erste Identität in (1.47)) sind direkte Folgen der Definition. Beweisen wir das Assoziativgesetz für Multiplikation (die zweite Identität in (1.47)). Bezeichnen wir $z_k = x_k + iy_k$ und erhalten

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

und

$$\begin{aligned}(z_1z_2)\,z_3 &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2))\,(x_3 + iy_3)\\ &= (x_1x_2 - y_1y_2)\,x_3 - y_3\,(x_1y_2 + y_1x_2) + i\,(x_1x_2 - y_1y_2)\,y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)\,x_3\\ &= x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 + i\,(x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\end{aligned} \tag{1.53}$$

Andererseits gilt

$$z_1\,(z_2z_3) = (z_2z_3)\,z_1,$$

und die ähnliche Entwicklung von $(z_2z_3)\,z_1$ erhält man aus (1.53) bei der folgenden Permutation von den Indizen

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & 3 & 1\end{array}$$

Der Realteil von $(z_1z_2)\,z_3$ ändert sich bei dieser Permutation wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1x_2x_3 & - & y_1y_2x_3 & - & x_1y_2y_3 & - & y_1x_2y_3\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ x_2x_3x_1 & - & y_2y_3x_1 & - & x_2y_3y_1 & - & y_2x_3y_1\end{array}$$

und man sieht in den beiden Zeilen die gleichen Terme. Das Gleiche gilt für den Imaginärteil, woraus folgt

$$(z_1z_2)\,z_3 = (z_2z_3)\,z_1$$

und somit auch die zweite Identität in (1.47).

Beweisen wir jetzt (1.49). Setzen wir $z = x + iy$. Dann $\bar z = x - iy$ und

$$z + \bar z = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z$$

und

$$z\bar z = (x + iy)\,(x - iy) = \left(x^2 + y^2\right) + i\,(xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Die erste Identität in (1.50) ist offensichtlich, die zweite Identität wird wie folgt bewiesen: aus

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_1y_2 + y_1x_2)$$

und

$$\bar z_1\bar z_2 = (x_1 - iy_1)\,(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_1y_2 + y_1x_2)$$

erhalten wir $\overline{z_1z_2} = \bar z_1\bar z_2$.

The erste Identität in (1.51) ist wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned}|z_1z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2\\ &= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2\\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2\\ &= \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) = |z_1|^2\,|z_2|^2\,.\end{aligned}$$

Um die Ungleichung in (1.51) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,(\bar z_1 + \bar z_2) = z_1\bar z_1 + z_1\bar z_2 + z_2\bar z_1 + z_2\bar z_2\\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar z_2) + |z_2|^2\,,\end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2)\,.$$

Da $|\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$, erhalten wir

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\,,$$

woraus

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

folgt.

(b) Multiplizieren die Gleichung $z_2 w = z_1$ mit $\bar{z}_2$ ergibt

$$|z_2|^2\,w = z_1\bar{z}_2,$$

wobei wir $\bar{z}_2 z_2 = |z_2|^2$ benutzt haben. Da $|z_2| > 0$, können wir diese Gleichung weiter mit $|z_2|^{-2}$ multiplizieren und somit erhalten

$$w = |z_2|^{-2}\,z_1\bar{z}_2, \tag{1.54}$$

was die Zahl w eindeutig bestimmt. Umgekehrt, definieren wir w mit (1.54) und erhalten

$$z_2 w = |z_2|^{-2}\,z_1\bar{z}_2 z_2 = |z_2|^{-2}\,z_1\,|z_2|^2 = z_1,$$

was sowohl die Existenz von w als auch die erste Identität in (1.52) beweist. Für den Beträge der beiden Seiten von (1.54) erhalten wir

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |w| = |z_2|^{-2}\,|z_1|\,|\bar{z}_2| = |z_2|^{-1}\,|z_1| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

was die zweite Identität in (1.52) beweist. ■

Zum Abschluss von Kapitel 1. In diesem Kapitel haben wir axiomatisch die Zahlen (und Mengen) eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften bewiesen. Man kann die Mathematik mit einem (sehr großen) Gebäude vergleichen, wo alle Begriffe und Aussagen wohnen. Dann befindet sich das Kapitel 1 noch im Keller. Das Fundament besteht aus Axiomen, und die unmittelbaren Folgerungen von Axiomen, die in diesem Kapitel gewonnen wurden, liegen noch im Kellergeschoss wie die Werkzeuge. Im Erdgeschoss befindet sich die Schulmathematik, die jetzt von uns teilweise begründet ist und auf dem richtigen Fundament steht, und in den Obergeschossen – die Universitäts-Mathematik, die noch gelernt werden muss.

Chapter 2

Folgen und ihre Grenzwerte

2.1 Konvergenz von Folgen

Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir interessieren uns für das Verhalten der Folgenglieder x_n für großen Werten von n. Verschiedene Folgen können die verschiedenen Verhalten zeigen. Zum Beispiel, in der Folge $\{(-1)^n\}$ springt x_n immer zwischen 1 und -1. Hingegen werden die Glieder in der Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ immer kleiner und näheren sich der Null an für großen Werten des Index n. Es ist natürlich zu sagen, dass die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ den *Grenzwert* 0 besitzt, während $\{(-1)^n\}$ keinen Grenzwert hat.

Definition. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt der *Grenzwert* der Folge $\{a_n\}$ genau dann, wenn:

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert } N \in \mathbb{N} \text{ so dass } |x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \geq \mathbb{N},$$

oder, mit Hilfe von den Quantoren,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |x_n - a| < \varepsilon.} \tag{2.1}$$

Besitzt die Folge $\{x_n\}$ einen Grenzwert, so heißt die Folge *konvergent*; sonst heißt die Folge *divergent*. Man sagt auch: die Folge *konvergiert* bzw *divergiert*.

Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so benutzt man die folgende Schreibweise:

$$x_n \to a \quad (x_n \text{ konvergiert gegen } a)$$

$$x_n \to a \text{ für } n \to \infty \quad (a_n \text{ konvergiert gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich}).$$

Um den Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ zu bezeichnen, benutzt man auch die Notation $\lim x_n$, die heißt der *Limes* von x_n. Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so schreibt man auch

$$a = \lim x_n$$

oder

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
30.05.12

Die Konvergenz $x_n \to a$ kann als eine Annäherung von a mit den Folgenglieder x_n betrachtet werden. Betrachten wir $\varepsilon > 0$ als ein vorgegebener Approximationsfehler.

Dann bedeutet die Bedingung (2.1), dass jedes Folgenglied x_n mit genügend großem n eine "gute" Annäherung von a ist, nämlich, mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$. Es ist wichtig zu betonen, dass diese Eigenschaft für beliebiges positives ε gelten muss, so dass der Approximationsfehler beliebig klein sein kann.

Beispiel. Betrachten wir eine Folge $\{x_n\}$ von positiven Zahlen, die per Induktion definiert wird wie folgt:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Die weiteren Glieder dieser Folge sind

$$\begin{aligned} x_2 &= 1,5 \\ x_3 &= 1,416\,666\,666\,666\,66... \\ x_4 &= 1,414\,215\,686\,274\,51... \\ x_5 &= 1,414\,213\,562\,374\,69... \\ x_6 &= 1,414\,213\,562\,373\,10... \\ &... \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe Aufgaben), dass $x_n \to \sqrt{2}$, so dass die obigen Glieder die Annäherungen von $\sqrt{2}$ mit den fallenden Fehler sind. In der Tat gilt

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,37310...$$

so dass schon x_6 eine sehr gute Annäherung von $\sqrt{2}$ ist.

Besprechen wir weiter die Bedingung (2.1) und beweisen einige Eigenschaften von Limes.

Definition. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und nennen $U_\varepsilon(a)$ die ε-*Umgebung* von a.

Offensichtlich gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad x \in U_\varepsilon(a). \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir die folgende Umformulierung der Konvergenz:

$$x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in U_\varepsilon(a). \tag{2.2}$$

Bemerkung. Die Definition (2.1) von dem Grenzwert (und ihre Umformulierung (2.2)) ist einer von wichtigsten Begriffen in der ganzen Mathematik. Der Begriff von Grenzwert wurde intuitiv, ohne genaue Definition, noch von den Begründern von Infinitesimalrechnung Isaac Newton und Wilhelm-Gottfried Leibniz im 17. Jahrhundert benutzt. Man brauchte fast 150 Jahre von weiterer Entwicklung der Analysis um eine rigorose Definition des Grenzwertes vorzulegen. Diese Definition wurde von Augustin Louis Cauchy in ca. 1821 gegeben, was als der Anfang von moderner Analysis betrachtet werden kann.

Satz 2.1 *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$\begin{aligned} x_n \to a \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \textit{gilt} \ \ x_n \in U_\varepsilon(a) \ \ \textit{für fast alle } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \textit{ist die Menge} \ \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \ \textit{endlich,} \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei "fast alle $n \in \mathbb{N}$" bedeutet: für alle $n \in \mathbb{N} \setminus S$ mit einer endlichen Menge S.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \ \ x_n \in U_\varepsilon(a) \ \Leftrightarrow \ x_n \in U_\varepsilon(a) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus S \text{ mit endlicher Menge } S.$$

Gilt $x_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$, so gilt diese Bedingung für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{E}_{N-1}$, wobei $\mathcal{E}_{N-1} = \{1, ..., N-1\}$ endlich ist. Umgekehrt, gilt $x_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus S$, wobei S eine endliche Menge ist, so setzen wir

$$N = \max S + 1.$$

Dann liegt jedes $n \geq N$ außerhalb S und somit erfüllt die Bedingung $x_n \in U_\varepsilon(a)$.

Die zweite Äquivalenz in (2.3) ist offensichtlich. ■

Beispiel. 1. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. In der Tat, nach Archimedischem Axiom, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Deshalb für jedes $n \geq N$ gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$, d.h. $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ und somit $\frac{1}{n} \to 0$.

2. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ derart, dass $x_n = a$ für alle $n \geq n_0$. Dann für jedes $\varepsilon > 0$ und für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$, woraus $x_n \to a$ folgt. Man kann dies auch so formulieren: die Folge, wo fast alle Glieder gleich a sind, konvergiert gegen a.

3. Betrachten wir die Folge $x_n = n$ und zeigen, dass diese Folge divergiert. Dafür müssen wir zeigen, dass jedes $a \in \mathbb{R}$ kein Grenzwert ist. Anwendung der Negation zu den beiden Seiten von (2.3) ergibt

$$\boxed{x \not\to a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ derart, dass die Menge } \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \text{ unendlich ist.}} \tag{2.4}$$

In unserem Fall wählen wir, zum Beispiel, $\varepsilon = 1$. Dann gilt die Bedingung $x_n \notin U_1(a)$ für alle $n > a + 1$, insbesondere für unendlich viele n, woraus die Divergenz folgt.

4. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert. Der Wert $a = 1$ ist kein Grenzwert, da es außerhalb $U_1(1)$ unendlich viele Glieder mit dem Wert -1 gibt. Analog ist $a = -1$ kein Grenzwert. Sei $a \neq 1$ und $a \neq -1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ weder 1 noch -1 enthält, und somit alle Glieder x_n außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen. Deshalb ist a kein Grenzwert.

Die weiteren Eigenschaften des Grenzwertes werden in dem folgenden Satz angegeben.

Satz 2.2 (a) *Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.*

(b) *Jede konvergente Folge ist (nach oben und nach unten) beschränkt.*

(c) $x_n \to a \Leftrightarrow |x_n - a| \to 0.$

(d) *Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \leq y_n$ für fast alle n, so gilt*

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

(*e*) *Seien* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *drei Folgen mit* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *für fast alle* n. *Gilt*

$$\lim x_n = \lim z_n =: a,$$

so ist $\{y_n\}$ *auch konvergent und*

$$\lim y_n = a.$$

Beweis. (*a*) Seien a und b zwei Grenzwerte einer Folge $\{x_n\}$. Sei $a > b$. Setzen wir $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ und beachten, dass die Intervalle $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ disjunkt sind. Nach Satz 2.1 außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen nur endlich viele Folgenglieder. Dann innerhalb $U_\varepsilon(b)$ können nur endlich viele Folgenglieder liegen, und somit ist b kein Grenzwert.

(*b*) Sei $x_n \to a$. Wählen wir ein $\varepsilon > 0$, zum Beispiel $\varepsilon = 1$. Die Menge von x_n, die in $U_\varepsilon(a)$ liegen, ist beschränkt, da $U_\varepsilon(a)$ beschränkt ist. Außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen nur endlich viele Glieder, so dass die Menge davon auch beschränkt ist. Somit ist die ganze Menge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt als die Vereinigung zweier beschränkten Mengen.

(*c*) Setzen wir $y_n = |x_n - a|$. Wir müssen beweisen, dass

$$y_n \to 0 \Leftrightarrow x_n \to a.$$

Dafür reicht es zu zeigen, dass

$$|y_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

was gilt, da die Bedingung $|y_n - 0| < \varepsilon$ offensichtlich äquivalent zu $y_n < \varepsilon$ ist.

(*d*) Bezeichnen wir $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a > b$, und setzen $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Nach Definition existieren $N', N'' \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\begin{aligned} \forall n &\geq N' \quad x_n \in U_\varepsilon(a) \\ \forall n &\geq N'' \quad y_n \in U_\varepsilon(b), \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\forall n \geq \max(N', N'') \quad x_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{und } y_n \in U_\varepsilon(b).$$

Die letzte Bedingung ergibt $x_n > y_n$ für fast alle n, was im Widerspruch zur Voraussetzung $x_n \leq y_n$ steht.

(*e*) Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $N', N'' \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\begin{aligned} \forall n &\geq N' \quad x_n \in U_\varepsilon(a) \\ \forall n &\geq N'' \quad z_n \in U_\varepsilon(a), \end{aligned}$$

Es existiert auch ein $N''' \in \mathbb{N}$ derart, dass die Bedingung $x_n \leq y_n \leq z_n$ gilt für alle $n \geq N''$. Dann für alle

$$n \geq N := \max(N', N'', N''')$$

liegen die beiden Zahlen x_n und z_n in $U_\varepsilon(a)$, und gilt $x_n \leq y_n \leq z_n$, woraus folgt, dass auch $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Somit erhalten wir $y_n \to a$. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen wir die Konvergenz von $\{x_n\}$ abhängig von dem Wert von a. Betrachten wir verschiedene Fälle.

1. Sei $a > 1$, d.h. $a = 1 + c$ wobei $c > 0$. Nach Bernoullische Ungleichung haben wir

$$a^n = (1 + c)^n \geq 1 + nc,$$

woraus folgt, dass $\{a^n\}$ unbeschränkt ist und somit divergent.

2. Sei $a < -1$. Dann $|x_n| = |a|^n$ impliziert, dass die Folge $\{|x_n|\}$ unbeschränkt ist und somit auch $\{x_n\}$. Folglich ist $\{x_n\}$ divergent.

3. Sei $a = -1$. Die Folge $x_n = (-1)^n$ wurde schon betrachtet, und wir wissen, dass sie divergiert.

4. Sei $a = 1$. Dann $x_n = 1$ und diese Folge konvergiert gegen 1.

5. Sei $a = 0$. Dann $\{x_n\}$ ist auch eine konstante Folge, die gegen 0 konvergiert.

6. Sei $0 < a < 1$. Setzen wir $b = \frac{1}{a} > 1$. Wie oberhalb schreiben wir $b = 1 + c$ mit $c > 0$ und erhalten

$$b^n \geq 1 + nc > nc$$

woraus folgt

$$0 < a^n < \frac{1}{nc}.$$

Da $\frac{1}{nc} \to 0$, erhalten wir nach Satz 2.2(e), dass $a_n \to 0$.

7. Sei $-1 < a < 0$. Dann gilt $0 < |a| < 1$ und $|a^n| = |a|^n \to 0$, woraus folgt $a^n \to 0$.

Somit ist die Folge $\{a^n\}$ konvergent genau dann, wen $-1 < a \leq 1$.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
01.06.12

2.2 Rechenregeln für den Grenzwert

Hier beweisen wir einige Rechenregeln für den Grenzwert.

Satz 2.3 *Seien $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Dann gelten*

$$x_n + y_n \to a + b, \qquad x_n - y_n \to a - b, \qquad x_n y_n \to ab.$$

Falls $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$, so gilt auch

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

Insbesondere für die konstante Folge $x_n = a$ erhalten wir $ay_n \to ab$.

Man kann die obigen Regeln mit Hilfe von dem Zeichen lim umschreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim (x_n + y_n) &= \lim x_n + \lim y_n \\ \lim (x_n - y_n) &= \lim x_n - \lim y_n \\ \lim (x_n y_n) &= \lim x_n \lim y_n \\ \lim \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim x_n}{\lim y_n} \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten sinnvoll sind.

Beweis. Betrachten wir zunächst einen speziellen Fall für die *Nullfolgen.* Eine Folge $\{x_n\}$ heißt Nullfolge falls $x_n \to 0$.

Behauptung. *Sind* $\{x_n\}$ *und* $\{y_n\}$ *die Nullfolgen, so sind auch* $\{x_n + y_n\}$ *und* $\{cx_n\}$ *Nullfolgen, für jedes* $c \in \mathbb{R}$.

Ist $c = 0$, so gilt $cx_n \to 0$ offensichtlich. Sei $c \neq 0$. Nach Definition von $x_n \to 0$ haben wir

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Daraus folgt

$$|cx_n| = |c| \, |x_n| < |c| \, \varepsilon =: \varepsilon'.$$

Da der Wert von ε beliebig positiv ist, so ist auch ε' beliebig positiv (für jedes $\varepsilon' > 0$ es gibt den entsprechenden Wert von $\varepsilon > 0$, nämlich $\varepsilon = \varepsilon' / |c|$), und wir erhalten:

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |cx_n| < \varepsilon'$$

und somit $cx_n \to 0$.

Für die Folge $y_n \to 0$ haben wir auch

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |y_n| < \varepsilon.$$

Deshalb gilt es für alle $n \geq N'' = \max(N, N')$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < 2\varepsilon := \varepsilon'.$$

Da ε' beliebige positiv ist, erhalten wir $x_n + y_n \to 0$.

Seien jetzt $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ beliebige Folgen mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Wir haben nach der Dreiecksungleichung

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \, .$$

Da $|x_n - a| \to 0$ und $|y_n - b| \to 0$, es folgt aus der obigen Behauptung, dass auch

$$z_n := |x_n - a| + |y_n - b| \to 0.$$

Da

$$0 \leq |x_n + y_n - (a + b)| \leq z_n$$

und $z_n \to 0$, erhalten wir nach Satz 2.2 dass

$$|x_n + y_n - (a + b)| \to 0$$

und somit

$$x_n + y_n \to a + b.$$

Die Konvergenz $x_n - y_n \to a - b$ beweist man analog.

Um die Produktregel zu beweisen, beachten wir erst, dass die Folge $\{x_n\}$ und somit auch $\{|x_n|\}$ beschränkt ist. Sei M eine obere Schranke für $\{|x_n|\}$, so dass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann schätzen wir die Differenz $x_n y_n - ab$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n (y_n - b)| + |(x_n - a) b| \\ &\leq M |y_n - b| + |b| \, |x_n - a| =: z_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nach Voraussetzungen haben wir $|y_n - b| \to 0$ und $|x_n - a| \to 0$. Nach der obigen Behauptung erhalten wir, dass $z_n \to 0$. Da

$$0 \leq |x_n y_n - ab| \leq z_n$$

und $z_n \to 0$, so gilt nach Satz 2.2 $|x_n y_n - ab| \to 0$ und $x_n y_n \to ab$.

Folglich gilt $cx_n \to ca$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Die letzte Behauptung $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ reicht es für positive Werte b zu beweisen (sonst betrachten wir $\{-y_n\}$ mit positiven Grenzwert). Zeigen wir zunächst, dass die Folge $\left\{\frac{1}{|y_n|}\right\}$ beschränkt ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Glieder y_n im Intervall $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Wählen $\varepsilon = b/2$ so dass für fast n gilt $y_n \in \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$, woraus folgt $|y_n| \geq \frac{b}{2}$ und $\frac{1}{|y_n|} \leq \frac{2}{b}$ für fast alle n. Es bleibt eine endliche Menge von Werten von n, wenn $y_n \notin \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$, und für die endliche Menge von n ist $\frac{1}{|y_n|}$ immer beschränkt. Damit ist die Folge $\left\{\frac{1}{|y_n|}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, sei M eine obere Schranke. Dann erhalten wir

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \frac{|bx_n - ay_n|}{b\,|y_n|} \leq \frac{M}{b}\,|bx_n - ay_n|\,.$$

Da $bx_n \to ba$ und $ay_n \to ab$, es folgt $|bx_n - ay_n| \to 0$ und somit $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \to 0$, was zu beweisen war. ■

Beispiel. Betrachten wir die Folge

$$x_n = \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c}$$

wobei $a' \neq 0$, und bestimmen ihren Grenzwert. Wir haben

$$x_n = \frac{n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}\right)} = \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}}.$$

Wie wir es schon wissen, $\frac{1}{n} \to 0$. Daraus folgt, dass auch $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{b}{n} \to 0$, $\frac{c}{n^2} \to 0$ usw. Nach Satz 2.3 erhalten wir $x_n \to \frac{a}{a'}$.

2.3 Existenz des Grenzwertes

2.3.1 Teilfolge

Definition. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge und $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ be eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (d.h. die Folge $\{n_k\}$ ist *streng monoton steigend*). Dann die Folge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ heißt eine *Teilfolge* von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Erinnern wir uns, dass eine Folge $\{x_k\}$ definiert wurde als eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, und die Folge $\{n_k\}$ ist auch eine Abbildung $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $\{x_{n_k}\}$ die zusammengesetzte Abbildung $x \circ n$ mit

$$(x \circ n)(k) = x(n(k)) = x_{n_k}.$$

Beispiel. Sei $n_k = 2k$. Dann $x_{n_k} = x_{2k}$ und die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ besteht aus alle Gliedern der Folge $\{x_n\}$ mit geraden n.

Behauptung. *Gilt $x_n \to a$, so gilt auch $x_{n_k} \to a$ für jede Teilfolge $\{n_k\}$.*

Beweis. Nach Definition von der Konvergenz $x_n \to a$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \qquad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Die Bedingungen $n_1 \geq 1$ und $n_{k+1} > n_k$ ergeben per Induktion, dass $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, woraus die folgenden Implikationen folgen:

$$k \geq N \Rightarrow n_k \geq N \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Deshalb erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k \geq N \qquad |x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

und somit $x_{n_k} \to a$. ■

Definition. Eine Zahl a heißt *Häufungspunkt* der Folge $\{x_n\}$ falls es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gibt mit $x_{n_k} \to a$.

Es folgt aus der obigen Behauptung, dass der Grenzwert immer ein Häufungspunkt ist.

Definition. Eine Zahl a heißt *Verdichtungspunkt* der Folge $\{x_n\}$ falls für jedes ε die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält.

Erinnern wir, dass a ein Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ genau dann ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ fast alle x_n enthält. Daraus folgt, dass der Grenzwert immer ein Verdichtungspunkt ist. Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel. Die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert, obwohl diese Folge zwei Häufungspunkte hat: 1 und -1, da $x_{2k} \to 1$ und $x_{2k+1} \to -1$. Die beiden Werten 1 und -1 sind auch Verdichtungspunkte der Folge $\{(-1)^n\}$.

Satz 2.4 *Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ genau dann, wenn a Verdichtungspunkt ist.*

Beweis. Sei a ein Verdichtungspunkt. Definieren wir per Induktion die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $x_{n_k} \to a$. Wählen wir erst n_1 so dass $x_{n_1} \in U_1(a)$. Ist n_{k-1} schon definiert, so wählen wir $n_k > n_{k-1}$ derart, dass $x_{n_k} \in U_{1/k}(a)$. Das ist immer möglich, da $U_{1/k}(a)$ unendlich viele Glieder enthält, insbesondere mit dem Index $n > n_{k-1}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}.$$

Da $\frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$, es folgt, dass $|x_{n_k} - a| \to 0$ und somit $x_{n_k} \to a$.

Sei a ein Häufungspunkt, d.h. $x_{n_k} \to a$ für eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Nach Satz 2.1 enthält $U_\varepsilon(a)$ fast alle Glieder der Folge $\{x_{n_k}\}$. Folglich enthält $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$, was zu beweisen war. ■

Hauptsatz 2.5 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen has eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $a \leq x_n \leq b$, d.h. $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.4 reicht es zu zeigen, dass es einen Verdichtungspunkt der Folge $\{x_n\}$ gibt.

Nehmen wir das Gegenteil an, dass kein $c \in \mathbb{R}$ Verdichtungspunkt ist. Die Negation der Definition des Verdichtungspunktes ergibt folgendes: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(c)$ endlich viele Glieder von $\{x_n\}$ enthält. Bezeichnen wir mit I_c dieses Intervall $U_\varepsilon(c)$ (beachten wir, dass ε von c abhängig ist). Dann überdeckt die Familie $\{I_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ von offenen Intervallen die ganze Menge $\mathbb{R}$, insbesondere das Intervall $[a, b]$.

Nach dem Satz 1.22 von Heine-Borel ist $[a, b]$ kompakt, d.h. jede Überdeckung von $[a, b]$ mit offenen Intervallen enthält eine endliche Teilüberdeckung. Das bedeutet, dass es eine endliche Menge $\{I_{c_k}\}_{k=1}^N$ von Intervallen gibt, die $[a, b]$ überdecken. Da jedes I_{c_k} nur endliche Menge von Glieder $\{x_n\}$ enthält, erhalten wir, das auch $[a, b]$ nur endliche Menge von Glieder $\{x_n\}$ enthält, was im Widerspruch zur Definition der Folge ist. $\blacksquare$

Zweiter Beweis Dieser Beweis ist unabhängig von Satz 1.22, obwohl er die Konstruktion von dem Beweis des Satzes 1.22 benutzt.

Setzen wir $c = \frac{a+b}{2}$. Dann enthält eines von den zwei Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$. Bezeichnen wir dieses Intervall mit $[a_1, b_1]$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $[a_1, b_1] \subset [a, b]$,
2. $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$
3. $[a_1, b_1]$ enthält unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$.

Setzen wir $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ und wählen eines von zwei Intervallen $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$, das unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$ enthält. Bezeichnen dieses Intervall mit $[a_2, b_2]$, usw. Per Induktion erhalten wir eine Folge $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^\infty$ von Intervallen derart, dass

1. $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$,
2. $b_k - a_k = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$
3. $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$.

Die Folge $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^\infty$ ist eine Intervallschachtelung und somit hat nicht-leeren Durchschnitt. Sei x ein Element im $\bigcap_{k=1}^\infty [a_k, b_k]$. Jetzt bestimmen wir eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ die gegen x konvergiert. Wählen n_1 derart, dass $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Dann wählen wir n_2 so dass

$$n_2 > n_1 \text{ und } \ x_{n_2} \in [a_2, b_2].$$

Solches n_2 existiert, da $[a_2, b_2]$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält. Setzen wir weiter fort und definieren per Induktion eine Folge $\{n_k\}$ von natürlichen Zahlen mit

$$n_k > n_{k-1} \text{ und } \ x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

Beweisen wir, dass die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gegen x konvergiert. In der Tat liegen die beiden Zahlen x_{n_k} und x im $[a_k, b_k]$, woraus folgt

$$|x_{n_k} - x| \leq b_k - a_k.$$

Es folgt aus $b_k - a_k = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$ per Induktion, dass

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Da $\frac{1}{2^k} \to 0$ für $k \to \infty$, es folgt, dass $\frac{b-a}{2^k} \to 0$ und somit auch $|x_{n_k} - x| \to 0$, was ergibt $x_{n_k} \to x$.

2.3.2 Cauchy-Folge

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*) falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N \ \text{ gilt } \ |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Kurz bezeichnet man die Bedingung (2.7) wie folgt:

$$x_n - x_m \to 0 \ \text{ für } \ n, m \to \infty.$$

Hauptsatz 2.6 *Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen konvergiert genau dann, wenn $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.*

Die Bedeutung (2.7) heißt die *Cauchy-Bedingung*. Soll man die Konvergenz einer Folge $\{x_n\}$ beweisen, ohne den Grenzwert zu kennen, so hat die Cauchy-Bedingung einen Vorteil, da sie den Wert des Grenzwertes nicht braucht.

Beweis. Konvergenz $\Longrightarrow$ Cauchy-Bedingung. Sei $x_n \to a$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \qquad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass für alle $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < 2\varepsilon.$$

Da 2ε beliebig positiv ist, erhalten wir, dass $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt.

Cauchy-Bedingung $\Longrightarrow$ Konvergenz. Zeigen wir jetzt, dass die Cauchy-Folge $\{x_n\}$ beschränkt ist. Nach Definition existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| \leq 1,$$

insbesondere

$$\forall n \geq N \quad |x_n - x_N| \leq 1.$$

Dann liegt die Folge $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ im Intervall $[x_N - 1, x_N + 1]$ und ist somit beschränkt. Der Restteil $\{x_n\}_{n=1}^{N-1}$ ist beschränkt als eine endliche Folge. Deshalb ist die ganze Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt.

Nach Satz 2.5 existiert eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Sei a der Grenzwert von $\{x_{n_k}\}$. Beweisen wir, dass auch $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz $x_{n_k} \to a$ bedeutet, dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \ \ \forall k \geq K \text{ gilt } \ |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Sei N der Wert aus der Cauchy-Bedingung (2.7), für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Setzen wir $k = \max(K, N)$. Für dieses k gilt (2.8), aber auch $n_k \geq k \geq N$. Setzen wir in (2.7) $m = n_k$ und erhalten für jedes $n \geq N$

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

Zusammen mit $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ erhalten wir

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon.$$

Somit gilt $|x_n - a| < 2\varepsilon$ für alle $n \geq N$, woraus die Konvergenz $x_n \to a$ folgt. ■

Beispiel. Betrachten wir den unendlichen *Kettenbruch*:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} \tag{2.9}$$

deren Wert wie folgt definiert ist. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ setzen wir

$$x_n = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots\frac{1}{1}}}}$$

wobei die rechte Seite ein endlicher Kettenbruch ist, der n mal das Zeichen '+' enthält. Alternativ kann die Folge $\{x_n\}$ induktiv definiert werden wie folgt: $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt und somit konvergent ist (siehe Aufgaben). Der Grenzwert $x = \lim x_n$ heißt der Wert des Kettenbruches (2.9). Man kann x explizit bestimmen.

2.3.3 Monotone Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von reellen Zahlen heißt *monoton steigend* falls $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, and *monoton fallend* falls $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge heißt monoton falls sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beispiel. Die Folge $x_n = n$ ist monoton steigend, die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend, die konstante Folge $x_n = a$ ist gleichzeitig monoton steigend und fallend, die Folge $x_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Ist $\{x_n\}$ monoton steigend, dann gilt $x_n \geq x_m$ für alle $n \geq m$. Insbesondere gilt $x_n \geq x_1$ so dass x_1 eine untere Schranke ist, und $\{x_n\}$ nach unten beschränkt ist. Ist $\{x_n\}$ monoton fallend, so gilt $x_n \leq x_m$ für alle $n \geq m$, und $\{x_n\}$ ist nach oben beschränkt.

Hauptsatz 2.7 *Jede beschränkte monotone Folge $\{x_n\}$ konvergiert. Ist $\{x_n\}$ monoton steigend, so gilt $\lim x_n = \sup\{x_n\}$. Ist $\{x_n\}$ monoton fallend, so gilt $\lim x_n = \inf\{x_n\}$.*

Da nach Satz 2.2 ist any konvergente Folge beschränkt, so erhalten wir, das eine monotone Folge genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte monoton steigende Folge. Die Beschränktheit impliziert die Existenz des Supremums

$$a = \sup\{x_n\} \in \mathbb{R}$$

(siehe Satz 1.8). Beweisen wir, dass $x_n \to a$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Zahl $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n\}$. Deshalb existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Da die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend ist, erhalten wir

$$x_n > a - \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Da nach Definition von a gilt

$$x_n \leq a,$$

woraus folgt $x_n \in (a - \varepsilon, a]$ und somit

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Das dies für alle $n \geq N$ gilt, beschließen wir, dass $x_n \to a$.

Analog beweist man, dass eine beschränkte monoton fallende Folge gegen ihr Infimum konvergiert. ■

Beispiel. Die Folge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton steigend und beschränkt (siehe Aufgaben). Der Grenzwert

$$e := \lim x_n = 2,718281828459045...$$

ist eine transzendente Zahl, die eine wichtige Rolle in Analysis spielt.

Beispiel. Der Wert der unendlichen Wurzeln

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}$$

wird als $\lim x_n$ definiert, wobei $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$. Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend und beschränkt ist, woraus die Konvergenz folgt (siehe Aufgaben). Der Grenzwert $\lim x_n$ kann danach explizit berechnet werden.

Beispiel. Betrachten wir einen unendlichen q-adischen Bruch

$$0, a_1 a_2 ... \tag{2.10}$$

wobei $a_k \in \{0, ..., q - 1\}$ die q-adischen Ziffern sind. Wir haben schon die Definition des Wertes des Bruches. Mit Hilfe von dem Begriff des Grenzwertes einer Folge kann man jetzt eine alternative (aber äquivalente) Definition geben wir folgt. Betrachten wir die Partialsummen des Bruches

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} = 0, a_1 ... a_n$$

und beachten, dass die Folge $\{x_n\}$ monotone steigend ist. Diese Folge ist auch beschränkt, da $x_n \in [0, 1]$. Nach Satz 2.7 existiert der Grenzwert $\lim x_n$, der als Definition der Wertes des Bruches (2.10) angenommen werden kann. Diese Definition ist äquivalent zur früheren Definition – siehe Aufgaben.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
08.06.12

2.4 Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$

Umgebung in $\overline{\mathbb{R}}$. Erinnern wir uns, dass $\lim x_n = a$ genau dann gilt, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Die ähnliche Definition kann man im Fall $a = \pm\infty$ benutzen falls man den Begriff von Umgebung von $\pm\infty$ definiert.

Definition. Für jedes $E \in \mathbb{R}$ definieren wir die Umgebung $U_E(+\infty)$ durch

$$U_E(+\infty) = (E, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x > E\} \cup \{+\infty\}.$$

Analog definieren wir die Umgebung $U_E(-\infty)$ durch

$$U_E(-\infty) = [-\infty, E) = \{x \in \mathbb{R} : x < E\} \cup \{-\infty\}.$$

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ hat den Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$ falls:

$$\text{jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ enthält fast alle Glieder von } \{x_n\}. \tag{2.11}$$

Man schreibt in diesem Fall $\lim x_n = a$ oder $x_n \to a$ für $n \to \infty$.

Ist a reell, so sagt man, dass x_n gegen a konvergiert. Ist $a = \pm\infty$, so sagt man, dass dass x_n gegen a *divergiert*.

Divergiert die Folge x_n gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so sagt man, dass die Folge *bestimmt divergiert*. Hat die Folge keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$, so sagt man, dass die Folge *unbestimmt divergiert*.

Bemerkung. Die Terminologie "divergiert gegen $\pm\infty$" ist archaisch, obwohl traditionell noch benutzt wird. Es kein Fehler zu sagen, dass eine Folge $\{x_n\}$ gegen a in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, ohne zu wissen, ob a endlich oder unendlich ist.

Beispiel. 1. Die Folge $x_n = n$ divergiert gegen $+\infty$. Jede Umgebung von $+\infty$ hat die Form $U_E(+\infty)$ mit $E \in \mathbb{R}$. Für jedes $E \in \mathbb{R}$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > E$, so dass $\forall n \geq N$ gilt $x_n > E$ d.h. $x_n \in U_E(+\infty)$, woraus folgt $x_n \to +\infty$. Analog divergiert die Folge $x_n = -n$ gegen $-\infty$. Mit gleichem Argument beweist man, dass die Folge $x_n = cn$ gegen $+\infty$ divergiert, falls $c > 0$, und gegen $-\infty$ falls $c < 0$.

2. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$. Wir wissen schon, dass diese Folge konvergiert genau dann, wenn $a \in (-1, 1]$. Zeigen wir, dass falls $a > 1$ dann $a^n \to +\infty$. Schreiben wir $a = 1 + c$ wobei $c > 0$ und erhalten mit Hilfe von Bernoullischer Ungleichung

$$a^n = (1 + c)^n > cn.$$

Da $cn \to +\infty$, daraus folgt, dass auch $a^n \to +\infty$.

Für $a < -1$ wechselt die Folge $x_n = a^n$ immer das Vorzeichen. Somit enthält weder $U_0(+\infty)$ noch $U_0(-\infty)$ fast alle Glieder, und die Folge divergiert unbestimmt.

Operationen mit $+\infty$ und $-\infty$. Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir Addition mit $+\infty$ wir folgt:

$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & -\infty < a \le +\infty \\ \text{unbestimmt}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Analog definiert man Addition mit $-\infty$. Die Multiplikation mit $+\infty$ wird wie folgt definiert:

$$(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & 0 < a \le +\infty \\ -\infty, & -\infty \le a < 0 \\ \text{unbestimmt}, & a = 0. \end{cases}$$

und analog mit $-\infty$. Division durch ∞ wird wie folgt definiert:

$$\frac{a}{+\infty} = \begin{cases} 0, & a \in \mathbb{R} \\ \text{unbestimmt}, & a = +\infty \text{ or } a = -\infty. \end{cases}$$

Die folgenden Operationen bleiben unbestimmt: $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, and $\frac{\infty}{\infty}$. Diese Ausdrücke zusammen mit $\frac{0}{0}$ heißen die *unbestimmte* Ausdrücke.

Im nächsten Satz sammeln wir die Verallgemeinerungen von den Sätzen 2.3, 2.5, and 2.7 zum Fall, wenn die Grenzwerte $\pm\infty$ sein können.

Satz 2.8 (a) *Seien* $\{x_n\}$ *und* $\{y_n\}$ *zwei Folgen von reellen Zahlen mit* $\lim x_n = a$ *und* $\lim y_n = b$ *wobei* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*. Dann gilt:*

$$\lim (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim (x_n y_n) = ab, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $a + b$, ab, *und* $\frac{a}{b}$ *wohldefiniert sind (und* $y_n \neq 0$ *im letzten Fall).*

(b) *Jede Folge von Elementen von* $\overline{\mathbb{R}}$ *hat eine Teilfolge, die einen Grenzwert in* $\overline{\mathbb{R}}$ *hat.*

(c) *Für jede monoton steigende Folge* $\{x_n\}$ *von Elementen von* $\overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \{x_n\}. \tag{2.12}$$

Für jede monoton fallende Folge $\{x_n\}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf \{x_n\}.$$

Insbesondere jede monotone Folge hat immer einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Beweis. Die Teil (a) endlichen a, b wurden im Satz 2.3 bewiesen. Für unendlichen a, b siehe die Aufgaben. Teil (b) für beschränkte Folge folgt aus dem Satz 2.5. Für unbeschränkte Folgen siehe die Aufgaben.

(c) Sei $\{x_n\}$ monoton steigend. Ist $\sup \{x_n\}$ endlich, so ist die Folge $\{x_n\}$ beschränkt, und die Identität (2.12) war im Satz 2.7 bewiesen. Sei $\sup \{x_n\} = +\infty$. Dann für jedes $E \in \mathbb{R}$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > E$. Da $\{x_n\}$ monoton steigend ist, so erhalten wir, dass $x_n > E$ für alle $n \ge N$, woraus $\lim x_n = +\infty$ folgt, was zu bewiesen war. Der Fall von den monoton fallenden Folge ist analog. ■

Bemerkung. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{0}{0}$ können aus dem folgenden Grund keinen vernünftigen Wert gegeben werden. Es existieren die reellen Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ mit $x_n \to +\infty$ und $y_n \to +\infty$, während $x_n - y_n$ einen beliebigen vorgegebenen Grenzwert (oder überhaupt keinen Grenzwert) hat (siehe die Aufgaben). Deshalb kann die Differenz $\infty - \infty$ beliebigen Wert annehmen und deshalb bleibt unbestimmt. Gleiches gilt für andere unbestimmten Ausdrücke.

2.5 Limes superior und Limes inferior

Erinnern wir uns, dass ein Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ ist der Grenzwert einer Teilfolge von $\{x_n\}$. Die gleiche Definition gilt, wenn x_n Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ sind und die Grenzwerte von Teilfolgen auch Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ sein können.

Bezeichnen wir mit L die Menge von allen Häufungspunkten in $\overline{\mathbb{R}}$ von der Folge $\{x_n\}$. Nach Satz 2.8 ist die Menge L stets nicht leer. Nach Korollar 1.10 existieren das Supremum $\sup L \in (-\infty, +\infty]$ und das Infimum $\inf S \in [-\infty, +\infty)$.

Definition. Für jede Folge $\{x_n\}$ von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ definieren wir den *Limes superior* durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \sup L$$

und den *Limes inferior* durch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \inf L.$$

Alternative Bezeichnungen:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{and} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Satz 2.9 *Sei $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$.*

(a) *Ein Element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Häufungspunkt von $\{x_n\}$ genau dann, wenn jede Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält (d.h. a ein Verdichtungspunkt ist).*

(b) *Die folgenden Identitäten gelten:*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \{x_k\} \quad \textit{and} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \{x_k\}. \tag{2.13}$$

(c) *Die beiden Werte* $\limsup x_n$ *und* $\liminf x_n$ *sind Häufungspunkte der Folge* $\{x_n\}$. *Folglich ist* $\limsup x_n$ *ein maximaler Häufungspunkt der Folge* $\{x_n\}$ *und* $\liminf x_n$ *ein minimaler Häufungspunkt.*

Beweis. (a) Ist a reell, so war die Behauptung im Satz 2.4 bewiesen. Die Fälle $a = \pm\infty$ werden analog behandelt.

$(b) + (c)$ Setzen wir

$$y_n = \sup_{k\geq n} \{x_k\} = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}.$$

Wir müssen zeigen, dass dass $\lim y_n$ existiert und gleich $\sup L$ ist (Teil (b)) und $\lim y_n \in L$, was ergibt $\limsup x_n \in L$ (Teil (c)). Die Aussagen mit $\liminf$ werden analog bewiesen.

Zunächst vergleichen wir y_n mit $y_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$. Da

$$\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \subset \{x_n, x_{n+1}, ..\},$$

so gilt für die Suprema die Ungleichung

$$y_{n+1} \leq y_n.$$

Daher ist die Folge $\{y_n\}$ monoton fallend, und somit hat nach Satz 2.8 einen Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Wir müssen zeigen, dass $a = \sup L$ und $a \in L$. A.Grigorian

Zunächst zeigen wir, dass $a \in L$, d.h. a ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ ist. Nach (a) reicht es zu zeigen, dass jede Umgebung U von a unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält, d.h. für jede Umgebung U von a und für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert $n \geq N$ mit $x_n \in U$. In der Tat enthält U fast alle y_n, insbesondere existiert $m \geq N$ so dass $y_m \in U$. Es existiert eine Umgebung U' von y_m mit $U' \subset U$. Da $y_m = \sup_{n \geq m}\{x_n\}$, so existiert ein $n \geq m$ mit $x_n \in U'$. Somit für dieses n haben wir $n \geq N$ und $x_n \in U$, was zu beweisen war. Analysis 1 SS2012 13.06.12

Jetzt zeigen wir, dass a eine obere Schranke von L ist. Sei $b \in L$, d.h. b ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ ist. Deshalb ist b auch Häufungspunkt der Folge $\{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Offensichtlich ist der Häufungspunkt jeder Folge kleiner oder gleich das Supremum der Folge. Insbesondere gilt

$$b \leq \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = y_n.$$

Die Ungleichung $b \leq y_n$ impliziert für $n \to \infty$, dass auch $b \leq \lim y_n = a$. Somit $b \leq a$ und a eine obere Schranke von L ist.

Da $a \in L$ und a eine obere Schranke von L ist, so erhalten wir $a = \sup L$, was zu beweisen war. ■

Es folgt aus (2.13) that

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Auch $\lim x_n$ existiert genau dann, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

(siehe Aufgaben).

2.6 Komplexwertige Folgen

Definition. Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ falls $|z_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Man schreibt: $\lim z_n = a$ oder $z_n \to a$ für $n \to \infty$.

Definition. Eine komplexwertige Folge $\{z_n\}$ heißt Cauchy-Folge falls $|z_n - z_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Offensichtlich übereinstimmen diese Definitionen mit den entsprechenden Definitionen für reellwertige Folgen.

Satz 2.10 *Sei* $\{z_n\}$ *eine komplexwertige Folge.*

(a) *Die Konvergenz* $z_n \to a$ *mit einem* $a \in \mathbb{C}$ *gilt genau dann, wenn* $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a$ *und* $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} a$.

(b) *Die Folge* $\{z_n\}$ *ist Cauchy-Folge genau dann, wenn* $\{\operatorname{Re} z_n\}$ *und* $\{\operatorname{Im} z_n\}$ *Cauchy-Folgen sind.*

Beweis. (a) Seien $z_n = x_n + iy_n$ und $a = x + iy$ wobei $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$. Dann

$$z_n - a = (x_n - x) + i\,(y_n - y)$$

und

$$|z_n - a|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2\,,$$

woraus folgt, dass

$$|z_n - a|^2 \to 0 \Leftrightarrow |x_n - x|^2 \to 0 \text{ und } |y_n - y|^2 \to 0$$

Bemerken wir, dass für jede Folge $\{r_n\}$ von reellen Zahlen

$$r_n^2 \to 0 \Leftrightarrow r_n \to 0$$

(siehe Aufgaben). Somit erhalten wir, dass

$$|z_n - a| \to 0 \Leftrightarrow |x_n - x| \to 0 \text{ und } |y_n - y| \to 0$$

was zu beweisen war. Teil (b) wird analog bewiesen. ■

Korollar 2.11 *Die komplexwertige Folge* $\{z_n\}$ *ist konvergent genau dann, wenn sie Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Bezeichnen wir $x_n = \operatorname{Re} z_n$ und $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Nach Sätze 2.10 und 2.6 erhalten wir

$$\begin{aligned} \{z_n\} \text{ konvergiert} &\Longleftrightarrow \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ konvergieren} \\ &\Longleftrightarrow \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ sind Cauchy-Folgen} \\ &\Longleftrightarrow \{z_n\} \text{ ist Cauchy-Folge.} \end{aligned}$$

■

Chapter 3

Reihen

3.1 Definitionen und Beispiele

Definition. Eine reellwertige *Reihe* ist eine formale unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wobei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

Wir haben spezielle Reihen im Abschnitt 1.6 über q-adische Zahlensysteme schon getroffen. Für die allgemeinen Reihen ist der Wert der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht immer definiert. Zunächst definieren wir die n-te *Partialsumme* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definition. Der Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

definiert, vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert als Element von $\overline{\mathbb{R}}$. Sonst ist der Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht definiert.

Es gibt offensichtlich die folgenden drei Möglichkeiten.

1. $\lim_{n\to\infty} S_n$ ist endlich, d.h. die Folge $\{S_n\}$ konvergiert. Dann sagt man, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergiert, und der Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist eine reelle Zahl.

2. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ oder $-\infty$. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bestimmt divergiert, und der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist $+\infty$ bzw $-\infty$.

3. $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert nicht. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ unbestimmt divergiert, und der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nicht definiert.

Beispiel. *(Die geometrische Reihe)* Betrachten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ wobei $-1 < x < 1$. Dann gilt

$$S_n = x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Da $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, so erhalten wir $S_n \to \frac{x}{1-x}$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + ...$$

Um die Partialsumme S_n zu berechnen, benutzen wir die Identität

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

was ergibt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Alternativ kann man per Induktion beweisen, dass $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, wo der Induktionsschritt ist

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Da $\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, so erhalten wir $S_n \to 1$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ist unbestimmt divergent da ihre Partialsummen

$$S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

keinen Grenzwert haben.

3.2 Nicht-negative Reihen

Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *nicht-negativ* falls alle Summanden a_k nicht-negative reelle Zahlen sind.

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht-negativ, so ist die Folge $\{S_n\}$ von Partialsummen monoton steigend und somit $\lim S_n$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$. Deshalb ist die Summe der nicht-negativen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ stets wohl-definiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in [0, +\infty].$$

Insbesondere existieren für nicht-negative Reihen nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert,

2. oder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ und die Reihe bestimmt divergiert gegen $+\infty$.

Beispiel. *Die harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Man kann beweisen, dass diese Reihe gegen $+\infty$ divergiert (siehe Aufgaben).

3.3 Allgemeine Konvergenzkriterien

Satz 3.1 (Das Restreihe-Kriterium) *Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ haben die gleichen Typen von Konvergenz bzw Divergenz, für jedes $m \in \mathbb{N}$.*

Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ heißt die *Restreihe* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. Betrachten wir die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$ mit $n > m$. Dann gilt

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{m-1} a_k =: C,$$

wobei die Konstante C unabhängig von n ist. Daraus folgt, dass S_n konvergiert (bzw bestimmt divergiert bzw unbestimmt divergiert) genau dann, wenn T_n es tut. ■

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2012}$ bestimmt divergiert weil

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2012} = \sum_{n=2013}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was die Restreihe der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist.

Satz 3.2 (Das Trivialkriterium) *Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim a_k = 0$. Äquivalent, ist die Folge $\{a_k\}$ keine Nullfolge, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Beweis. Für die Partialsummen gilt

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n.$$

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent, so ist die Folge $\{S_n\}$ konvergent. Dann konvergiert auf $\{S_{n-1}\}$ gegen gleichen Grenzwert, woraus folgt

$$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0.$$

■

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$. Wir haben schon gesehen, dass diese Reihe für $|x| < 1$ konvergent ist. Beweisen wir, dass sie für $|x| \geq 1$ divergent ist. In der Tat ist in diesem Fall die Folge $\{x^k\}$ keine Nullfolge, da $\left|x^k\right| = |x|^k \geq 1$, woraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ divergiert.

Ist $x \geq 1$, so ist die Reihen nicht-negative, und somit $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = +\infty$. Ist $x \leq -1$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ unbestimmt. Zum Beispiel, der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ ist nicht definiert, wie wir es schon gesehen haben.

Satz 3.3 (a) *Gilt $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{3.1}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Summen definiert sind.

(b) (Das Vergleichskriterium) *Seien a_k, b_k nicht-negativ mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*

Beweis. Teil (a) folgt aus dem Satz 2.2. Teil (b) folgt aus (3.1), da die Werte von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ stets definiert sind als Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$, und die Endlichkeit von $\sum b_k$ ergibt die Endlichkeit von $\sum a_k$. ■

Beispiel. Zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Vergleichen wir diese Reihe mit der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Die offensichtliche Ungleichung $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)}$ hilft nicht, da wir die Ungleichung in der Rückrichtung brauchen. Da $k \geq \frac{1}{2}(k+1)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}.$$

Dann ergibt (3.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 2,$$

woraus die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ folgt[1].

Bemerkung. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ heißt die *Dirichlet-Reihe.* Wir haben schon gesehen, dass die Dirichlet-Reihe für $p = 1$ divergent ist und für $p = 2$ – konvergent. Man kann zeigen, dass die Dirichlet-Reihe genau dann konvergiert, wenn $p > 1$ (siehe Aufgaben).

3.4 Komplexwertige Reihen und Majorantenkriterium

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge $\{S_n\}$ von Partialsummen konvergent ist. Der Wert (die Summe) der konvergenten

[1] Man kann beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2 = 1,644\,934\ldots$$

Reihe wird wie folgt definiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Nach dem Satz 2.10 ist die Reihe $\sum a_k$ konvergent genau dann, wenn die beiden reellwertigen Reihen $\sum \operatorname{Re} a_k$ und $\sum \operatorname{Im} a_k$ konvergieren, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k.$$

Satz 3.4 (Majorantenkriterium) *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexwertige Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine nicht-negative konvergente Reihe. Gilt*

$$|a_k| \le b_k \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{3.3}$$

Gilt die Bedingung (3.2), so heißt die Reihe $\sum b_k$ die *Majorante* von $\sum a_k$. Man sagt auch, dass $\sum a_k$ von $\sum b_k$ majorisiert wird.

Beweis. Bezeichnen wir $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Dann gilt es für alle Indizen $n > m$

$$|A_n - A_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k = B_n - B_m. \tag{3.4}$$

Die Folge $\{B_n\}$ konvergiert und somit ist eine Cauchy-Folge, d.h. $B_n - B_m \to 0$ für $n, m \to \infty$. Daraus folgt, dass auch $|A_n - A_m| \to 0$. Somit ist $\{A_n\}$ eine Cauchy-Folge, und die Reihe $\sum a_k$ konvergiert. Die Ungleichung (3.3) folgt aus $|A_n| \le B_n$, die analog zu (3.4) bewiesen wird. ■

3.5 Absolute Konvergenz

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Satz 3.5 *Ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, so its sie konvergent. Es gilt auch*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,. \tag{3.5}$$

Beweis. Setzen wir $b_k = |a_k|$. Die nicht-negative Folge $\sum b_k$ konvergiert nach Voraussetzung und ist Majorante von $\sum a_k$. Nach Satz 3.4 ist $\sum a_k$ konvergent und erfüllt (3.5). ■

Beispiel. Betrachten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$ wobei $\{c_k\}$ eine beliebige beschränkte Folge von komplexen Zahlen (zum Beispiel, $c_k = i^k$ oder $c_k = (-1)^k$). Wir behaupten, dass diese Reihe absolut konvergiert. Sei C eine obere Schranke von $\{|c_k|\}$. Da

$$\left|\frac{c_k}{k^2}\right| \leq \frac{C}{k^2}$$

und die Reihe $\sum \frac{C}{k^2} = C \sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, erhalten wir nach Satz 3.4 dass $\sum \frac{c_k}{k^2}$ absolut konvergent ist.

Es gibt die Reihen, die konvergent aber nicht absolut konvergent sind, zum Beispiel die Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – siehe Aufgaben.[2]

Kommentar. Für die absolut konvergenten Reihen gelten die Kommutativ- und Assoziativgesetze, die wir ohne Beweis angeben.

Satz. *Sei $\sum a_k$ eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Sei $\sum b_k$ eine Reihe, die aus $\sum a_k$ durch Vertauschung und Gruppierung der Summanden erhalten wird. Dann ist $\sum b_k$ auch absolut konvergent und*

$$\sum b_k = \sum a_k.$$

Für die nicht absolut konvergente Reihen gilt im Gegenteil folgendes.

Satz. *Sei $\sum a_k$ eine nicht absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert eine Reihe $\sum b_k$, die aus $\sum a_k$ durch Vertauschung der Summanden erhalten wird und so dass $\sum b_k = c$.*

Zum Beispiel, man kann die Summanden in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ vertauschen, so dass die vertauschte Reihe divergiert gegen $+\infty$ (siehe Aufgaben).

3.6 Quotientenkriterium

Satz 3.6 (Quotientenkriterium, d'Alembert-Kriterium) *Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine komplexwertige Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n. Gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Bezeichnen wir $r_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und $r = \limsup_{n\to\infty} r_n$. Da $r < 1$, so existiert ein $q \in (r, 1)$, d.h. $r < q < 1$. Wir behaupten, dass $r_n < q$ für fast alle n. Gibt es in $[q, +\infty)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{r_n\}$, d.h. eine Teilfolge von $\{r_n\}$, dann existiert in $[q, +\infty)$ ein Häufungspunkt der Folge, was nicht möglich ist, da der maximale Häufungspunkt gleich r ist (siehe Satz 2.9).

[2] In der Tat gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 = 0.693\,147...$$

wie wir es später sehen.

Deshalb existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $r_n < q$ für alle $n \geq N$. Es folgt, dass

$$|a_{n+1}| \leq q\,|a_n| \text{ für alle } n \geq N.$$

Per Induktion erhalten wir, dass

$$|a_n| \leq q^{n-N}\,|a_N| \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da $0 < q < 1$, so erhalten wir

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq |a_N| \sum_{n=N}^{\infty} q^{n-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty,$$

d.h. die Restreihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ auch konvergiert, was zu beweisen war. ■

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
15.06.12

3.7 Rechenregeln

Satz 3.7 *Seien a_k, b_k, c komplex. Es gelten die Identitäten*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten definiert sind.

Beweis. Für reellwertige a_k, b_k, c folgen die beiden Identität aus dem Satz 2.8. In diesem Fall können die Summen der Reihen $\pm\infty$ sein. Für komplexwertige a_k, b_k, c folgen die obigen Identität aus dem reellen Fall mit Hilfe von Satz 2.10. ■

3.8 Exponentialfunktion und die Zahl e

Definition. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ heißt die *Exponentialreihe* und ihre Summe heißt die Exponentialfunktion von $x \in \mathbb{C}$ und wird mit

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.6}$$

bezeichnet.

Beweisen wir, dass die Exponentialreihe absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{C}$ ist. Setzen wir $a_n = \frac{x^n}{n!}$ und erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Somit gilt $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ und die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium von Satz 3.6.

Ist x reell, dann ist $\exp(x)$ auch reell, was man aus (3.6) sieht. Die Zahl $\exp(1)$ wird auch mit e bezeichnet, so dass

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ... \ .$$

Man kann berechnen, dass

$$e = 2,718281828459045...$$

Es ist bekannt, dass e eine transzendente Zahl ist.

Bemerkung. Eine andere äquivalente Definition von e ist

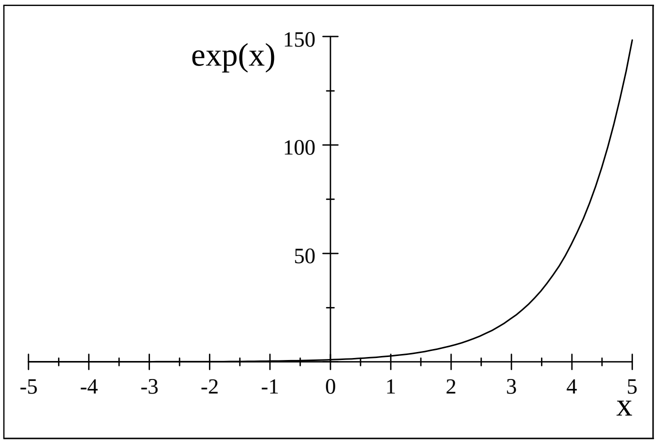
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Man kann auch beweisen, dass

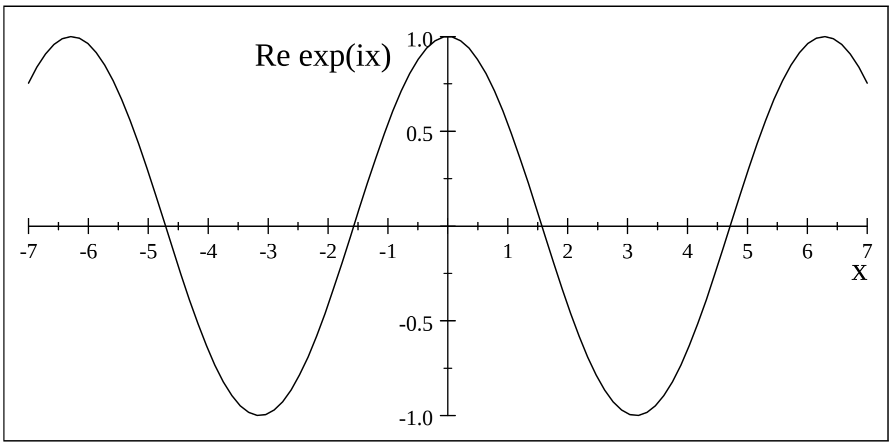
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

(siehe Aufgaben).

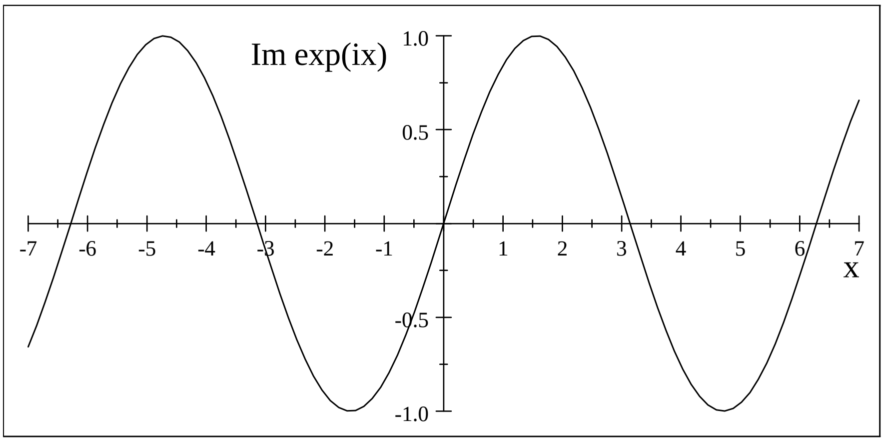
Der Graph der Funktion $f(x) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ sieht wir folgt aus:



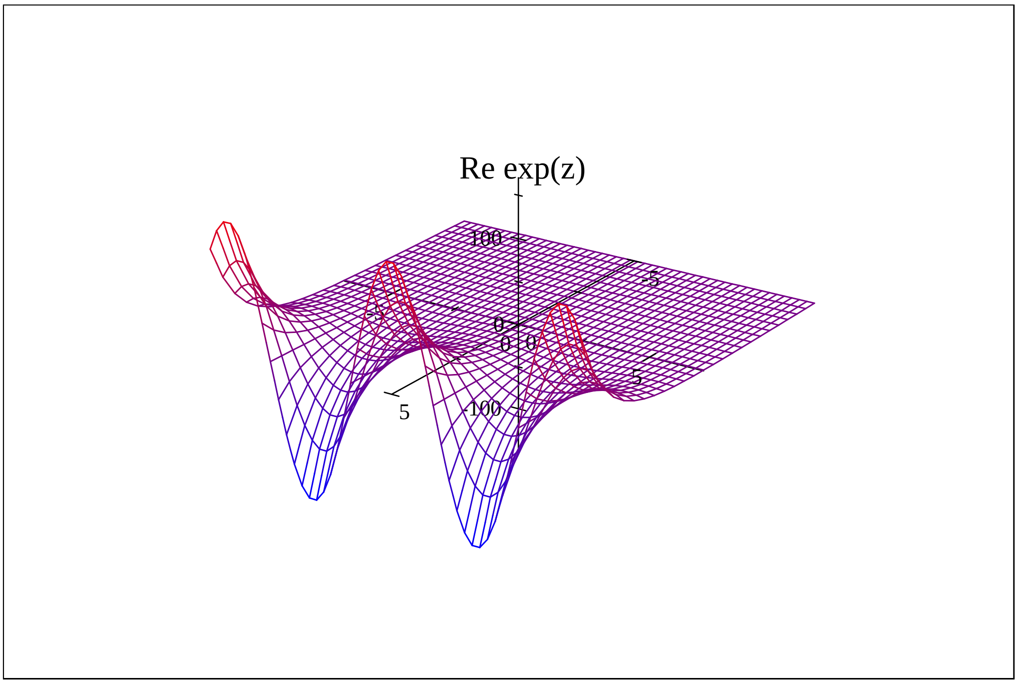
Die Funktion $f(x) = \exp(ix)$ ist komplexwertig sogar für $x \in \mathbb{R}$. Der Graph des Realteiles $\operatorname{Re}\exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph des Imaginärteiles $\mathrm{Im}\exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph der Funktion $\mathrm{Re}\exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ ist wie folgt:



3.9 Cauchy-Produkt zweier Reihen

Erinnern wir uns, dass für das Produkt zweier endlichen Summen die folgende Identität gilt:

$$\left(\sum_{k\in I} a_k\right)\left(\sum_{l\in J} b_l\right) = \sum_{(k,l)\in I\times J} a_k b_l \tag{3.7}$$

wobei I, J die endlichen Indexmengen sind und a_k, b_l reelle oder komplexe Zahlen sind. Wir möchten eine ähnliche Identität für Produkt zweier Reihen erhalten.

Versucht man die Formel (3.7) für unendlichen Indexmengen I und J zu benutzen, so sieht man auf der rechten Seite eine Doppelreihe, was nicht bequem ist.

Der Zweck der nächsten Definition ist die Doppelreihe aus (3.7) als eine übliche Reihe darzustellen.

Definition. Gegeben seien zwei komplexwertigen Reihen[3] $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Das *Cauchy-Produkt* dieser Folgen ist die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Um die Bedeutung von c_n zu verstehen, betrachten wir die folgende unendliche Tabelle mit allen Summanden $a_k b_l$ für $k, l \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \boxed{a_0b_n} & \ldots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \boxed{a_1b_{n-1}} & \ldots & \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \boxed{a_kb_{n-k}} & \ldots & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & \\
\ldots & \boxed{a_{n-1}b_1} & \ldots & & & & & \ldots & \ldots \\
\boxed{a_nb_0} & \ldots & & & & & \ldots & a_nb_n & \ldots \\
\ldots & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{3.8}$$

Die Summanden der Form $a_k b_{n-k}$ mit einem vorgegebenen Wert von n liegen auf der n-ten Diagonale der Tabelle (die Terme in den Rahmen). Deshalb ist c_n gleich die Summe aller Summanden auf der n-ten Diagonale. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ "enthält" somit alle Summanden $a_k b_l$ aus der Tabelle, und man kann hoffen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}_+} a_k b_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l. \tag{3.9}$$

Aber diese Identitäten gelten nicht immer. Zum Beispiel, die Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ mit $a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ sind konvergent, aber ihr Cauchy-Produkt ist divergent (siehe Aufgaben). Im nächsten Satz werden die Bedingungen vorgelegt, die die Identität (3.9) garantieren.

Satz 3.8 (Satz von Mertens) *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen von komplexen Zahlen. Dann ist ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auch absolut konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right). \tag{3.10}$$

Bemerkung. Man kann die folgende Erweiterung des Satzes 3.8 beweisen: falls die Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent sind und mindestens eine davon absolut konvergent ist, dann ist das Cauchy-Produkt $\sum c_n$ konvergent und erfüllt (3.10). Allerdings

[3] In diesem Abschnitt ist es bequemer die Indexmenge $\mathbb{Z}_+$ statt $\mathbb{N}$ zu benutzen.

ist die Konvergenz von $\sum c_n$ in diesem Fall nicht unbedingt absolut (siehe Aufgaben).

Beweis. Setzen wir

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{l=0}^{n} b_l, \quad C_n = \sum_{m=0}^{n} c_m.$$

Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \lim A_n \lim B_n = \lim (A_n B_n),$$

müssen wir zeigen, dass die Folge $\{C_n\}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (A_n B_n) . \tag{3.11}$$

Bemerken wir, dass

$$C_n = \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{\{k,l\in\mathbb{Z}_+ : k+l\le n\}} a_k b_l,$$

d.h. C_n ist die Summe von allen Summanden $a_k b_l$ aus dem Dreieck

$$\{k, l \in \mathbb{Z}_+ : k + l \le n\}.$$

Für $A_n B_n$ erhalten wir

$$A_n B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{\{k,l\in\mathbb{Z}_+ : k\le n, l\le n\}} a_k b_l,$$

d.h. $A_n B_n$ ist die Summe von allen Summanden $a_k b_l$ aus dem Rechteck

$$\{k, l \in \mathbb{Z}_+ : k \le n, l \le n\}.$$

Betrachten wir zunächst der Fall, wenn alle a_k und b_l nicht-negative reelle Zahlen sind. Für Indizen $k, l \in \mathbb{Z}_+$ haben wir die Implikation

$$k + l \le n \Rightarrow k \le n, l \le n$$

und für $m = [n/2]$,

$$k \le m, l \le m \Rightarrow k + l \le n.$$

Auf der Tabelle (3.8) bedeutet es, dass das Dreieck $\{k + l \le n\}$ zwischen zwei Rechtecken $\{k, l \le m\}$ und $\{k, l \le n\}$ angeordnet. Daraus folgt, dass

$$A_m B_m \le C_n \le A_n B_n.$$

Da die beiden Folgen $\{A_n B_n\}$ und $\left\{A_{[n/2]} B_{[n/2]}\right\}$ den gleichen Grenzwert haben, erhalten wir nach Satz 2.2, dass C_n den gleichen Grenzwert hat, d.h. (3.11). Folglich ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Da $c_n \ge 0$, ist diese Reihe auch absolut konvergent.

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall von komplexwertigen a_n und b_n. Nach Voraussetzung sind die Reihen $\sum |a_k|$ und $\sum |b_k|$ konvergent. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^*$ das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum |a_k|$ und $\sum |b_k|$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist die Reihe $\sum c_n^*$ konvergent. Darüber hinaus haben wir

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |b_{n-k}| = c_n^*.$$

Nach Majorantenkriterium von Satz 3.4 erhalten wir die absolut Konvergenz von $\sum c_n$.

Es bleibt noch die Identität (3.11) zu beweisen, d.h. $A_n B_n - C_n \to 0$. Wir haben

$$A_n B_n - C_n = \sum_{\{k,l:k\le n,l\le n\}} a_k b_l - \sum_{\{k,l:k+l\le n\}} a_k b_l = \sum_{\{k,l:k\le n.l\le n.k+l>n\}} a_k b_l.$$

Nach der Dreiecksungleichung

$$|A_n B_n - C_n| \le \sum_{\{k,l:k\le n.l\le n.k+l>n\}} |a_k| \, |b_l| \,.$$

Bezeichnen wir mit A_n^*, B_n^*, C_n^* die Partialsummen der entsprechenden Reihen $\sum |a_k|$, $\sum |b_k|$, $\sum c_k^*$. Dann gilt auch

$$A_n^* B_n^* - C_n^* = \sum_{\{k,l:k\le n.l\le n.k+l>n\}} |a_k| \, |b_l|$$

woraus folgt

$$|A_n B_n - C_n| \le |A_n^* B_n^* - C_n^*| \,.$$

Da nach dem ersten Teil des Beweises gilt $|A_n^* B_n^* - C_n^*| \to 0$, erhalten wir auch $|A_n B_n - C_n| \to 0$, was zu beweisen war. ■

3.10 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz 3.9 *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Identität*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \,. \tag{3.12}$$

Beweis. Betrachten wir zwei Reihen

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

und sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchy-Produkt dieser Reihen, d.h.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n \,,$$

wo wir den Binomischen Lehrsatz benutzt haben (siehe Aufgaben). Es folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

Nach Satz 3.8 haben wir

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

woraus (3.12) folgt. ■

Satz 3.10 (a) *Für jedes* $x \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(x) \neq 0$.

(b) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x)$ *reell und positiv.*

(c) *Für reelle* $x > y$ *gilt* $\exp(x) > \exp(y)$ *(d.h. die Funktion* $\exp(x)$ *ist streng monoton steigend)*

(d) *Für jedes* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(k) = e^k$ *wobei* $e = \exp(1)$.

Beweis. (a) Die Identität (3.12) ergibt für $y = -x$,

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1, \tag{3.13}$$

woraus $\exp(x) \neq 0$ folgt.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ dann gilt $\exp(x) \in \mathbb{R}$ nach Definition

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{3.14}$$

Ist $x \geq 0$ so ist $\exp(x) > 0$ da alle Glieder in (3.14) nicht negative sind und das Glied mit $k = 0$ gleich 1 ist. Ist $x < 0$ dann $\exp(-x) > 0$ was zusammen mit (3.13) ergibt

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

(c) Wir haben

$$\frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x-y) > 1$$

da für $t = x - y > 0$ gilt

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... > 1.$$

(d) Zunächst beweisen wir per Induktion nach k, dass die Identität

$$\exp(k) = e^k \tag{3.15}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Für $k = 1$ gilt (3.15) nach Definition von e. Induktionsschritt: gilt (3.15) für ein $k \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir nach (3.12)

$$\exp(k+1) = \exp(k)\exp(1) = e^k e = e^{k+1}.$$

Für $k = 0$ haben wir $\exp(0) = 1 = e^0$. Für negative $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir nach (3.13)

$$\exp(k) = \frac{1}{\exp(-k)} = \frac{1}{e^{-k}} = e^k.$$

■

Die Identität (3.15) motiviert die folgende Definition von der Potenz e^x für alle komplexen Zahlen x:

$$e^x := \exp(x).$$

Zum Beispiel haben wir $e^{1/2} = \sqrt{e}$ da $e^{1/2}e^{1/2} = e^{1/2+1/2} = e$ und somit erfüllt $e^{1/2}$ die Definition von $\sqrt{e}$.

Später definieren wir die Potenz a^x für alle positiven Werten von a.

Chapter 4

Stetige Funktionen

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
20.06.12

4.1 Grenzwert einer Funktion

Erinnern wir uns den Begriff der Umgebung: eine Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ ist irgendwelches Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, eine Umgebung von $+\infty$ ist irgendwelches Intervall $(E, +\infty]$ mit $E \in \mathbb{R}$, und eine Umgebung von $-\infty$ ist irgendwelches Intervall $[-\infty, E)$ mit $E \in \mathbb{R}$.

Definition. Sei J eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Verdichtungspunkt* (oder *Häufungspunkt*) von J falls jede Umgebung U von a unendlich viele Elemente von J enthält.

Beispiel. Für $J = \mathbb{N}$ gibt es nur ein Verdichtungspunkt $a = +\infty$. Für $J = \mathbb{Z}$ gibt es zwei Verdichtungspunkte $a = \pm\infty$. Für ein Intervall $J = (a, b)$ die Menge von Verdichtungspunkten ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$.

Definition. Für jede Teilmenge J von $\mathbb{R}$ definieren wir den *Abschluss* $\overline{J}$ als die Vereinigung von J mit der Menge von Verdichtungspunkten von J.

Damit ist $\overline{J}$ eine Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$.

Behauptung. *Es gilt die Identität*

$$\overline{J} = \left\{a \in \overline{\mathbb{R}} : U(a) \cap J \neq \emptyset \text{ für jede Umgebung } U(a) \text{ von } a\right\}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt $U(a) \cap J \neq \emptyset$ für jedes $a \in J$ und für jedes Verdichtungspunkt a von J, somit für jedes $a \in \overline{J}$. Für $a \notin \overline{J}$ gibt es eine Umgebung $U(a)$ mit endlich vielen Elementen aus J. Das Reduzieren dieser Umgebung ergibt eine Umgebung U' von a mit leerem Durchschnitt mit J. ■

Beispiel. Die Abschlüsse der folgenden Mengen kann man einfach bestimmen:

$$\overline{(a,b)} = [a,b], \quad \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}}.$$

Definition. Sei $J \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge und $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf J. Sei $a \in \overline{J}$ and $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen, dass $f(x)$ den Grenzwert $b \in \overline{\mathbb{R}}$ hat für $x \to a$, $x \in J$ und schreiben

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in J}} f(x) = b, \tag{4.1}$$

falls für jede Umgebung V von b existiert eine Umgebung U von a mit

$$x \in U \cap J \implies f(x) \in V.$$

Man schreibt auch

$$f(x) \to b \text{ für } x \to a,\ x \in J$$

und sagt: $f(x)$ konvergiert gegen b falls $b \in \mathbb{R}$, und $f(x)$ divergiert gegen b falls $b = \pm\infty$.

Beispiel. Zeigen wir, dass der Limes einer Folge ein spezielle Fall des Limes einer Funktion ist. Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, d.h. eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f_n = f(n)$. Da $a = +\infty$ ein Verdichtungspunkt von $\mathbb{N}$ ist, so erhält man nach der obigen Definition folgendes: für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} f_n = b$$

äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n - b| < \varepsilon,$$

d.h. zur Definition des Limes der Folge aus Abschnitt 2.1.

Seien jetzt $a, b \in \mathbb{R}$. Dann erhält man die folgende Definition des Limes (4.1):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in J \text{ mit } \ |x - a| < \delta \text{ gilt } |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

die auf $J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert ist. Bestimmen wir $\lim_{x\to 1} f(x)$. Da

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1,$$

man kann erwarten, dass

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\in J}} f(x) = 2.$$

Um das zu beweisen, benutzen wir Definition (4.2):

$$f(x) - 2 = (x + 1) - 2 = x - 1$$

und

$$|f(x) - 2| = |x - 1|.$$

Deshalb gilt (4.2) mit $\delta = \varepsilon$.

Beispiel. Sei $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Beweisen wir, dass $f(x) \to a^2$ für $x \to a \in \mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\left|f(x) - a^2\right| = \left|x^2 - a^2\right| = |x - a|\,|x + a|.$$

Ist $|x-a|<\delta$ so gilt $x\in(a-\delta,a+\delta)$ woraus folgt

$$|x|\leq|a|+|\delta|$$

und

$$|x+a|\leq 2\,|a|+|\delta|\,.$$

Da δ gewählt werden kann, setzen wir voraus, dass $\delta\leq 1$, so dass

$$|x+a|\leq 2\,|a|+1.$$

Daraus folgt, dass

$$\left|f(x)-a^2\right|<\delta\,(2\,|a|+1)$$

und

$$\left|f(x)-a^2\right|<\varepsilon,$$

für das vorgegebene $\varepsilon>0$, vorausgesetzt

$$\delta\leq\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}.$$

Deshalb können wir setzen $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$.

Beispiel. Sei $f(x)=\exp(x)$, $x\in\mathbb{R}$, und beweisen wir, dass $f(x)\to 1$ für $x\to 0$. Wir haben

$$|\exp(x)-1|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k=\frac{|x|}{1-|x|},$$

für alle $|x|<1$. Gegeben sei $\varepsilon>0$, bestimmen wir $0<\delta\leq 1$ mit

$$|x|<\delta\implies\frac{|x|}{1-|x|}<\varepsilon. \tag{4.3}$$

Wir können δ weiter beschränken mit $\delta\leq\frac{1}{2}$ so that

$$\frac{|x|}{1-|x|}\leq\frac{|x|}{1-\delta}\leq\frac{|x|}{1/2}<2\delta.$$

Dann (4.3) gilt vorausgesetzt $\delta\leq\varepsilon/2$. Deshalb für $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ erhalten wir aus (4.3)

$$|x|<\delta\implies|\exp(x)-1|<\varepsilon,$$

was beweist, dass $f(x)\to 1$ für $x\to 0$.

Für die unendlichen Werte von a bzw b kann man die Definition von (4.1) wir folgt umschreiben.

1. $a\in\mathbb{R}$ und $b=+\infty$:

$$\forall E\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\ \forall x\in J \text{ mit } |x-a|<\varepsilon \text{ gilt } f(x)>E.$$

2. $a=+\infty$ und $b\in\mathbb{R}$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists D\in\mathbb{R}\ \forall x\in J \text{ mit } x>D \text{ gilt } |f(x)-b|<\varepsilon.$$

3. $a = b = +\infty$:

$$\forall E \in \mathbb{R} \ \ \exists D \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in J \text{ mit } x > D \ \text{ gilt } \ f(x) > E.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$, die auf $J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert ist, und zeigen, dass $f(x) \to +\infty$ für $x \to 1$, d.h.

$$\forall E \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ mit } |x-1| < \delta \text{ gilt } \frac{1}{|x-1|} > E.$$

Das ist offensichtlich erfüllt mit $\delta = \frac{1}{E}$ vorausgesetzt $E > 0$ (und δ ist beliebig falls $E < 0$).

Satz 4.1 *Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge $J \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in \overline{J}$. Dann die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *(wobei $b \in \overline{\mathbb{R}}$).*

(ii) *Für jede Folge $\{x_n\} \subset J$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

Beweis. Betrachten wir den Fall when $a, b \in \mathbb{R}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Die Bedingung (i) bedeutet nach Definition, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in J \text{ mit } \ |x-a| < \delta \text{ gilt } \ |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Sei $\{x_n\} \subset J$ eine Folge mit $x_n \to a$. Insbesondere gilt für den obigen Wert von δ folgendes:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \ \text{ gilt } \ |x_n - a| < \delta.$$

Es folgt aus (4.4), dass für solche Werte von n gilt

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

woraus $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ folgt.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\lim_{x\to a} f(x) = b$ nicht gilt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x \in J \text{ mit } \ |x-a| < \delta \text{ aber } \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Benutzen wir diese Bedingung für die Werte $\delta = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $\delta = \frac{1}{k}$ erhalten wir ein $x_k \in J$ mit

$$|x_k - a| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad |f(x_k) - b| \geq \varepsilon.$$

Damit gilt $x_k \to a$, während $f(x_k) \not\to b$, was im Widerspruch zu (ii) steht.

Analog betrachtet man den Fall when mindestens eines von a, b unendlich ist. ∎

Für zwei beliebige Funktionen $f, g : J \to \mathbb{R}$ definieren wir die arithmetischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)\, g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Satz 4.2 *Seien f, g reellwertige Funktionen auf einer Menge $J \subset \mathbb{R}$ und sei $c \in \overline{J}$. Angenommen sind die Bedingungen*

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to c} g(x) = b,$$

wobei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Es gelten die Identitäten

$$\lim_{x \to c} (f+g) = a+b, \quad \lim_{x \to c} fg = ab, \quad \lim_{x \to c} \frac{f}{g} = \frac{a}{b} \tag{4.5}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $a+b$, ab, $\frac{a}{b}$ definiert sind (und $g \neq 0$ im Fall von $\frac{f}{g}$).

(b) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in J$, so gilt auch $a \leq b$.

(c) Seien f, g, h drei Funktionen auf J mit $f \leq h \leq g$ und

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = a.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x \to c} h(x) = a.$$

Beweis. Nach Satz 4.1 gelten für jede Folge $x_n \to x$, $x_n \in J$ die Bedingungen $f(x_n) \to a$ und $g(x_n) \to b$. Nach Satz 2.8 erhalten wir

$$(f+g)(x_n) \to a+b, \qquad (fg)(x_n) \to ab, \qquad \frac{f}{g}(x_n) \to \frac{a}{b},$$

woraus (4.5) folgt nach Satz 2.8. Analog beweist man (b) und (c) mit Hilfe von Satz 2.2. ∎

4.2 Zusammengesetzte Funktion

Satz 4.3 (Grenzwert der zusammengesetzten Funktion) *Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$ und f, g reellwertige Funktionen auf A bzw B. Angenommen sind*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$$

und

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g(y) = c,$$

wobei $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Ist die zusammengesetzte Funktion $x \mapsto g(f(x))$ auf A definiert (was ist der Fall, falls $f(A) \subset B$), so gilt

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(f(x)) = c. \tag{4.6}$$

Man kann die Identität (4.6) wie folgt umschreiben:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g\left(f\left(x\right)\right) = \lim_{\substack{y\to b\\ y\in B}} g\left(y\right)$$

und betrachten sie, als einen Wechsel von Variable im Limes.

Beweis. Für jede Umgebung W von c existiert eine Umgebung V von b mit

$$y\in V\cap B \implies g\left(y\right)\in W. \tag{4.7}$$

Gegeben ist die Umgebung V von b, existiert eine Umgebung U von a mit

$$x\in U\cap A \implies f\left(x\right)\in V.$$

Da $f\left(A\right)\subset B$, haben wir auch $f\left(x\right)\in B$ für alle $x\in A$, so dass

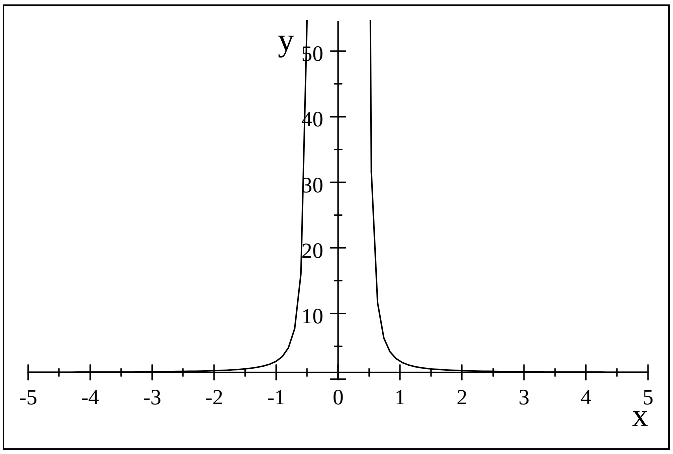
$$x\in U\cap A \implies f\left(x\right)\in V\cap B.$$

Setzen wir $y=f\left(x\right)$ in (4.7) und erhalten, dass

$$x\in U\cap A \implies g\left(f\left(x\right)\right)\in W,$$

woraus (4.6) folgt. ■

Beispiel. Bestimmen wir $\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, wobei der Definitionsbereich der Funktion $x\mapsto\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ist $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Der Graph der Funktion $x\mapsto\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Wir haben

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,$$

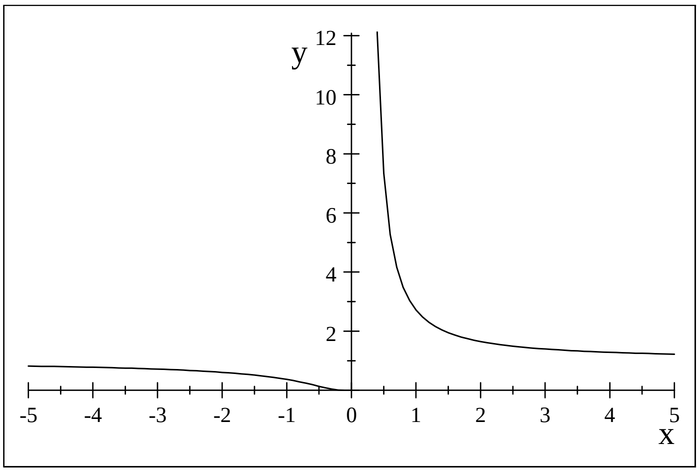
was von$\frac{1}{|x|}\to+\infty$ folgt. Dann wechseln wir $y=\frac{1}{x^2}$ and bemerken, dass

$$\lim_{y\to+\infty}\exp\left(y\right)=+\infty,$$

was aus der offensichtlichen Ungleichung $\exp\left(y\right)>y$ folgt. Nach Satz 4.3 erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{y\to+\infty}\exp\left(y\right)=+\infty. \tag{4.8}$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ und bestimmen die Grenzwerte davon für $x \to 0$ in zwei Mengen: $x > 0$ und $x < 0$.



Der Graph der Funktion $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Da

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty,$$

so erhalten wir nach dem Wechsel $y = \frac{1}{x}$, dass

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \exp(y) = +\infty.$$

Da

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty,$$

so erhalten wir

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to-\infty} \exp(y) = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\exp(-y)} = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
22.06.12

4.3 Stetige Funktionen

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge $J \subset \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig* an der Stelle $a \in J$ falls

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in J}} f(x) = f(a). \tag{4.9}$$

Sonst ist f *unstetig* an a.

Ist f stetig an alle $a \in J$, so heißt f stetig auf J (oder einfach stetig).

Bemerkung Die folgenden Bedingungen sind äquivalent zu (4.9):

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in J\setminus\{a\}}} f(x) = f(a)$$

und

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in J}} f(x) \text{ existiert.}$$

Beispiel. Es ist offensichtlich, dass die folgenden Funktionen $f(x) = \text{const}$ und $f(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

Zeigen wir, dass die Funktion $f(x) = \exp(x)$ auch stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Wir haben schon gesehen, dass

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 = \exp(0),$$

so dass $\exp(x)$ stetig an $a = 0$ ist. Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\exp(x) = \exp(x - a + a) = \exp(a)\exp(x - a).$$

Da

$$\lim_{x\to a} \exp(x - a) = \lim_{y\to 0} \exp(y) = 1,$$

es folgt, dass

$$\lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a).$$

Satz 4.4 *Seien f, g zwei reellwertige Funktionen auf einer Menge $J \subset \mathbb{R}$. Sind f und g stetig an der Stelle $a \in J$, so sind auch die Funktionen $f + g$, fg, f/g stetig an a (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).*

Sind f, g stetig auf J, so sind $f + g$, fg, f/g auch stetig auf J (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Satz 4.2. Zum Beispiel für die Summe $f + g$ erhalten wir

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in J}} (f+g)(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in J}} f(x) + \lim_{\substack{x\to a\\ x\in J}} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

woraus die Stetigkeit von $f + g$ an a folgt. Analog behandelt man die Funktionen fg und f/g.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage. ■

Beispiel. Da die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \text{const}$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind, so folgt es, dass any Funktion $f(x) = cx^n$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, für jede $n \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass jedes *Polynom*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Betrachten wir eine *rationale* Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wobei g und h zwei Polynome sind. Dann ist f definiert und stetig im Bereich $\{h \neq 0\}$.

Satz 4.5 *Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei $A, B \subset \mathbb{R}$. Sei die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ wohl definiert auf A (d.h. $f(A) \subset B$). Ist f stetig an $a \in A$ und g stetig an $b = f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig an a.*

Ist f stetig auf A und g – auf B, so ist $g \circ f$ stetig auf A.

Beweis. Nach Satz 4.3 haben wir

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(f(x)) = \lim_{\substack{y \to f(a) \\ y \in B}} g(y) = \lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g(y) = g(b) = g(f(a)),$$

woraus die Stetigkeit von $g(f(x))$ an a folgt.

Ist f stetig auf A und g – auf B, so ist g stetig an $b = f(a)$ für jedes $a \in A$, da $f(A) \subset B$. Daraus folgt, dass $g \circ f$ stetig an a für jedes $a \in A$ ist, und somit stetig auf A. ■

Beispiel. Sei $f(x)$ eine rationale Funktion. Dann ist $\exp(f(x))$ stetig im Definitionsbereich von $f(x)$.

Beispiel. Beweisen wir, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Die Funktion $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ist stetig im Bereich $\{x \neq 0\}$ nach Satz 4.5. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig an 0 ist, d.h.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = 0. \tag{4.10}$$

Wie es früher schon bewiesen wurde,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$|x| < \delta, \quad x \neq 0 \implies \left|\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right| < \varepsilon.$$

Da $f(0) = 0$, es folgt, dass

$$|x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon,$$

woraus (4.10) folgt.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist unstetig an $x = 0$, da

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

4.4 Globale Eigenschaften von stetigen Funktionen

4.4.1 Zwischenwertsatz

Satz 4.6 (Zwischenwertsatz) *Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem geschlossenen Intervall $[a,b]$. Gilt $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so existiert $c\in(a,b)$ mit $f(c)=0$.*

Beweis. Betrachten wir die Menge

$$S=\{x\in[a,b]:f(x)\geq 0\}.$$

Diese Menge ist beschränkt und nicht-leer, da $b\in S$. Deshalb hat sie das Infimum $c:=\inf S\in[a,b]$. Beweisen wir, dass $f(c)=0$, was wird auch $c\in(a,b)$ ergeben.

Zunächst zeigen wir, dass $f(c)\geq 0$. Ist $c=b$, so gilt es nach der Bedingung $f(b)>0$. Sei $c<b$. Dann gibt es $n\in\mathbb{N}$ mit $c+\frac{1}{n}<b$. Da $c+\frac{1}{n}$ keine untere Schranke von S ist, existiert $x_n\in S$ mit $x_n<c+\frac{1}{n}$. Andererseits gilt $x_n\geq c$ da c eine untere Schranke von S ist. Deshalb haben wir

$$c\leq x_n<c+\frac{1}{n}$$

und $f(x_n)\geq 0$. Für $n\to\infty$ erhalten wir $x_n\to c$ und somit $f(x_n)\to f(c)$. Da $f(x_n)\geq 0$, so erhalten wir $f(c)\geq 0$.

Beweisen wir, dass $f(c)\leq 0$. Bemerken wir zunächst, dass $c\neq a$ weil $f(c)\geq 0$ während $f(a)<0$. Deshalb gilt

$$x_n:=c-\frac{1}{n}>a$$

für hinreichend große Werte von $n\in\mathbb{N}$. Da c eine untere Schranke von S ist, gilt $x_n\notin S$ und somit $f(x_n)\leq 0$. Da $x_n\to c$ für $n\to\infty$, erhalten wir $f(c)\leq 0$, woraus $f(c)=0$ folgt. ■

Beispiel. Sei $f(x)$ ein Polynom von Grad n mit reellen Koeffizienten, d.h.

$$f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+...+c_n,$$

where $c_k\in\mathbb{R}$ and $n\in\mathbb{N}$. Beweisen wir, dass falls n ungerade ist, dann existiert eine Nullstelle von f, d.h. ein $x\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$. Nach Aufgabe 58 haben wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)&=-\infty.\end{aligned}$$

Somit existiert ein $b\in\mathbb{R}$ mit $f(b)>0$ und ein $a\in\mathbb{R}$ mit $f(a)<0$. Nach Satz 4.6 existiert $x\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$.

Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge A. Dann bezeichnen wir

$$\sup_A f:=\sup f(A)$$

and

$$\inf_A f:=\inf f(A),$$

wobei $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ das Bild von A ist.

Satz 4.7 *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann ist das Bild $f(I)$ auch ein Intervall, und die Grenzen von $f(I)$ sind $\inf_I f$ und $\sup_I f$.*

Man kann kurz sagen: stetiges Bild eines Intervalles ist ein Intervall.

Beweis. Nach Definition haben wir

$$f(I) \subset [\inf f, \sup f].$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$f(I) \supset (\inf f, \sup f),$$

d.h.

$$\inf f < t < \sup f \quad \Rightarrow t \in f(I).$$

Nach Definition von sup und inf, es gibt die Zahlen $a, b \in I$ mit

$$\inf f < f(a) < t < f(b) < \sup f.$$

Sei $a < b$. Betrachten wir auf dem Intervall $[a, b] \subset I$ die Funktion

$$g(x) = f(x) - t$$

die erfüllt

$$g(a) = f(a) - t < 0 \;\text{ und }\; g(b) = f(b) - t > 0.$$

Nach Satz 4.6 existiert $c \in (a, b)$ mit $g(c) = 0$ woraus $f(c) = t$ und somit $t \in f(I)$ folgt. ■

Beispiel. Beweisen wir, dass

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty). \tag{4.11}$$

Da

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

and

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to+\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

erhalten wir

$$\sup \exp(x) = +\infty \quad \text{and} \quad \inf \exp(x) = 0.$$

Nach Satz 4.7 ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall mit den Grenzen 0 und $+\infty$. Da nach Satz 3.10 gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so erhalten wir (4.11).

4.4.2 Extremwertsatz

Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge A. Bezeichnen wir

$$\max_A f = \max f(A) \quad \text{und} \quad \min_A f = \min f(A),$$

vorausgesetzt, dass $\max f(A)$ bzw $\min f(A)$ existiert.

Satz 4.8 (Extremwertsatz oder Satz vom Minimum und Maximum) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall I. Dann existieren die beiden Werten* $\max_I f$ *und* $\min_I f$.

Beweis. Sei $I = [a, b]$. Zeigen wir zunächst, dass $f(I)$ nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq C$ für alle $x \in [a, b]$. Existiert solches C nicht, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > n$. Daraus folgt, dass

$$f(x_n) \to +\infty \text{ für } n \to \infty.$$

Die Folge $\{x_n\}$ ist beschränkt und somit enthält eine konvergente Teilfolge, zum Beispiel, $x_{n_k} \to x$ mit $x \in [a, b]$. Da f stetig its, erhalten wir

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \text{ für } k \to \infty,$$

was im Widerspruch zu $f(x_{n_k}) \to +\infty$ steht. A.Grigorian Analysis 1 SS2012 27.06.12

Da $f(I)$ nach oben beschränkt ist, so hat sie ein reellwertiges Supremum $M = \sup_I f$. Zeigen wir, dass die Funktion f den Wert M annimmt, woraus $M = \max_I f$ folgen wird. Wir müssen zeigen die Existenz von $x \in [a, b]$ mit $f(x) = M$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $M - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(I)$. Somit existiert ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Da auch $f(x_n) \leq M$, so erhalten wir

$$f(x_n) \to M \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Folge $\{x_n\}$ ist beschränkt somit enthält eine konvergente Teilfolge, zum Beispiel, $x_{n_k} \to x$ mit $x \in [a, b]$. Da f stetig its, erhalten wir $f(x_{n_k}) \to f(x)$ woraus $f(x) = M$ folgt.

Analog beweist man die Existenz von $\min_I f$. ■

Korollar 4.9 *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall I. Dann ist das Bild $f(I)$ auch ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Darüber hinaus gilt*

$$f(I) = \left[\min_I f, \max_I f\right].$$

Beweis. Nach Satz 4.7 ist $f(I)$ ein Intervall mit den Grenzen A und B, wobei

$$A = \inf_I f \quad \text{und} \quad B = \sup_I f.$$

Nach Satz 4.8 haben wir $A, B \in f(I)$ und

$$A = \min_I f \quad \text{und} \quad B = \max_I f,$$

woraus $f(I) = [A, B]$ folgt. ■

4.5 Umkehrfunktion

Eine reellwertige Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I heißt monoton steigend, falls $x \leq y$ ergibt $f(x) \leq f(y)$. Die Funktion heißt streng monoton steigend, falls $x < y$ ergibt $f(x) < f(y)$. Analog definiert man die monoton fallende Funktionen.

Beispiel. Die Function $f(x) = \exp(x)$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ nach Satz 3.10.

Beispiel. Die Function $f(x) = x^n$ its streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $y > x \geq 0$. Dann für $z = y - x$ erhalten wir

$$y^n = (x+z)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k z^{n-k} + z^n \geq x^n + z^n > x^n.$$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^n$ ist streng monoton fallend auf $(0, +\infty)$ für jedes $n \in -\mathbb{N}$, was aus $x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ folgt.

Nach Satz 1.7, eine Abbildung $f : A \to B$ zwischen zweien beliebigen Mengen A und B hat eine Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ genau dann, wenn f bijektiv ist, wobei die Umkehrabbildung durch die folgenden Bedingung definiert ist:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$. Sind A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann heißt f^{-1} auch die *Umkehrfunktion.*

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, die durch $f(x) = x^2$ definiert ist. Da die Bedingung $y = x^2$ für nicht-negative x und y äquivalent zu $x = \sqrt{y}$ ist, wir sehen, dass die Umkehrfunktion f^{-1} existiert und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

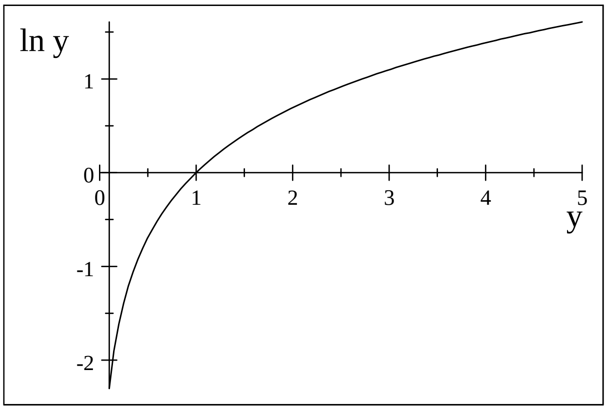
Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, die Bedingung $y = \frac{1}{x}$ ist äquivalent zu $x = \frac{1}{y}$. Deshalb f^{-1} existiert und ist gleich f.

Satz 4.10 *Sei f eine streng monotone Funktion auf einem Intervall I. Sei $J = f(I)$. Dann die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ existiert, ist streng monoton und stetig.*

Beispiel. Die Funktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ und $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Deshalb hat sie die Umkehrfunktion auf $(0, +\infty)$, die auch stetig und monoton steigend ist. Diese Funktion heißt *natürlicher Logarithmus* und sie wird mit ln bezeichnet. Somit für jedes $y > 0$ ist $\ln y$ durch die Identität

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$$

definiert. Nach Satz 4.10 ist die Funktion $y \mapsto \ln y$ streng monoton steigend und stetig auf $(0, +\infty)$



Der Graph der Funktion $y \mapsto \ln y$

Natürlicher Logarithmus kann benutzt werden um die Potenz a^x für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ (sogar $x \in \mathbb{C}$) zu definieren:

$$a^x := \exp(x \ln a). \tag{4.12}$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ heißt die Exponentialfunktion zur Basis a. Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

1. $a^1 = a$ da $\exp(\ln a) = a$, und $a^0 = 1$ da $\exp(0) = 1$.

2. $a^{x+y} = a^x a^y$ da
$$a^x a^y = \exp(x \ln a) \exp(y \ln a) = \exp((x+y) \ln a) = a^{x+y}.$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ stimmt die neue Definition (4.12) von a^n mit der früheren induktiven Definition (1.13) von a^n überein, da $a^{n+1} = a^n a$.

4. Für $x \in \mathbb{R}$ ist a^x reell, und die Funktion $x \mapsto a^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{4.13}$$
(siehe Aufgaben).

Da $\ln e = 1$, erhalten wir nach (4.12) $e^x = \exp(x)$.

Beispiel. Die Funktion $y = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$ und ihr Bild ist $[0, +\infty)$. Deshalb existiert die Umkehrfunktion auf $[0, +\infty)$ und ist stetig. Diese Funktion wird mit $x = \sqrt[n]{y}$ bezeichnet. Diese Funktion ist streng monoton steigend und stetig auf $[0, +\infty)$.

Bemerken wir, dass für jedes $y > 0$ gilt

$$\sqrt[n]{y} = y^{1/n}.$$

In der Tat ist der Wert $x = \sqrt[n]{y}$ die einzige positive Lösung der Gleichung $x^n = y$. Andererseits ist diese Gleichung auch von $x = a^{1/n}$ erfüllt, da nach (4.13) gilt $\left(a^{1/n}\right)^n = a^{\frac{1}{n}n} = a$.

Beweis von Satz 4.10. Sei f streng monoton steigend. Dann ist f eine Bijektion von I nach J, und somit existiert die Umkehrfunktion. Beweisen wir, dass f^{-1} streng monotone steigend ist. Seien $y_1 < y_2$ aus J und bezeichnen wir $x_k = f^{-1}(y_k)$ so dass $y_k = f(x_k)$. Zeigen wir, dass $x_1 < x_2$. Gilt $x_1 \geq x_2$, dann erhalten wir nach der Monotonie von f, dass $y_2 = f(x_2) \leq f(x_1) = y_1$, was im Widerspruch zum $y_1 < y_2$ steht.

Beweisen wir, dass f^{-1} stetig ist, d.h. für jedes $y \in J$ und jede Folge $\{y_n\} \subset J$ gilt

$$y_n \to y \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y).$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass die Folge $x_n = f^{-1}(y_n)$ gegen $x = f(x)$ nicht konvergiert. Nach Satz 2.1 existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass es außerhalb $U_\varepsilon(x)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ gibt. Dann enthält eines von Intervallen $(-\infty, x-\varepsilon]$, $[x+\varepsilon, +\infty)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$, sei es $(-\infty, x-\varepsilon]$. Wir können dann annehmen, dass $x_n \leq x - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da $x_n \leq x - \varepsilon < x$ und die beiden Werte x_n, x in I sind, so gilt auch $x - \varepsilon \in I$. Nach der Monotonie von f erhalten wir

$$y_n = f(x_n) \leq f(x-\varepsilon),$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} y_n \leq f(x-\varepsilon) < f(x) = y,$$

was im Widerspruch zum $y = \lim y_n$ steht. ■

4.6 Trigonometrische Funktionen und die Zahl π

Definition. Für jedes $x \in \mathbb{C}$ definieren wir $\sin x$ und $\cos x$ durch

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{4.14}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist.

Bemerken wir, dass sogar für reelle x benutzt die Definition (4.14) von $\sin x$ und $\cos x$ die Werte von $\exp(z)$ im komplexen Bereich.

Es folgt direkt nach (4.14), dass für alle $x \in \mathbb{C}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{4.15}$$

Diese Identität heißt *Eulerformel.*

Einsetzen in (4.14) die Exponentialreihe ergibt die folgenden Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$, die für alle $x \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \tag{4.16}$$

und

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} \tag{4.17}$$

(siehe Aufgaben). Insbesondere sehen wir, dass $\sin x$ und $\cos x$ reell für alle $x \in \mathbb{R}$ sind. Es folgt aus (4.16) und (4.17), dass $\sin x$ eine ungerade Funktion ist, d.h.

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

und $\cos x$ eine gerade Funktion ist, d.h.

$$\cos(-x) = \cos x.$$

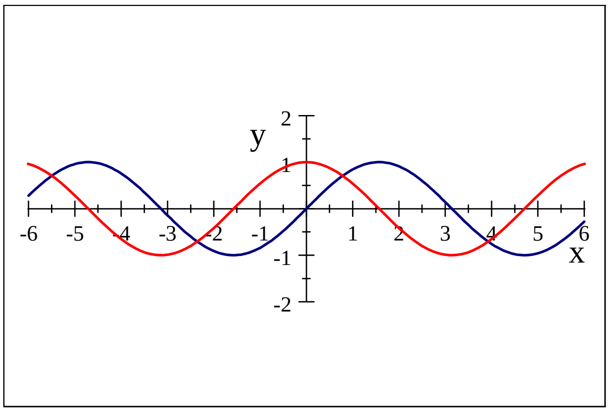
Es gelten auch die Identitäten

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos \sin y \end{aligned}$$

(siehe Aufgaben).

Es folgt aus (4.14), dass die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind (siehe Aufgaben).



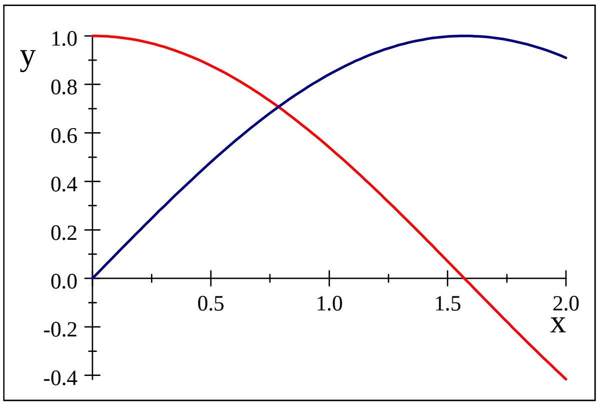
Die Graphe von Funktionen $\cos x$ (rot) und $\sin x$ (blau)

Man sieht aus den Graphen, dass die Funktionen $\sin x$ and $\cos x$ *periodisch* sind, was nicht offensichtlich aus den obigen Identitäten ist. Wir beweisen die Periodizität von $\sin x$ und $\cos x$ unterhalb.

Lemma 4.11 (*a*) *Es existiert ein* $c \in (0,2)$ *mit* $\cos c = 0$ *und* $\cos x > 0$ *für alle* $0 \leq x < c$.

(*b*) $\sin x > 0$ *for any* $x \in (0,2)$.

Insbesondere ist c die kleinste positive Zahl mit $\cos c = 0$. Es folgt aus Lemma 4.11, dass $\sin c > 0$, was zusammen mit (4.18) ergibt $\sin c = 1$.



Die Graphe von Funktionen $\cos x$ (rot) und $\sin x$ (blau) auf dem Intervall $[0,2]$

Beweis. (a) Bemerken wir, dass $\cos 0 = 1 > 0$. Zeigen wir, dass $\cos 2 < 0$. Wir haben

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} - ... = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...$$

wobei $a_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. Die Folge $\{a_n\}$ ist monoton fallend für $n \geq 1$ da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^2}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1.$$

Sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ die Partialsummen der Reihe. Wir behaupten, dass die Folge $\{S_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ mit geraden Indizen fallend ist . Zum Beispiel, we haben

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = a_0 - (a_1 - a_2) \leq a_0 = S_0.$$

Für beliebige $m \geq 0$ haben wir

$$S_{2(m+1)} = S_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq S_{2m}.$$

Es folgt, dass für jedes $m \geq 0$,

$$\cos 2 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} S_{2m} \leq S_{2m}.$$

Insbesondere gilt

$$\cos 2 \leq S_2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0,$$

woraus $\cos 2 < 0$ folgt. Nach Satz 4.6 erhalten wir, dass $\cos x = 0$ für ein $x \in (0,2)$.

Betrachten wir die Menge

$$S = \{x \in [0,2] : \cos x = 0\},$$

die nicht-leer ist, und setzen

$$c := \inf S \in [0,2].$$

Zeigen wir, dass $c \in S$. Es existiert eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ mit $x_n \to c$ für $n \to \infty$, woraus folgt nach der Stetigkeit von $\cos x$, dass

$$\cos c = \lim_{n\to\infty} \cos x_n = 0,$$

und somit $c \in S$. Beachten wir, dass $c > 0$ weil $\cos 0 > 0$, und $c < 2$ weil $\cos 2 < 0$.

Zeigen wir, dass $\cos x > 0$ für $0 < x < c$. Da c eine untere Schranke von S ist, ergibt die Bedingung $x < c$ dass $x \notin S$ und somit $\cos x \neq 0$. Ist $\cos x < 0$, so erhalten wir nach Satz 4.6 die Existenz von $0 < y < x$ mit $\cos y = 0$ was nicht möglich wegen $y < c$ ist. Daher gilt $\cos x > 0$, was zu beweisen war.

(b) Wir haben

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = b_0 - b_1 + b_2 - ...$$

wobei $b_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Für $x \in (0, 2)$ und jedes $n \geq 0$ haben wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{4}{(2n+2)(2n+3)} < 1,$$

woraus folgt, dass die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend ist.

Betrachten wir die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$ und beweisen, dass die Folge $\{S_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ mit ungeraden Indizen monoton steigend ist. Zum Beispiel, es gilt

$$S_3 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \geq b_0 - b_1 = S_1.$$

Analog erhalten wir für alle $m \geq 0$

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} + b_{2m} - b_{2m+1} \geq S_{2m-1}.$$

Es folgt, dass

$$\sin x = \lim_{m \to \infty} S_{2m+1} \geq S_{2m+1} \text{ für alle } m \geq 0.$$

Insbesondere gilt für $x \in (0, 2)$

$$\sin x \geq S_1 = x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0,$$

was zu beweisen war. ■

Definition. Setzen wir $\pi := 2c$ wobei c die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist, die nach Lemma 4.11 existiert.

Es folgt aus Lemma 4.11, dass $0 < \pi < 4$. Analog kann man beweisen, dass $c > \frac{3}{2}$ und somit $\pi > 3$ (siehe Aufgaben). Numerische Berechnung ergibt

$$\pi = 3.14159265358979...$$

Es ist bekannt, dass π eine transzendente Zahl ist. Derzeitig ist π mit über 6 Milliarden Dezimalstellen berechnet worden.

Satz 4.12 (a) *Es gelten die Identitäten*

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i, \quad \exp(\pi i) = -1, \qquad \exp(2\pi i) = 1.$$

(b) *Die Funktion* $\exp(z)$ *ist* $2\pi i$ *periodisch auf* $\mathbb{C}$, *d.h.*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4.19}$$

(c) *Die Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind* 2π *periodisch, d.h.*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \ \textit{und} \ \ \cos(x + 2\pi) = \cos x \ \ \textit{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

Beweis. (a) Benutzen wir die Bezeichnung $c = \pi/2$ wie in Lemma 4.11. Da $\cos c = 0$ und $\sin c = 1$, erhalten wir nach der Eulerformel

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \exp(ci) = \cos c + i \sin c = i.$$

Es folgt, dass

$$\exp(\pi i) = \exp(ci)\exp(ci) = i \cdot i = -1,$$

und

$$\exp(2\pi i) = \exp(\pi i)\exp(\pi i) = (-1)^2 = 1. \tag{4.20}$$

(b) Mit Hilfe von (4.20) und der Haupteigenschaft der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z).$$

(c) Mit Hilfe von (4.16) und (4.19) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \frac{1}{2i}\left(\exp(ix + 2\pi i) - \exp(-ix - 2\pi i)\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\exp(ix) - \exp(-ix)\right) = \sin x, \end{aligned}$$

und das gleiche Argument funktioniert für $\cos x$. ■

Chapter 5

Differentialrechnung

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
29.06.12

5.1 Ableitung

5.1.1 Definition von Ableitung

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf einem Intervall I heißt *differenzierbar* an der Stelle $x \in I$ falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus \{x\}}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Der Wert des Grenzwertes heißt die *Ableitung* (Differentialquotient) von f an der Stelle $x \in I$ und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Ist f an allen Stellen $x \in I$ differenzierbar, so sagt man, dass f auf dem Intervall I differenzierbar. In diesem Fall wird die Ableitung f' als eine Funktion auf dem Intervall I betrachtet.

Einsetzen $h = y - x$ ergibt die äquivalente Definition der Ableitung:

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.1}$$

Der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ heißt *Differenzenquotient.*

Beispiel. Berechnen wir die Ableitungen der folgenden Funktionen.

1.$f(x) = \text{const}$. Dann $f(y) - f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ für alle x. Man schreibt

$$(\text{const})' = 0.$$

2. $f(x) = x$. Dann

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y - x}{y - x} = 1$$

woraus folgt $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher gilt

$$(x)' = 1.$$

3. $f(x) = x^2$. Dann

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x,$$

daher

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Analog zeigt man, dass, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$$

(siehe Aufgabe 66).

4. $f(x) = \exp(x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\exp(y) - \exp(x)}{y - x} = \exp(x),$$

(siehe Aufgabe 65), daher

$$\boxed{(\exp(x))' = \exp(x)}.$$

5. $f(x) = \sin x$. Dann

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 61 erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \text{ and } \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

daher

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Analog beweist man

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

(siehe Aufgabe 66).

Satz 5.1 *Ist die Funktion f differenzierbar an x, so ist f stetig an x.*

Beweis. Wir haben

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus \{x\}}} (f(y) - f(x)) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus \{x\}}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (y - x) = f'(x) \lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus \{x\}}} (y - x) = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus \{x\}}} f(y) = f(x).$$

Somit ist f stetig an x. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Da $f = \text{const}$ auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$, erhalten wir, dass $f'(x) = 0$ für alle $x \neq 0$. An $x = 0$ ist die Funktion f unstetig, da

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 \neq 0 = f(0),$$

woraus folgt nach Satz 5.1, dass f nicht differenzierbar an 0 ist.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist differenzierbar für alle $x \neq 0$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion $f(x) = |x|$ stetig aber nicht differenzierbar, da die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

nicht gleich sind.

5.1.2 Physikalische Bedeutung der Ableitung

Sei $f(t)$ die Position eines Körpers an der Zahlengerade am Zeitpunkt t. Dann gilt für den Differenzenquotient

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\text{Verschiebung von Körper}}{\text{Zeitintervall}} \\ &= \text{durchschnittliche Geschwindigkeit im } [t, t+h] \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ erhalten wir, dass die Ableitung $f'(t)$ gleich *unmittelbare* Geschwindigkeit von Körper am Zeitpunkt t ist.

Zum Beispiel, im Auto wird $f'(t)$ am Tachometer an jedem Zeitpunkt t gezeigt.

5.1.3 Geometrische Bedeutung der Ableitung

Betrachten wir den Graph einer Funktion $y = f(x)$. Die Gerade durch zwei Punkte $(x, f(x))$ und $(x + h, f(x + h))$ auf dem Graph heißt die *Sekante*. Die Gerade durch zwei Punkte (X_0, Y_0) und (X_1, Y_1) der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist der Graph der folgenden Funktion

$$Y = A(X - X_0) + Y_0,$$

wobei X, Y die Variablen sind, und $A = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$ die *Steigung* der Gerade ist. Für $X_0 = x$, $Y_0 = f(x)$, $X_1 = x + h$, und $Y_1 = f(x + h)$ erhalten wir die Steigung der Sekante

$$A = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ erhalten wir $A \to f'(x)$, während die Sekante gegen die *Tangente* am Punkt $(x, f(x))$ konvergiert. Deshalb ist die Ableitung $f'(x)$ gleich die Steigung der Tangente, und die Tangente ist der Graph der folgenden Funktion:

$$\boxed{Y = f'(x)(X - x) + f(x)} \tag{5.2}$$

(die Gleichung der Tangente).

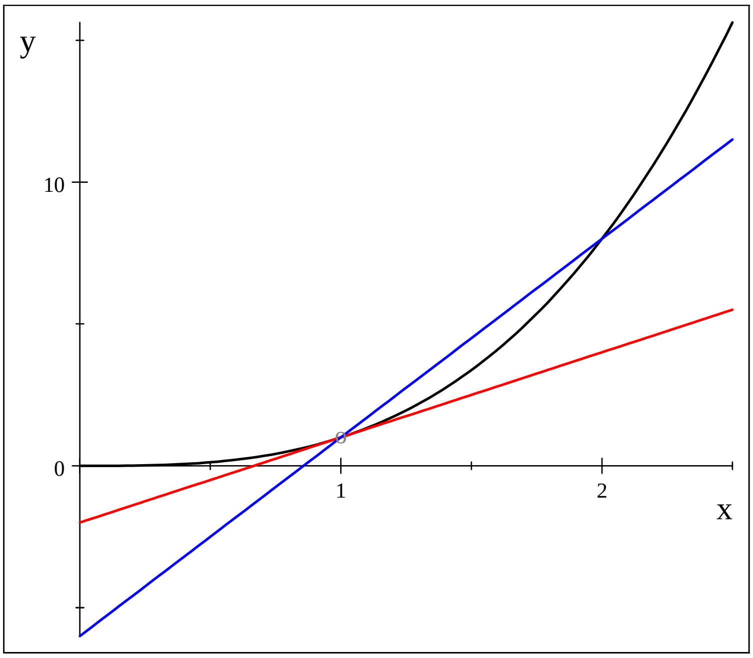
Beispiel. Für $f(x) = x^3$ erhalten wir aus (5.2) die Gleichung der Tangente

$$Y = 2x^2 (X - x) + x^3.$$

Zum Beispiel, für $x = 1$ ergibt sie

$$Y = 3(X - 1) + 1 = 3X - 2$$

(siehe das Bild).



Die Funktion $f(x) = x^3$ (schwarz), ihre Tangente an $(1, 1)$ (rot), und ihre Sekante durch $(1, 1)$ und $(2, 8)$ (blau)

5.1.4 Landau-Symbol o

Die Ableitung kann benutzt werden um die Werte von $f(x + h)$ für kleine h ungefähr berechnen, angenommen, dass $f(x)$ und $f'(x)$ gegeben sind. Es folgt aus (5.1) dass für kleinen Werte von h

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x) h. \tag{5.3}$$

Die genaue Bedeutung von dieser Relation wird unterhalb erklärt.

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf einem interval $I \subset \mathbb{R}$, und sei $a \in \overline{I}$. Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a \tag{5.4}$$

($f(x)$ ist klein o von $g(x)$, $f(x)$ ist vernachlässigbar klein gegenüber $g(x)$) falls

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Das Symbol o heißt das *Landau-Symbol.*

Zum Beispiel, es gilt

$$x^2 = o(x) \text{ für } x \to 0$$

während

$$x = o\left(x^2\right) \text{ für } x \to +\infty.$$

Lemma 5.2 *Existiert $f'(x)$, so gilt*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \quad \textit{für} \;\; h \to 0. \tag{5.5}$$

Die Relation (5.5) kann als eine rigorose Version von (5.3) betrachtet werden. Der Term $o(h)$ stellt den Approximationsfehler in (5.3) dar.

Beweis. Wir müssen beweisen, dass

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h = o(h) \quad \text{für} \;\; h \to 0.$$

Wir haben

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0,$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. Sei $f(x) = \sin x$. Nach (5.5) haben wir

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x + o(h).$$

Insbesondere für $x = 0$ erhalten wir

$$\sin h = h + o(h). \tag{5.6}$$

Diese Relation kann auch mit Hilfe von der Potenzreihe von sin bewiesen werden. In der Tat gilt für $h = 0,1$

$$\sin 0,1 = 0,09983\,341\,664\,682\,82...$$

so dass (5.6) eine gute Approximation für $\sin h$ liefert.

5.1.5 Differential

In der Definition (5.1) der Ableitung bezeichnet man häufig h mit dx und nennt dx das *Differential* der Variable x. Die Relation (5.5) kann man wie folgt umschreiben:

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + o(dx) \text{ für } dx \to 0. \tag{5.7}$$

Definition. Der Term $f'(x)\,dx$ in der rechten Seite von (5.7) heißt das *Differential* der Funktion f und wird mit $df(x)$ bezeichnet, so dass

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{5.8}$$

Insbesondere gilt

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Der Ausdruck $\frac{df}{dx}$ wird häufig statt f' für Bezeichnung der Ableitung benutzt.

Das Differential $df(x)$ kann als eine lineare Funktion von dx betrachtet werden, angenommen, dass x fest ist. By (5.7) haben wir

$$f(x+dx) - f(x) = df(x) + o(dx),$$

so dass das Differential ein linearer dominanter Teil der Differenz der Funktion ist.

Beispiel. Benutzen wir die oberhalb berechneten Ableitungen und erhalten aus (5.8)

$$\begin{aligned} dx^n &= nx^{n-1}dx \\ d\exp(x) &= \exp(x)\,dx \\ d\sin x &= \cos x\ dx \\ d\cos x &= -\sin x\ dx. \end{aligned}$$

5.2 Rechenregeln für Ableitung

Satz 5.3 *Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die differenzierbar in $x \in I$ sind. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch differenzierbar in x (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identität sind erfüllt:*

(a) Summenregel:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).} \tag{5.9}$$

(b) Produktregel oder Leibnizregel:

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).} \tag{5.10}$$

(c) Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.} \tag{5.11}$$

Es folgt aus (5.10), dass für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(cf)' = cf'.}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nach der Quotientenregel haben wir

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Satz 5.4 (Kettenregel) *Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y) f'(x)}. \tag{5.12}$$

Man kann auch schreiben

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x).$$

Beispiel. Betrachten wir die Exponentialfunktion zur Basis $a >$, d.h. die Funktion $F(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nach Definition haben wir

$$F(x) = \exp(x \ln a),$$

was eine Verkettung von der folgenden zwei Funktionen ist:

$$y \mapsto \exp(y) \text{ und } y = x \ln a.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$F'(x) = (\exp(y))' (x \ln a)' = \exp(y) \ln a = a^x \ln a,$$

d.h.

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Beispiel. Die Funktion $F(x) = \exp(\cos 2x)$ ist die Verkettung von drei Funktionen:

$$z \mapsto \exp(z), \quad z = \cos y, \quad y = 2x.$$

Zwei Anwendungen von der Kettenregel ergeben

$$F'(x) = (\exp(z))' (\cos y)' (2x)' = -2 \exp(z) \sin y = -2 \exp(\cos(2x)) \sin 2x.$$

Satz 5.5 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei f eine streng monotone, stetige Funktion auf einem Intervall I, so dass die Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Intervall $J = f(I)$ definiert ist. Ist f differenzierbar in $x \in I$ und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar in $y = f(x)$ und es gilt*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{5.13}$$

Bemerkung. Die Tangente zum Graph der Funktion f am Punkt (x, y) hat die Gleichung

$$Y - y = A(X - x),$$

wobei $A = f'(x)$ die Steigung ist. Für die Umkehrfunktion werden die Rollen von X und Y vertauscht, so dass die Gleichung der Tangente zum f^{-1} ist

$$X - x = \frac{1}{A}(Y - y),$$

vorausgesetzt $A \neq 0$. Somit ist die Steigung der Tangente gleich $\frac{1}{A}$, was die Identität (5.13) erklärt .

Da $y = f(x)$ äquivalent zu $x = f^{-1}(y)$ ist, so können wir (5.13) wie folgt umschreiben:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

und

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beispiel. Sei $f(x) = \exp(x)$ auf $I = \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion von $x \mapsto \exp(x)$ ist die Funktion $y \mapsto \ln y$ auf $(0, +\infty)$. Nach (5.13) erhalten wir in $y = \exp(x)$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(\exp(x))'} = \frac{1}{\exp(x)},$$

woraus folgt

$$\boxed{(\ln y)' = \frac{1}{y}}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Potenzfunktion $f(x) = x^a$ wobei $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Nach Definition haben wir

$$f(x) = \exp(a \ln x),$$

so dass f die Verkettung von Funktionen

$$y \mapsto \exp(y) \quad \text{und} \quad y = a \ln x.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$(x^a)' = (\exp(y))'(a \ln x)' = \exp(y)\frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1},$$

d.h.

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}}.$$

Zum Beispiel, es gilt

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

and

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
04.07.12

Beweis von Satz 5.3. (a) Nach Definition von Ableitung und Satz 4.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{(f(y)+g(y))-(f(x)+g(x))}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}+\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

(b) Mit gleichem Argument und mit Hilfe von Stetigkeit von f an der Stelle x, die nach Satz 5.1 gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)}{y-x}+\lim_{y\to x}\frac{f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}f(y)\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}+g(x)\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\ &= f(x)g'(x)+g(x)f'(x),\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(c) Berechnen wir zunächst $\left(\frac{1}{g}\right)'$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{g(y)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\left(\frac{g(x)-g(y)}{g(y)g(x)}\right)\\ &= \lim_{y\to x}\frac{g(x)-g(y)}{y-x}\lim_{y\to x}\frac{1}{g(y)g(x)}\\ &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)},\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}, \tag{5.14}$$

was ein spezielle Fall von (5.11) für $f=1$ ist.

Für allgemeine Funktion f erhalten wir mit Hilfe von (5.10) und (5.14):

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\left(\frac{1}{g}\right) + f\left(\frac{1}{g}\right)' \\ &= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.\end{aligned}$$

■

Bemerkung. Für das Produkt von n Funktionen $f_1, ..., f_n$ gilt die Regel

$$(f_1...f_n)' = f_1'f_2...f_n + f_1f_2'f_3...f_n + ...f_1...f_k'...f_n + ...f_1...f_{n-1}f_n',$$

die man per Induktion nach n beweisen kann.

Das folgende Lemma brauchen wir für die Beweise von Sätze 5.4 und 5.5

Lemma 5.6 *Sei f eine Funktion auf Intervall I die differenzierbar in $x \in I$ ist. Dann existiert eine Funktion F auf I mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $f(y) - f(x) = F(y)(y - x)$ *für alle* $y \in I$

(ii) $F(x) = f'(x)$

(iii) F *ist stetig in* x.

Bemerkung. Dieses Lemma impliziert Lemma 5.2 da

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= F(x+h)h \\ &= f'(x)h + (F(x+h) - f'(x))h \\ &= f'(x)h + o(h),\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $F(x+h) - f'(x) \to 0$ für $h \to 0$.

Beweis. Für $y \in I \setminus \{x\}$ definieren wir $F(y)$ durch

$$F(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

und für $y = x$ setzen wir

$$F(x) = f'(x).$$

Dann ist die Identität (i) für alle $y \in I$ erfüllt weil für $y = x$ die beiden Seiten davon verschwinden. Die Stetigkeit von F in x folgt aus

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in I\setminus\{x\}}} F(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in I\setminus\{x\}}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) = F(x).$$

■

Wir nennen die Funktion F aus Lemma 5.6 *Verhältnisfunktion* von f an der Stelle x. In der Tat ist $F(y)$ gleich die Steigung der Sekante der Graph von f durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ falls $y \neq x$, und die Steigung der Tangente an der Stelle

$(x, f(x))$ für $y = x$. Nach Lemma 5.6 ist die Verhältnisfunktion stetig an der Stelle x.

Beweis von Satz 5.4. Sei F die Verhältnisfunktion von f in x und G – die Verhältnisfunktion von g in y. Dann haben wir

$$f(X) - f(x) = F(X)(X - x) \quad \forall\, X \in A$$

$$g(Y) - g(y) = G(Y)(Y - y) \quad \forall Y \in B, \tag{5.15}$$

Einsetzen in (5.15) $Y = f(X)$ und $y = f(x)$ ergibt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(X) - (g \circ f)(x) &= g(f(X)) - g(f(x)) \\ &= G(f(X))(f(X) - f(x)) \\ &= G(f(X))\, F(X)(X - x),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{X \to x} \frac{(g \circ f)(X) - (g \circ f)(x)}{X - x} = \lim_{X \to x} G(f(X))\, F(X).$$

Da $G(Y)$ stetig in $y = f(x)$ und $f(X)$ stetig in x ist, erhalten wir nach Satz 4.5, dass die Verkettung $G(f(X))$ stetig in x ist. Da $F(X)$ auch stetig in x ist, erhalten wir

$$(g \circ f)'(x) = G(f(x))\, F(x) = G(y)\, F(x) = g'(y)\, f'(x),$$

was zu beweisen war. ■

Beweis von Satz 5.5. Das Bild $J = f(I)$ ist ein Intervall nach Satz 4.7, und the Umkehrfunktion f^{-1} existiert und ist stetig auf J nach Satz 4.10. Sei F die Verhältnisfunktion von f in x, so dass

$$f(X) - f(x) = F(X)(X - x) \quad \forall X \in I, \tag{5.16}$$

Setzen wir $Y = f(X)$, $y = f(x)$ und erhalten aus (5.16)

$$Y - y = F\left(f^{-1}(Y)\right)\left(f^{-1}(Y) - f^{-1}(y)\right).$$

Bezeichnen wir $G(Y) = F(f^{-1}(Y))$. Da f^{-1} stetig auf J und F stetig in $x = f^{-1}(y)$ ist, erhalten wir nach by Satz 4.5, dass $G = F \circ f^{-1}$ stetig in y ist, und

$$G(y) = F(x) = f'(x).$$

Da $f'(x) \neq 0$, es gibt eine Umgebung U von y wo $G(Y)$ verschwindet nicht. Daher erhalten wir für alle $Y \in U \cap J$

$$f^{-1}(Y) - f^{-1}(y) = \frac{1}{G(Y)}(Y - y),$$

und

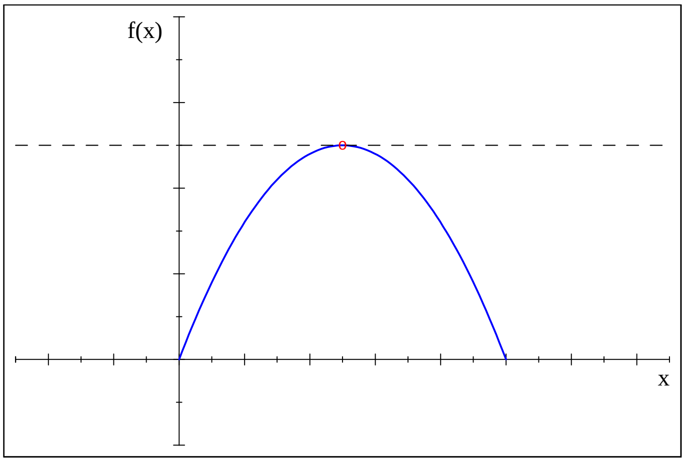
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{\substack{Y \to y \\ Y \in U \cap J \setminus \{y\}}} \frac{f^{-1}(Y) - f^{-1}(y)}{Y - y} = \lim_{\substack{Y \to y \\ Y \in U \cap J \setminus \{y\}}} \frac{1}{G(Y)} = \frac{1}{f'(x)},$$

was zu beweisen war. ■

5.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen

Satz 5.7 (Satz von Fermat) *Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall I und sei $x \in I$ eine Maximumstelle von f, d.h. $f(x) = \max_I f$. Ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$. Das gleiche gilt für eine Minimumstelle.*

Die geometrische Bedeutung von dieser Aussage ist wie folgt: die Steigung der Tangente an der Maximumstelle von f ist 0, d.h. die Tangente an dieser Stelle waagerecht ist.



Die Tangente an der Maximumstelle ist waagerecht

Diese Aussage gilt nur when die Maximumstelle in einem offenen Intervall liegt, und gilt nicht für die Grenzen des Intervalles.

Beweis. Da $f(y) \le f(x)$ für alle $y \in I$, so erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{\substack{y \in I \\ y > x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le 0 \quad \text{und} \quad f'(x) = \lim_{\substack{y \in I \\ y < x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ge 0,$$

woraus folgt $f'(x) = 0$.

Der Fall von Minimumstelle wird analog behandelt. ∎

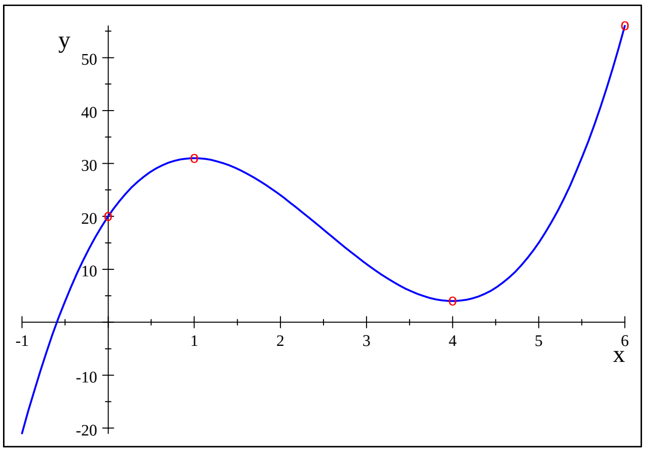
Korollar 5.8 *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Ist x eine Maximumstelle bzw Minimumstelle, so gilt entweder $f'(x) = 0$ oder $x = a$ oder $x = b$.*

Beweis. Gilt $x \in (a, b)$ so gilt $f'(x) = 0$ nach Satz 5.7. Sonst $x = a$ oder $x = b$. ∎

Beispiel. Bestimmen wir das Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$$

auf dem Intervall $[0, 6]$.



Der Graph der Funktion $2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$

Die Ableitung

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Deshalb liegen die Maximum- und Minimumstellen in der Menge $\{0, 1, 4, 6\}$. Berechnung den Werten an diesen Stellen ergibt:

$$f(0) = 20, \quad f(1) = 31, \quad f(4) = 4, \quad f(6) = 56.$$

Deshalb $\max_{[0,6]} f = 56$ wird an der Stelle $x = 6$ angenommen, und $\min_{[0,6]} f = 4$ wird an $x = 4$ angenommen.

Satz 5.9 (Satz von Rolle) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert eine Stelle $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 4.8 (Extremwertsatz) existieren $\max_{[a,b]} f$ und $\min_{[a,b]} f$. Sei c_1 eine Maximumstelle von f und c_2 - eine Minimumstelle. Liegt eine von diesen Stellen im (a, b) so verschwindet f' an dieser Stelle nach Satz 5.7. Seien c_1 und c_2 die Grenzen von $[a, b]$. Da $f(a) = f(b)$, es folgt, dass der Wert von $f(a)$ ist gleichzeitig das Maximum und Minimum von f, so dass f eine Konstantefunktion auf $[a, b]$ ist. Dann gilt $f'(c) = 0$ für jedes $c \in (a, b)$. ■

Satz 5.10 (Mittelwertsatz von Lagrange) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Beweis. Betrachten wir die Funktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Die Funktion h ist offensichtlich stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), und es gilt

$$h(b) = h(a) = f(a).$$

Nach Satz 5.9, es gibt ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h' = f' - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

es folgt daraus, dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

was zu beweisen war. ■

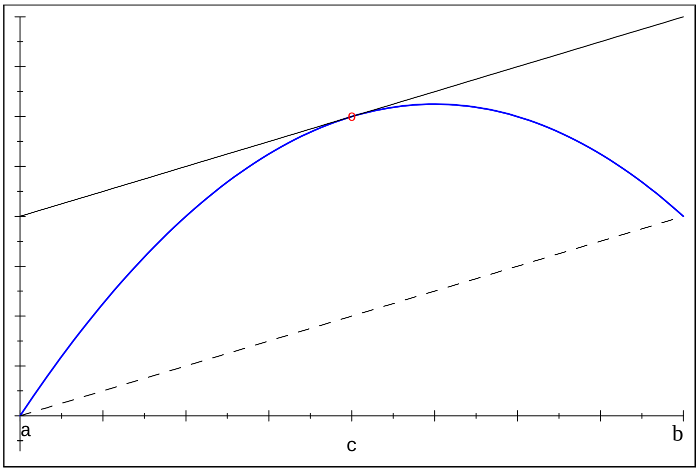
Bemerkung. Betrachten wir die Gleichung

$$Y = A(X - a) + f(a)$$

der Sekante der Graph der Funktion f, die durch die Punkte $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$ geht. Der Koeffizient

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ist die Steigung der Sekante. Satz 5.10 besagt, dass die Steigung der Sekante gleich die Steigung der Tangente an einer Mittelstelle $c \in (a, b)$ ist.



Die Tangente an $(c, f(c))$ und die Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$ haben die gleiche Steigung

Satz 5.11 (Konstantentest) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I. Dann gilt $f = \text{const}$ auf I genau dann wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Gilt $f = \text{const}$, so gilt auch $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Für die Rückrichtung beweisen wir, dass $f(a) = f(b)$ für alle verschiedene $a, b \in I$. Nach Satz 5.10 erhalten wir, für ein $c \in (a, b)$,

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b).$$

Da $f'(c) = 0$, so erhalten wir $f(a) = f(b)$. ■

Beispiel. Bestimmen wir alle Funktionen f mit $f'(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bemerken wir zunächst, dass die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$ diese Gleichung erfüllt. Gibt es weitere

Funktionen, die diese Gleichung erfüllen? Ist f eine andere Funktion mit $f' = x$, so folgt daraus $f' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$ und daher

$$\left(f - \frac{x^2}{2}\right)' = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Nach Satz 5.11 folgt $f - \frac{x^2}{2} = C$ für eine Konstante C. Deshalb erhalten wir

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

was alle Funktionen darstellt, die die Gleichung $f' = x$ erfüllen.

Satz 5.12 (Monotonie Test) *Sei I ein offenes Intervall. Sei f eine stetige Funktion auf $\overline{I}$, die auf I differenzierbar ist. Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton steigend auf $\overline{I}$. Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton steigend auf I.*

Analog impliziert die Bedingung $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, dass f monoton fallend auf $\overline{I}$ ist, die Bedingung $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dass f streng monoton fallend auf I ist..

Beweis. Betrachten wir zwei Werte $a < b$ auf I. Nach Satz 5.10 existiert $c \in (a, b) \subset I$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Somit impliziert die Voraussetzung $f' \geq 0$, dass $f(b) \geq f(a)$, d.h. f monoton steigend ist. Die anderen Aussagen werden analog bewiesen. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $\sin x$ auf $\overline{I} = [0, \pi/2]$. Nach Definition von $\pi/2$, haben wir $\cos x > 0$ für alle $x \in I = (0, \pi/2)$. Da $(\sin x)' = \cos x$, beschließen wir, dass $\sin x$ echt monoton steigend auf $[0, \pi/2]$ ist.

Satz 5.12 kann benutzt werden um Ungleichungen zu beweisen.

Satz 5.13 (Vergleichstest)

(a) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b)$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Angenommen seien die Bedingungen:*

   1. $f(a) \leq g(a)$
   2. $f'(x) \leq g'(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

   Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Darüber hinaus, die Bedingung $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ ergibt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

(b) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $(a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Angenommen seien die Bedingungen:*

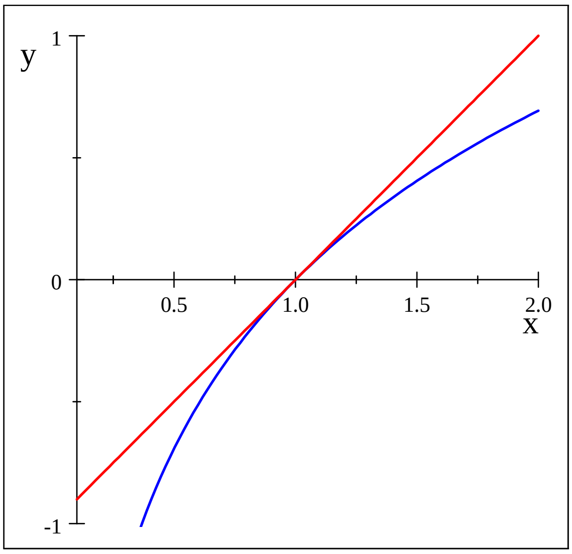
   1. $f(b) \leq g(b)$

2. *$f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$.*
   Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Darüber hinaus, die Bedingung $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$ ergibt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Beispiel. Beweisen wir die Ungleichung

$$\ln x \leq x - 1 \tag{5.17}$$

für alle $x > 0$. Die Graphen dieser zwei Funktion werden auf dem folgenden Bild gezeigt:



Die Funktionen $y = \ln x$ (blau) und $y = x - 1$ (rot)

Für $x = 1$ sind die beiden Seiten von (5.17) gleich 0. Für $x > 1$ haben wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} < 1 = (x-1)'.$$

Anwendung des Vergleichstests von Korollar 5.13(a) auf Interval $[1, +\infty)$ ergibt, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.

Für $0 < x < 1$ haben wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 1 = (x-1)'.$$

Anwendung des Vergleichstests von Korollar 5.13(b) auf Interval $(0, 1]$ ergibt $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, 1)$. Somit ist (5.17) erfüllt für alle $x > 0$.

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
06.07.12

Beweis von Satz 5.13. (a) Definieren wir eine neue Funktion $h = g - f$ und beachten, dass $h(a) \geq 0$ und $h' \geq 0$ auf (a,b). Nach Satz 5.12 ist h monoton steigend auf $[a,b)$, woraus folgt für alle $x \in (a,b)$,

$$h(x) \geq h(a) \geq 0,$$

und somit $f(x) \leq g(x)$. Im Fall von der echten Ungleichung $f'(x) < g'(x)$ erhalten wir, dass h streng monoton steigend ist, woraus $h(x) > 0$ und $f(x) < g(x)$ folgen.

(b) In diesem Fall ist die Funktion h monoton fallend und $h(b) \geq 0$, daher

$$h(x) \geq h(b) \geq 0$$

für alle $x \in (a,b)$, was ergibt $f(x) \leq g(x)$. Gilt die echte Ungleichung $f'(x) < g'(x)$, so ist h streng monoton fallend, woraus folgt $h(x) > 0$ und somit $f(x) < g(x)$. ■

Satz 5.12 impliziert auch die folgende Eigenschaft von Umkehrfunktionen.

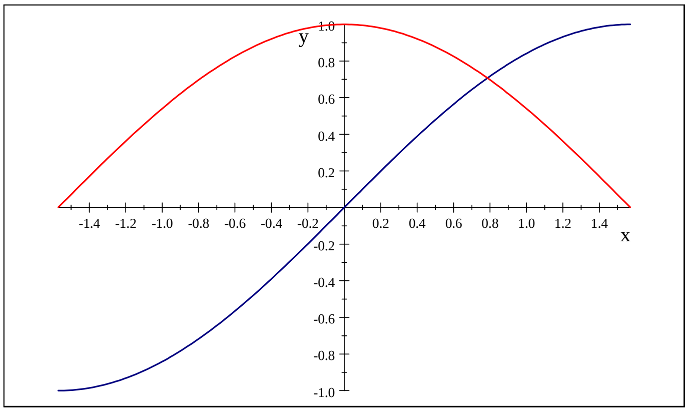
Korollar 5.14 *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ (oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$). Dann die Umkehrfunktion f^{-1} existiert auf dem Intervall $J = f(I)$, ist differenzierbar auf J und es gilt für alle $y \in J$*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{5.18}$$

wobei $x = f^{-1}(y)$.

Beweis. Nach Satz 5.12 ist f streng monoton auf I. Nach Satz 4.10 existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf J. Nach Satz 5.5 ist f^{-1}differenzierbar und erfüllt (5.18). ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ auf $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Da $f'(x) = \cos x$ und $\cos x > 0$ auf I, so erhalten wir, dass f^{-1} auf $J = (-1,1)$ existiert und differenzierbar ist.

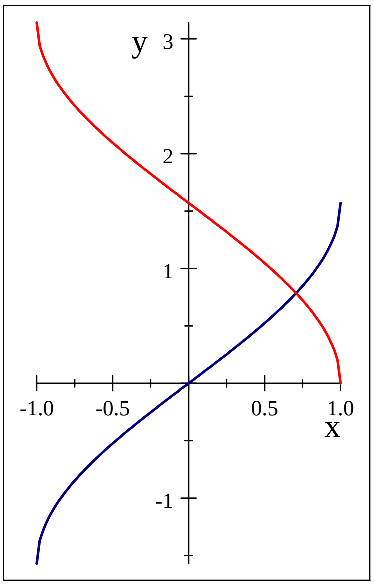


Die Graphe von Funktionen $\sin x$ (blau) und $\cos x$ (rot) auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Die Umkehrfunktion von sin wird mit arcsin bezeichnen und ist eine von *Arkusfunktionen*. Es folgt aus (5.13) dass für alle $y \in (-1,1)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

In der Tat ist der Definitionsbereich von $\arcsin y$ das Intervall $[-1,1]$ und der Wertebereich ist $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Aber $\arcsin y$ ist nicht differenzierbar in $y = \pm 1$.



arcsin (blau) und arccos (rot)

Analog betrachten wir $f(x) = \cos x$ auf $(0, \pi)$ wo $\sin x > 0$. Dann $f' = -\sin x < 0$, und f^{-1} existiert auf $(-1, 1)$ und ist differenzierbar. Für jedes $y \in (-1, 1)$ erhalten wir

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Der vollständige Definitionsbereich von $\arccos y$ ist $[-1, 1]$, und der Wertebereich ist $[0, \pi]$ (siehe Aufgaben).

5.4 Die trigonometrische Form von komplexen Zahlen

Gegeben sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, betrachten wir die folgende Relation für reelle x, y:

$$x = y \mod a \quad \text{genau dann wenn } x - y = ka \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \tag{5.19}$$

(und sagen: x gleich y modulo a). Offensichtlich ist (5.19) die Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Restklassen modulo a, und die Restklasse von x wird mit $x \bmod a$ bezeichnet. Die Addition von reellen Zahlen führt zu Addition von Restklassen:

$$x \bmod a + y \bmod a := (x + y) \bmod a,$$

was offensichtlich wohl-definiert ist.

Definition. Die Restklassen modulo 2π heißen *Winkel.*

Da $\sin x$ 2π-periodisch ist, es folgt, dass $\sin x = \sin y$ für $x = y \bmod 2\pi$. Deshalb ist $\sin \varphi$ als eine Funktion von Winkel φ wohl-definiert. Das Gleiche gilt für andere trigonometrischen Funktionen.

Satz 5.15 *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich in der folgenden Form eindeutig darstellen:*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{5.20}$$

wobei $r > 0$ und φ ein Winkel ist.

Der Ausdruck $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ heißt *trigonometrische* Form von z, im Gegensatz zur *algebraischen* Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von Eulerformel (4.15) lässt sich die Identität (5.20) wie folgt umschreiben:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Der Ausdruck $re^{i\varphi}$ heißt *exponentielle Form* von z. Die Zahl r heißt *Polarradius* von z und der Winkel φ heißt *Polarwinkel* von z. Zusammen r und φ heißen die *Polarkoordinaten* for z.

We werden unterhalb sehen, dass $r = |z|$. Die Polarwinkel wird mit $\arg z$ bezeichnet und heißt auch *Argument* von z.

Beweis. Gilt (5.20) so erhalten wir

$$|z| = |r|\,|\cos\varphi + i\sin\varphi| = r\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r.$$

so dass $r = |z|$. Insbesondere ist der Polarradius von z eindeutig bestimmt. Vergleichen mit der algebraischen Darstellung $z = x + iy$ ergibt

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

was äquivalent zu

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \tag{5.21}$$

ist. Zeigen wir, dass φ von (5.21) eindeutig bestimmt ist. Der Winkel φ wird von einer reellen Zahl aus $(-\pi, \pi]$ dargestellt, die auch mit φ bezeichnet wird. Dann erhalten wir aus (5.21) folgendes. Ist $y \geq 0$, dann $\sin\varphi \geq 0$ und somit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann ist die Gleichung $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ äquivalent zu $\varphi = \arccos\frac{x}{r}$. Ist $y < 0$, dann haben wir

$$\cos(-\varphi) = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\frac{y}{x}$$

woraus folgt $-\varphi = \arccos\frac{x}{r}$. In den beiden Fällen haben wir

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r}, & y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{r}, & y < 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

was beweist die Eindeutigkeit von Polarwinkel.

Für Existenz von (r, φ) setzen wir $r = |z|$ und definieren φ durch (5.22), woraus (5.21) folgt. ■

Satz 5.16 *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelten die folgender Identitäten*

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{5.23}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{5.24}$$

Beweis. Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Nach (3.12) erhalten wir

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Daraus folgt $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$ (cf. Satz 1.32) und

$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

woraus (5.23) folgt. Mit Hilfe von (5.23) wir haben

$$\arg z_1 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2} z_2\right) = \arg\frac{z_1}{z_2} + \arg z_2,$$

woraus (5.24) follows. ■

5.5 Höhere Ableitungen

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall I. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (oder die n-te Ableitung) wird per Induktion wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f' \ \text{ und } \ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \ \text{ für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass die entsprechenden Ableitungen existieren auf I.

Zum Beispiel, wir haben

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= (f')' =: f'' \\ f^{(3)} &= (f'')' =: f''' \\ f^{(4)} &= (f''')' =: f^{IV} \end{aligned}$$

usw.

Definition. Die Funktion f heißt n fach differenzierbar auf I falls $f^{(n)}$ existiert auf I (insbesondere müssen auch $f^{(k)}$ existieren für alle $k \leq n$). Die Funktion f heißt unendlich oft differenzierbar auf I, falls $f^{(n)}$ existiert auf I für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. 1. Sei $f = \exp(x)$. Dann $f' = \exp(x)$ und per Induktion

$$(\exp(x))^{(n)} = \exp(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\exp(x)$ unendlich oft differenzierbar.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x, \ f'' = -\sin x, \ f''' = -\cos x, \ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \bmod 4 \\ \cos x, & n = 1 \bmod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \bmod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. Dann

$$f' = a x^{a-1}, \quad f'' = a(a-1)x^{a-2}, \quad \text{usw.}$$

Per Induktion erhalten wir

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)\,x^{a-n}.$$

4. Sei $f(x) = x^k$ wobei $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left(x^k\right)^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)\,x^{k-n}.$$

Für $n = k$ erhalten wir

$$\left(x^k\right)^{(k)} = k! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $\left(x^k\right)^{(k+1)} \equiv 0$ und $\left(x^k\right)^{(n)} \equiv 0$ für alle $n > k$.

5.5.1 Taylorformel

Betrachten wir ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \tag{5.25}$$

mit reellen Koeffizienten c_k und mit $n \in \mathbb{Z}_+$. Der maximale Wert von k mit $c_k \neq 0$ heißt der Grad von f und wird mit $\deg f$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\deg f \leq n$.

Die Ableitung von Polynom f ist offensichtlich auch ein Polynom, und $\deg f' = \deg f - 1$ falls $\deg f \geq 1$. Ist $\deg f = 0$, so gilt $f = \text{const}$ und $f' = 0$.

Lemma 5.17 *Für jedes Polynom f von Grad $\leq n$ gilt für alle $a, x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{5.26}$$

Beweis. Induktionsanfang für $n = 0$. Ist $\deg f = 0$ so ist $f = \text{const}$, und die Identität (5.26) ist offensichtlich erfüllt.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Gilt $\deg f \leq n$, so gilt $\deg f' \leq n-1$. Nach der Induktionsvoraussetzung haben wir

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}. \tag{5.27}$$

Bezeichnen mit $g(x)$ die rechte Seite von (5.26). Ableiten von g ergibt

$$g'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

was zusammen mit (5.27) impliziert die Identität $f'(x) = g'(x)$. Daher $(f-g)' \equiv 0$, und nach Konstantentest (Satz 5.11) $f - g = \text{const}$. Da nach (5.26) $g(a) = f(a)$, so erhalten wir dass $\text{const} = 0$, woraus $f(x) = g(x)$ für alle x folgt. ■

Bezeichnen wir $x - a = b$ und schreiben (5.26) wir folgt um:

$$f(a+b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}b + \frac{f''(a)}{2!}b^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}b^n.$$

Für $f(x) = x^n$ erhalten wir binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + ... + \frac{n!}{n!}b^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n-l}b^l.$$

Hauptsatz 5.18 (Taylorformel) *Sei $f(x)$ eine Funktion auf einem offenen Intervall I die n-fach differenzierbar auf I ist, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $a \in I$*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a. \tag{5.28}$$

Umgekehrt, gilt für $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a \tag{5.29}$$

so gilt auch $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$.

Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{5.30}$$

heißt *Taylor-Polynom* von f an der Stelle a. Manchmal benutzt man die ausführlichere Bezeichnung $T_{n,f}(x)$ oder sogar $T_{n,f}(x;a)$.

Ist f ein Polynom von Grad$\leq n$, so haben wir nach Lemma 5.17 die Identität $f(x) = T_n(x)$ für alle x. Für allgemeine Funktionen f bedeutet (5.28) die *asymptotische* Identität von $f(x)$ and $T_n(x)$, d.h.

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a.$$

Deshalb kann $T_n(x)$ als eine Approximation von $f(x)$ in der Nähe von a betrachtet werden, mit dem Approximationsfehler $o((x-a)^n)$.

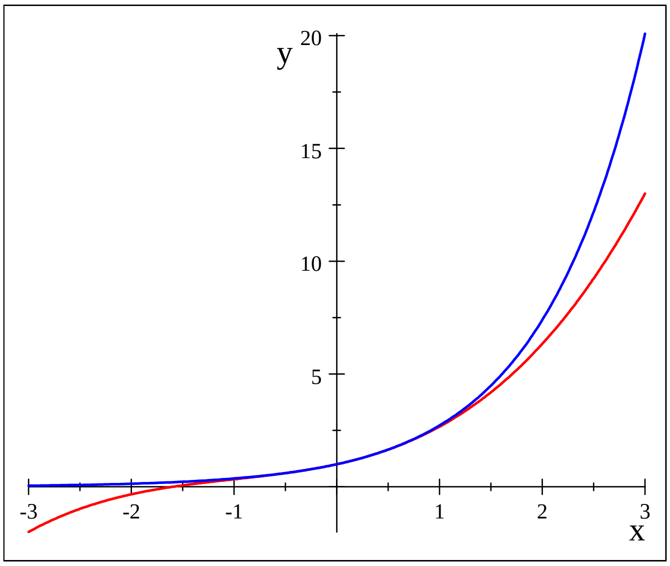
Beispiel. Sei $f(x) = \exp(x)$. Da $f^{(n)}(a) = \exp(a)$ für alle n, erhalten wir aus (5.28)

$$\exp(x) = \exp(a)\left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)\right).$$

Insbesondere für $a = 0$ erhalten wir

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

In diesem Fall ist das Taylor-Polynom $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ identisch zur partiellen Summe der Exponentialreihe.



Funktionen $\exp(x)$ (blau) und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (rot)

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$. Für $h = x - a$ erhalten wir aus (5.28)

$$(a+h)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}h + \binom{p}{2} a^{p-2}h^2 + ... + \binom{p}{n} a^{p-n}h^n + o(h^n), \tag{5.31}$$

für $h \to 0$, wobei

$$\binom{p}{n} := \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}.$$

Zum Beispiel für $p = \frac{1}{2}$ und $n = 1$ haben wir

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}} + o(h) \tag{5.32}$$

and für $n = 2$

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{\left(\sqrt{a}\right)^3} + o\left(h^2\right). \tag{5.33}$$

Für $a = 25$ und $h = 1$ ergibt (5.32)

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx 5 + \frac{1}{2}\frac{1}{5} = 5,1$$

und (5.33)

$$\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{2}\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\frac{1}{125} = 5,099$$

In der Tat gilt es

$$\sqrt{26} = 5,099019\,51359278... .$$

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
11.07.12

Beweis von Satz 5.18. Wir müssen zeigen, dass

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \text{ für } x \to a$$

d.h.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{5.34}$$

Dies wird per Induktion nach n bewiesen. Induktionsanfang: für $n = 1$ gilt

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

und (5.34) wird

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

was nach der Definition von Ableitung gilt.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Leiten wir das Taylor-Polynom $T_n(x)$ ab and erhalten folgendes:

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(f')^{(l)}(a)}{l!} (x-a)^l, \end{aligned}$$

where have changed $l = k-1$. Somit sehen wir, dass $T_n'(x)$ gleich das Taylor-Polynom von Grad $n-1$ der Funktion f' ist. Man kann das auch so aufschreiben:

$$(T_{n,f})' = T_{n-1,f'}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung haben wir

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Setzen wir $h = f - T_n$ und schreiben die obige Identität wie folgt um:

$$\lim_{x \to a} \frac{h'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{5.35}$$

Anwendung von dem Mittelwertsatz von Satz 5.10 mit Funktion h ergibt folgendes: für jedes $x \neq a$ existiert $z \in (a, x)$ mit

$$h(x) - h(a) = h'(z)(x-a).$$

Da $h(a) = 0$, daraus folgt

$$\left| \frac{h(x)}{(x-a)^n} \right| = \left| \frac{h'(z)}{(x-a)^{n-1}} \right| \leq \left| \frac{h'(z)}{(z-a)^{n-1}} \right|,$$

wobei we benutzt haben, dass $|z-a| \leq |x-a|$. Wir betrachten z als eine Funktion von x. Da $z(x) \to a$ für $x \to a$, erhalten wir nach (5.35),

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{h'(z)}{(z-a)^{n-1}} \right| = \lim_{z \to a} \left| \frac{h'(z)}{(z-a)^{n-1}} \right| = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{h(x)}{(x-a)^n}\right| = 0,$$

was äquivalent zu (5.34) ist.

Für die zweite Aussage bezeichnen wir $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ und bemerken, dass nach (5.28) und (5.29)

$$b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \tag{5.36}$$

für $x \to a$, $x \neq a$. Beweisen wir per Induktion nach $n \geq 0$, dass (5.36) ergibt $b_k = c_k$ für alle $k = 0, ..., n$. Für $n = 0$ ergibt (5.36)

$$b_0 = c_0 + o(1) \quad \text{für } x \to a.$$

woraus $b_0 = c_0$ folgt. Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Lassen wir in (5.36) $x \to a$ und erhalten $b_0 = c_0$. Subtrahieren c_0 von den beiden Seiten von (5.36) und Dividieren durch $x - a$ ergibt

$$b_1 + b_2(x-a) + ... + b_n(x-a)^{n-1} = c_1 + c_2(x-a) + ... + c_{n-1}(x-a)^n + o\left((x-a)^{n-1}\right)$$

für $x \to a$, $x \neq a$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $b_k = c_k$ für alle $k = 1, ..., n$. ■

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome für $\sin x$ an $a = 0$. Wir haben die folgende Reihe für $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Zeigen wir, dass das Taylor-Polynom $T_{2n+1}(x)$ von $\sin x$ ist gleich die entsprechende partielle Summe:

$$S_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

In der Tat gilt es für $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned}
|\sin x - S_{2n+1}(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \\
&\leq |x|^{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \\
&\leq \text{const}\,|x|^{2n+3}
\end{aligned}$$

so dass

$$\sin x - S_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n+2}\right) \quad \text{für } x \to 0.$$

Nach dem Eindeutigkeit-Teil des Satzes 5.18 erhalten wir $T_{2n+1} = S_{2n+1}$ und somit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \quad \text{für } x \to 0.$$

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$ erhalten:

$$T_{2n,\cos}(x) = T_{2n+1,\sin}(x)' = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

woraus folgt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{für } x \to 0.$$

Wir erwähnen auch die folgende Taylor-Formel aus Aufgaben:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^{n+1}\right) \quad \text{für } x \to 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \quad \text{für } x \to 0.$$

Wir werden unterhalb die Taylorformel verbessern, indem wir eine bessere Abschätzung der Differenz $f(x) - T_x(x)$ beweisen. Diese Differenz heißt das *Restglied.*

Dafür brauchen wir eine Erweiterung von Mittelwertsatz.

Satz 5.19 *(*Erweiterter Mittelwertsatz von Cauchy) *Seien f, g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)). \tag{5.37}$$

Der Mittelwertsatz von Satz 5.10 (Mittelwertsatz von Lagrange) ist ein spezieller Fall von Satz 5.19 für $g(x) = x$ da in diesem Fall (5.37) wird

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Beweis. Betrachten wir die Funktion

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Offensichtlich gilt

$$h(b) - h(a) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$

so dass

$$h(a) = h(b).$$

Nach Satz 5.9 (Satz von Rolle) existiert ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

so erhalten wir (5.37). ■

Hauptsatz 5.20 (Taylor-Formel mit der Restgliedform nach Lagrange) *Sei $f(x)$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$. Dann, für alle $a, x \in I$, $x \neq a$, existiert ein $c \in (a, x)$ mit*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (5.38)$$

Für $n = 0$ wird (5.38) wir folgt

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a),$$

was nicht anderes als Mittelwertsatz von Lagrange (Satz 5.10) ist.

Satz 5.20 kann umformuliert werden als die folgende explizite Abschätzung des Restgliedes:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (5.39)$$

Zum Vergleich haben wir nach Satz 5.18

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a. \quad (5.40)$$

Die Darstellung des Restgliedes in der Form (5.39) heißt die *Restgliedform nach Lagrange*, und die Darstellung in der Form (5.40) heißt die *Restgliedform nach Peano*.

Beweis. Betrachten wir eine Hilfsfunktion

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) \quad (5.41)$$

wobei der Ausdruck in den Klammern das Taylor-Polynom von f an der Stelle t ist. Wir betrachten $x, a \in I$ als gegebene Werte, und t als eine Variable im Intervall $[a, x]$. Bemerken wir zunächst folgendes:

$$F(x) = 0 \quad \text{und} \quad F(a) = f(x) - T_n(x),$$

wobei $T_n(x) = T_{n,f}(x; a)$. Leiten wir jetzt jedes Glied in (5.41) ab:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' &= -\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= -\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k.\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{0!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - ... - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Alle Glieder in diesem Ausdruck lassen sich wegkürzen, außerhalb das letzte Glied. Somit erhalten wir

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \quad (5.42)$$

Betrachten wir auch die Funktion

$$G(t) = (x-t)^{n+1}$$

für $t \in [a,x]$. Für diese Funktion haben wir

$$G(x) = 0, \quad G(a) = (x-a)^{n+1}$$

und

$$G'(t) = -(n+1)(x-t)^{n+1}.$$

Anwendung des Mittelwertsatzes von Lagrange zu den Funktionen F und G ergibt folgendes: es existiert ein $c \in (a,x)$ mit

$$G'(c)(F(x) - F(a)) = F'(c)(G(x) - G(a)).$$

Einsetzen von den Werten von $F, G, F', G;$ ergibt

$$-(n+1)(x-c)^n (f(x) - T_n(x)) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n (x-a)^{n+1}.$$

Da $c \in (a,x)$ und somit $c \neq x$, so können wir durch $(n+1)(x-c)^n$ dividieren und somit (5.38) erhalten. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ und ihre Taylor-Polynome an 0

$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Nach Satz 5.20 haben wir

$$\sin x - T_4(x) = \frac{f^V(c)}{5!}x^5$$

für ein $c \in (0,x)$. Da $f^V(c) = \cos c$ und $|\cos c| \leq 1$, so erhalten wir die Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{x^5}{120}.$$

Zum Beispiel, für $x = 0.1$ erhalten wir

$$\sin 0,1 \approx T_4(0,1) = 0,1 - \frac{0,001}{6} = 0.0998333... ,$$

und der Approximationsfehler ist kleiner gleich

$$\frac{0.1^5}{120} = 8.333... \times 10^{-8} < 10^{-7}.$$

5.5.2 Konvexe Funktionen

Definition. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt *konvex* falls für alle $a, b \in I$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t) f(a) + tf(b). \tag{5.43}$$

Die Funktion f heißt *konkav* auf I falls für alle $a, b \in I$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t) f(a) + tf(b). \tag{5.44}$$

Diese Definition hat die folgende geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir

$$x = (1-t)a + tb \tag{5.45}$$

und beachten, dass

$$t \in (0,1) \Leftrightarrow x \in (a,b).$$

Es folgt aus (5.45)

$$t = \frac{x-a}{b-a},$$

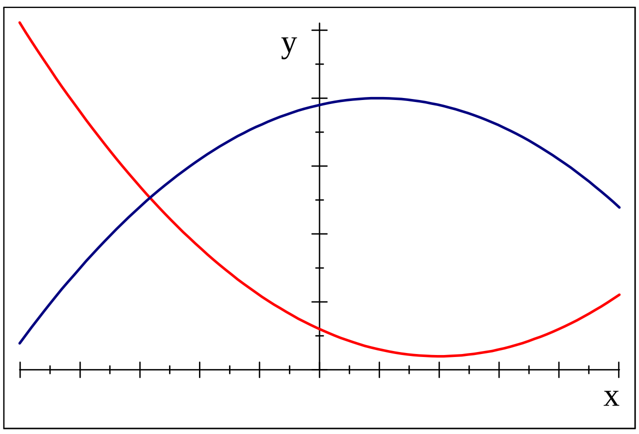
und (5.43) ist äquivalent zu

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Da die Funktion

$$x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

die Sekante zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ bestimmt, so ist die Bedingung (5.43) von Konvexität äquivalent zur Bedingung, dass der Graph der Funktion f auf (a,b) unter der Sekante liegt, für alle $a, b \in I$. Analog ist die Funktion f konkav, falls der Graph von f auf (a,b) über der Sekante liegt.



konvex - rot, konkav - blau

Satz 5.21 *Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Funktion f ist konvex auf I genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf I*

(b) *Funktion f ist konkav auf I genau dann, wenn $f'' \leq 0$ auf I*

A.Grigorian
Analysis 1
SS2012
13.07.12

Beweis. (a) Für beliebigen $a, b \in I$ mit $a < b$ und $t \in (0,1)$, setzen wir $x = (1-t)\,a + tb$ und schreiben die Definition (5.43) von Konvexität wie folgt um:

$$\begin{aligned}(1-t+t)\,f(x) &\leq (1-t)\,f(a) + tf(b) \\ (1-t)\,(f(x) - f(a)) &\leq t\,(f(b) - f(x)).\end{aligned}$$

Da $t = \frac{x-a}{b-a}$, so erhalten wir

$$\frac{b-x}{b-a}\,(f(x) - f(a)) \leq \frac{x-a}{b-a}\,(f(b) - f(x))$$

und

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}. \tag{5.46}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $a < x < b$ aus dem Intervall I. Umgekehrt, gilt (5.46) für alle $a < x < b$ im I, dann erhalten wir rückwärts die Konvexität (5.43). Deshalb ist (5.46) äquivalent zur Konvexität.

Sei f konvex und beweisen wir, dass $f'' \geq 0$. Lassen wir $x \to a$ in (5.46) und erhalten

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Analog lassen wir $x \to b$ in (5.46), und erhalten

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

Der Vergleich von den beiden Ungleichungen ergibt $f'(a) \leq f'(b)$, woraus folgt

$$f''(a) = \lim_{\substack{b \to a \\ b > a}} \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} \geq 0.$$

Jetzt beweisen wir die Rückrichtung: $f'' \geq 0$ auf I impliziert (5.46). Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange (Satz 5.10) haben wir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(c) \quad \text{and} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b-x} = f'(d)$$

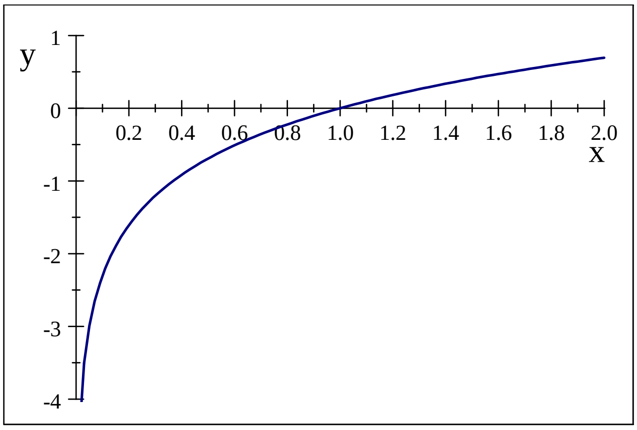
für ein $c \in (a,x)$ und ein $d \in (x,b)$. Es folgt, dass $c < d$. Da $(f')' = f'' \geq 0$, ist die Funktion f' monoton steigend nach Satz 5.12. Deshalb haben wir $f'(c) \leq f'(d)$, woraus (5.46) folgt.

(b) Diese Aussage folgt aus (a) da f konkav genau dann ist, wenn $-f$ konvex. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \ln x$ für $x > 0$. Da

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

so erhalten wir nach Satz 5.21, dass $\ln x$ konkav ist.



$\ln x$ ist konkav

Nach (5.44) gilt die folgende Ungleichung

$$\ln((1-t)a + tb) \geq (1-t)\ln a + t \ln b \tag{5.47}$$

für alle $a, b > 0$ und $t \in (0,1)$. Bezeichnen wit $p = \frac{1}{1-t}$ und $q = \frac{1}{t}$, so dass $p, q > 1$ und

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.48}$$

Es folgt aus (5.47), dass

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b = \ln\left(a^{1/p} b^{1/q}\right). \tag{5.49}$$

Für $x = a^{1/p}$, $y = b^{1/q}$ erhalten wir aus (5.49) die *Young-Ungleichung*

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy,$$

die für alle $x, y \geq 0$ and $p, q > 1$ mit (5.48) gilt.

Beispiel. Zeigen wir: ist f eine positive konkave Funktion, so ist $\frac{1}{f}$ konvex. Wir haben

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

und

$$\left(\frac{1}{f}\right)'' = -\left(\frac{f'}{f^2}\right)' = -\frac{f''f^2 - (f')^2}{f^4} = -\frac{f''}{f^2} + \frac{(f')^2}{f^4}.$$

Da $f'' \leq 0$, daraus folgt $\left(\frac{1}{f}\right)'' \geq 0$ und somit die Konvexität von f.

Die Umkehrung gilt nicht: die Funktion x^2 ist konvex, und die Funktion $\frac{1}{x^2}$ auf $(0, +\infty)$ ist auch konvex.

5.5.3 Lokale Extrema

Definition. Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall I und sei $a \in I$. Man sagt, dass a eine *lokale Maximumstelle* von f ist (bzw f hat an der Stelle a ein *lokales Maximum*) falls eine Umgebung $U \subset I$ von a existiert, so dass a eine Maximumstelle von f in U ist, d.h.

$$f(a) = \max_U f(x) \ .$$

Analog definiert man lokale Minimumstelle von f.

Man sagt, dass a eine *lokale Extremumstelle* von f ist, falls a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

Satz 5.22 (a) (*Notwendige Bedingung für locales Extremum*) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I. Ist $a \in I$ eine Extremumstelle von f, so gilt $f'(a) = 0$.*

(b) (*Hinreichende Bedingung für locales Extremum) Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I. Sei $f'(a) = 0$ für ein $a \in I$. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f. Gilt $f''(a) < 0$, so ist a eine lokale Maximumstelle von f.*

Bemerkung. Die Nullstellen von der Ableitung f' heißen auch die kritischen Punkte von Funktion f. Nach Satz 5.22 sind die lokalen Extremumstellen auch die kritischen Punkte, aber die Umkehrung gilt nicht immer. Zum Beispiel, die Funktion $f(x) = x^3$ hat nur einen kritischen Punkt $x = 0$, der keine lokale Extremumstelle ist.

Beweis. (a) Ist a eine lokale Maximumstelle, dass ist a eine Maximumstelle von f in einer Umgebung U von a. Nach Satz von Fermat (Satz 5.7) gilt $f'(a) = 0$. Gleiches gilt für eine lokale Minimumstelle.

(b) Nach der Taylor-Formel von Satz 5.18 haben wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R(x), \tag{5.50}$$

wobei $R(x) = o\left((x-a)^2\right)$ für $x \to a$, d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Ist $f''(a) > 0$, dann gibt es eine Umgebung $U \subset I$ von a mit

$$\left| \frac{R(x)}{(x-a)^2} \right| < \frac{f''(a)}{4} \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{a\},$$

woraus folgt

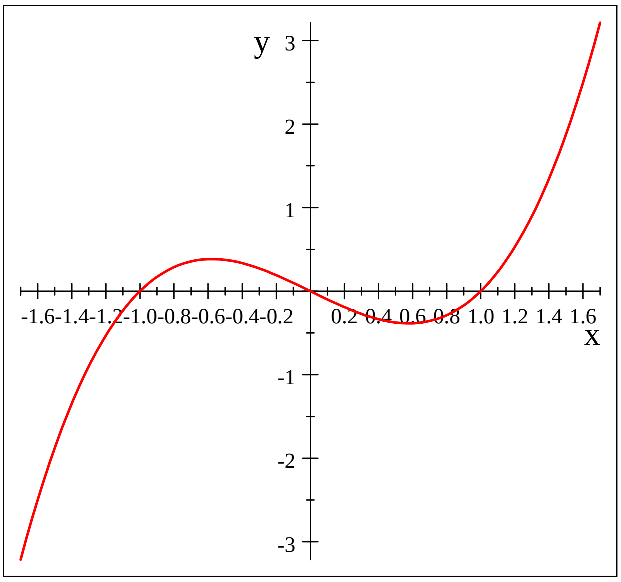
$$R(x) \geq -\frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 \text{ für alle } x \in U.$$

Da $f'(a) = 0$, so erhalten wir aus (5.50), dass für alle $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 \\ &\geq f(a) + \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 \\ &\geq f(a). \end{aligned}$$

Somit ist a eine Minimumstelle von f in U. Der Fall $f''(a) < 0$ wird analog behandelt. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - x$. Dann hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 1$ die Nullstellen $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $f''(x) = 6x$, so erhalten wir $f''(x_1) > 0$ und $f''(x_2) < 0$. Deshalb ist x_1 eine lokale Minimumstelle und x_2 – eine lokale Maximumstelle.



Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ hat zwei lokale Extremumstellen.

Bemerkung. Hat eine Funktion f auf einem Intervall I keine Extremumstelle, so ist f auf I monoton (anderenfalls hätte f zwei stellen $a < b$ in I mit $f(a) = f(b)$, und nach Extremwertsatz existierte eine Extremumstelle in (a, b)). Insbesondere ist f immer monoton zwischen zwei aufeinander folgenden Extremumstellen.

5.6 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von l'Hôspital

Nach der Rechenregel für lim gilt die Identität

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite existieren und ihrer Quotient bestimmt ist. Allerdings ist das nicht der Fall, wenn die beiden Grenzwerte gleich 0 oder gleich $\pm\infty$ sind. Man spricht in diesem Fall von der *unbestimmten Ausdrücken* $\frac{0}{0}$ bzw $\frac{\infty}{\infty}$. Häufig können diese Ausdrücke mit Hilfe von den folgenden Satz gelöst werden.

Satz 5.23 (Regel von l'Hôspital) *Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Grenze von I. Angenommen sei*

(a)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0, \tag{5.51}$$

(*b*)

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty. \tag{5.52}$$

Auch sei $g \neq 0$ und $g' \neq 0$ auf I. Falls gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \overline{\mathbb{R}}$$

so gilt auch

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{5.53}$$

Die Regel ist dann sehr einfach: um die unbestimmte Ausdrücke $\frac{0}{0}$ bzw $\frac{\infty}{\infty}$ zu lösen, sollen die Funktionen f und g in $\frac{f}{g}$durch ihre Ableitungen ersetzt werden.

Im Fall (b) erwarten man auch die Bedingung

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \tag{5.54}$$

aber sie ist nicht notwendig für die Gültigkeit des Satzes.

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Das ist unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Nach Satz 5.23 erhalten wir in den beiden Intervallen $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \tag{5.55}$$

Um rigorous zu sein, man soll die Gültigkeit der Gleichheiten in (5.55) rückwärts beweisen: da $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'}$ existiert und gleich 1 ist, so gilt nach Satz 5.23 auch $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Diese Bemerkung gilt auch für alle Anwendungen von der Regel von l'Hôspital.

2. Die Regel von l'Hôspital gilt nur wenn $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ unbestimmter Ausdruck ist. Betrachten wir, zum Beispiel, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x}$, dass kein unbestimmter Ausdruck ist und offensichtlich gleich 1 ist. Andererseits gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

und somit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x} \neq \lim_{x\to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'}.$$

3. Bestimmen wir $\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^2}$, was unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Versuchen wir die Regel von l'Hôspital benutzen:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\exp(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{2x}, \tag{5.56}$$

and erhalten, dass der Grenzwert in der rechten Seite auch unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Benutzen wir die Regel von l'Hôspital zu diesem Grenzwert und erhalten

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\exp(x))'}{(2x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{2} = +\infty. \tag{5.57}$$

Somit gilt nach zwei Anwendungen von der Regel von l'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = +\infty.$$

Analog beweist man per Induktion nach n, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \tag{5.58}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das gleiche Ergebnis kann man auch mit Hilfe von der Exponentialreihe erhalten.

4. Bestimmen wir $\lim_{x\to 0} x \ln x$ im Bereich $x > 0$. Da $x \to 0$ und $\ln x \to -\infty$, so haben wir unbestimmten Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$. Um ihn zu lösen, stellen wir den Grenzwert in der folgenden Form dar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x},$$

was unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Nach der Regel von l'Hôspital erhalten wir

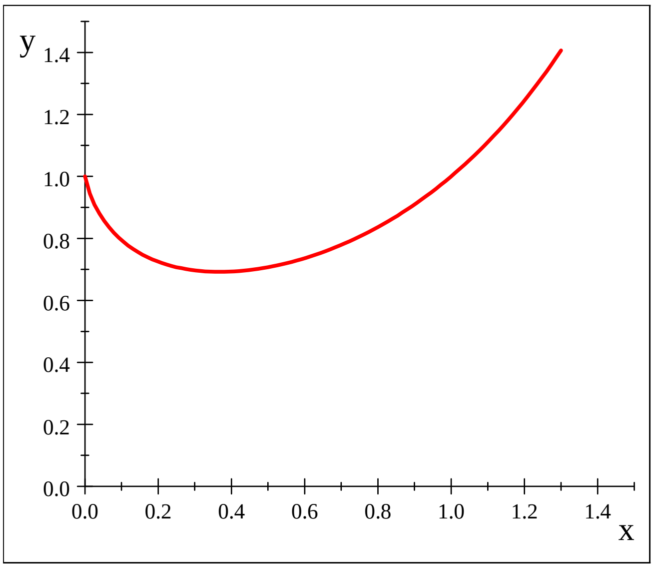
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

5. Bestimmen wir $\lim_{x\to 0} x^x$ im Bereich $x > 0$. Das ist unbestimmter Ausdruck der Form 0^0. Um ihn zu lösen, nehmen wir den Logarithmus von der Funktion x^x:

$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x = 0,$$

wo wir das vorige Beispiel benutzt haben. Nach Satz 4.3 erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(\ln x^x) = \lim_{y\to 0} \exp(y) = 1.$$



Funktion $f(x) = x^x$

6. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

was unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ ist. Der Logarithmus der gegebenen Funktion ist

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

was unbestimmter Ausdruck der Form $\infty\cdot 0$ ist. Dann erhalten wir mit Hilfe von Wechsel $y=\frac{1}{x}$ und Regel von l'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\ln(1+y))'}{(y)'}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y}}{1}=1$$

woraus folgt

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Beweis von Satz 5.23. (a) Zunächst betrachten wir den Fall $a\in\mathbb{R}$. Definieren wir die Funktionen f und g an der Stelle a indem wir $f(a)=g(a)=0$ setzen. Dann sind die Funktionen f und g stetig auf dem Intervall $I\cup\{a\}$. Nach Mittelwertsatz von Cauchy gilt folgendes: für jedes $x\in I$ existiert ein $c\in(x,a)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Da

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=b,$$

es folgt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b.$$

Sei jetzt $a=+\infty$. Dann sind die Funktionen $t\mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ und $t\mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ definiert auf einem Intervall $(0,\delta)$ mit $\delta>0$. Anwendung den obigen Fall der Regel von

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{t}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=b.$$

Der Fall $a=-\infty$ ist analog.

(b) Sei a die rechte Grenze von I, und nehmen wir auch an, dass $b\in\mathbb{R}$ (die Fälle wenn a die linke Grenze von I ist bzw $b=\pm\infty$ werden analog behandelt). Der Mittelwertsatz von Cauchy ergibt folgendes: für alle $y<x$ aus I existiert ein $c\in(y,x)$ mit

$$f'(c)(g(x)-g(y))=g'(c)(f(x)-f(y)).$$

Nach Voraussetzung gilt $g'(c) \neq 0$. Auch gilt $g(x) \neq g(y)$, weil anderenfalls nach Satz von Rolle (Satz 5.9) die Ableitung g' eine Nullstelle hat. Dividieren durch $g'(c)(g(x) - g(y))$ ergibt

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}},$$

woraus folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{5.59}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = b,$$

d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von a mit

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - b \right| < \varepsilon \text{ für alle } z \in I \cap U.$$

Für $x, y \in U \cap I$ gilt auch $c \in U \cap I$ woraus folgt

$$b - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < b + \varepsilon.$$

Betrachten wir eine Folge $\{x_k\}$ in (y, a) mit $x_k \to a$ für $k \to \infty$ und setzen in (5.59) $x = x_k$. Da $g(x_k) \to \pm\infty$, erhalten wir, dass

$$\frac{g(y)}{g(x_k)} \to 0 \text{ und } \frac{f(y)}{g(x_k)} \to 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \leq b + \varepsilon$$

und

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \geq b - \varepsilon.$$

Da diese Ungleichungen für alle $\varepsilon > 0$ gelten, so erhalten wir

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \liminf_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = b,$$

woraus folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

■

Beispiel. Mit Hilfe von der Regel von l'Hôspital erhalten wir auch einen einfachen Beweis von Taylorformel:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - a)^n) \text{ für } x \to a$$

(Satz 5.18). Induktionsanfang für $n = 1$ ist genauso wie im früheren Beweis.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Da das $(n-1)$-te Taylor-Polynom von $f'(x)$ gleich $T_n'(x)$ ist, erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung

$$f'(x) - T_n'(x) = o\left((x-a)^{n-1}\right) \text{ für } x \to a,$$

d.h.

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Nach der Regel von l'Hôspital gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

was zu beweisen war.