Analysis II

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

Summary

Contents

Chapter 9

Differentialrechnung: höhere Ableitungen

9.1 Höhere Ableitungen

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (oder die n-te Ableitung) wird per Induktion wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f \quad \text{und} \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ in J definiert und differenzierbar ist.

Definition. Die Funktion f heißt n fach differenzierbar in J falls $f^{(n)}$ in J existiert (insbesondere müssen auch $f^{(k)}$ für alle $k \leq n$ existieren). Die Funktion f heißt unendlich oft differenzierbar in J, falls $f^{(n)}$ in J für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

9.2 Taylorformel mit Peano-Restglied

Lemma 9.1 Für jedes Polynom f von Grad $\leq n$ gilt für alle $a, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k . \end{aligned} \tag{9.1}$$

Hauptsatz 9.2 *(Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano)* Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)} \tag{9.2}$$

für $x \to a$. Umgekehrt, gilt für einige $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \tag{9.3}$$

für $x \to a$, so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$.

9.3 Taylorformel mit Lagrange-Restglied

Hauptsatz 9.3 *(Taylorformel mit der Restgliedform nach Lagrange)* Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann, für alle $a, x \in J$, $x \neq a$, gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^{n} \quad (9.4)$$

für ein c zwischen a und x (d.h. $c \in (a, x)$ oder $c \in (x, a)$).

Chapter 10

Integralrechnung: unbestimmtes Integral

10.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition. Gilt $F' = f$ auf einem Intervall J, so heißt die Funktion F eine *Stammfunktion* von f auf J.

Satz 10.1 Jede stetige Funktion auf einem Interval J hat eine Stammfunktion auf diesem Intervall.

Satz 10.2 Ist F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J, so hat jede Stammfunktion von f die Form $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.

Definition. Die Menge von allen Stammfunktionen von $f(x)$ wird mit

$$\int f(x)\,dx$$

bezeichnet ("Integral von f von x dx"). Dieser Ausdruck heißt auch *unbestimmtes* Integral von f. Nach dem Satz 10.2 ist $\int f(x)\,dx$ eine Funktion plus beliebige Konstante.

Definition. Für differenzierbare Funktion F heißt der Ausdruck $F'(x)\,dx$ das *Differential* von F und wird mit dF bezeichnet, d.h.

$$dF = F'(x)\,dx, \tag{10.1}$$

wobei dx eine unabhängige Variable ist, die das Differential von x heißt.

10.2 Linearität des unbestimmten Integrale

Satz 10.3 Seien f und g zwei stetige Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt

$$\int (f+g)\,dx = \int f dx + \int g dx. \tag{10.2}$$

Auch für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\int af dx = a \int f dx.$$

10.3 Partielle Integration

Satz 10.4 Seien u, v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J. Dann gilt auf diesem Intervall die Identität

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{10.3}$$

10.4 Substitutionsregel

Satz 10.5 Sei f eine Funktion mit der Stammfunktion F auf einem Intervall I, d.h.

$$\int f(y)\, dy = F(y) + C. \tag{10.4}$$

Sei u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) \subset I$. Dann gilt auf J

$$\int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C. \tag{10.5}$$

10.5 Integration von rationalen Funktionen

Chapter 11

Integralrechnung: bestimmtes Integral

11.1 Riemann-Integral

Definition. Eine *Zerlegung* von dem Intervall $[a, b]$ ist jede endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir bezeichnen eine Zerlegung mit Z, d.h. Z ist die ganze Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ wie oberhalb.

Definition. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit den Zwischenstellen ξ definieren wir die *Riemann-Summe* mit

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

wobei

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}.$$

Definition. Wir schreiben

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi) = A$$

mit einem $A \in \mathbb{R}$, fall für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für jede Zerlegung Z mit $\varphi(Z) < \delta$ und für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z gilt

$$|S(f, Z, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Definition. Eine Funktion f auf $[a, b]$ heißt *Riemann-integrierbar* falls der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

11.2 Darboux-Integrierbarkeit

Definition. Funktion f heißt *Darboux-integrierbar* wenn

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right) = 0, \tag{11.1}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall Z \ \text{ mit } \ \varphi(Z) < \delta \text{ gilt } \left|S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right| < \varepsilon.$$

Satz 11.1 Sei f eine Funktion auf $[a,b]$. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:

(a) Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(b) Funktion f ist Darboux-integrierbar.

(c) Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z)$ und $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z)$ existieren (in $\mathbb{R}$) und sind gleich.

Darüber hinaus unter jeder von Bedingungen $(a),(b),(c)$ gelten die Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z) = \int_a^b f(x)\,dx = \sup_Z S_*(f,Z) = \inf_Z S^*(f,Z). \tag{11.2}$$

Definition. Die Funktion f heißt integrierbar fall f eine ($\Leftrightarrow$jede) von den Bedingungen $(a),(b),(c)$ erfüllt ist.

11.3 Integrierbare Funktionen

Korollar 11.2 *(Notwendige Bedingung für Integrabilität)* Ist eine Funktion f auf $[a,b]$ integrierbar, so ist f auf $[a,b]$ beschränkt.

Satz 11.3 *(Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)*
(a) Jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar..
(b) Jede monotone Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *gleichmäßig* stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in J\ \forall y \in J \text{ mit } |x-y| < \delta \ \text{ gilt } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{11.3}$$

Lemma 11.4 Ist $f(x)$ stetig auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall J, so ist f auf J gleichmäßig stetig.

11.4 Fundamentalsatz der Analysis, 1

Hauptsatz 11.5 *(Fundamentalsatz der Analysis: Newton-Leibniz-Formel)* Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von f auf diesem Intervall. Dann gilt die Identität

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}. \tag{11.4}$$

11.5 Weitere Eigenschaften vom bestimmten Integral

Satz 11.6 *(Linearität vom bestimmten Integral)* Sind die Funktionen f und g integrierbar auf einem Intervall $[a, b]$, so ist auch $f + g$ integrierbar und

$$\int_a^b (f+g)\, dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx. \tag{11.5}$$

Auch für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf integrierbar und

$$\int_a^b (cf)\, dx = c \int_a^b f dx. \tag{11.6}$$

Satz 11.7 *(Partielle Integration im bestimmten Integral)* Für stetig differenzierbare Funktionen u, v auf einem Intervall $[a, b]$ gilt

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du. \tag{11.7}$$

Satz 11.8 *(Additivität)* Sei f eine integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$. Dann, für jedes $c \in (a, b)$, ist f auf den Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \tag{11.8}$$

Korollar 11.9 Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J. Dann für alle $a, b, c \in J$ gilt *(11.8)*.

11.6 Integration und Ungleichungen

Satz 11.10 Seien f und g integrierbare Funktionen auch einem Intervall $[a, b]$, $a < b$.

(*a*) *(Monotonie)* Gilt $f \geq g$ auf $[a, b]$ so gilt auch

$$\int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx. \tag{11.9}$$

(*b*) *(LM-Ungleichung)* Es gilt

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f. \tag{11.10}$$

Korollar 11.11 Sei $a < b$ und sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f|\, dx. \tag{11.11}$$

Satz 11.12 *(Mittelwertsatz für Integration)* Ist f stetig auf $[a,b]$, $a < b$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a). \tag{11.12}$$

11.7 Fundamentalsatz der Analysis, 2

Hauptsatz 11.13 *(Fundamentalsatz der Analysis: Existenz der Stammfunktion)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann für jedes $c \in J$ ist die Funktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion von f auf J. Insbesondere hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Korollar 11.14 Für jede stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ existiert eine Stammfunktion F auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

11.8 Substitutionsregel

Satz 11.15 *(Substitutionsregel im bestimmten Integral)* Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I und $u : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a,b]$ mit $a < b$ so dass die Komposition $f(u(x))$ auf $[a,b]$ definiert ist. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy.} \tag{11.13}$$

Korollar 11.16 *(Inverse Substitution)* Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall $I = [A,B]$ mit $A < B$ und $u : J \to I$ eine streng monotone stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) = I$. Dann gilt

$$\boxed{\int_A^B f(x)\, dx = \int_{u^{-1}(A)}^{u^{-1}(B)} f(u(t))\, du(t).} \tag{11.14}$$

11.9 Länge von Kurve

Definition. Das Bild $K = \varphi(J)$ einer stetigen Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve.* Die Abbildung φ heißt die *Parametrisierung* der Kurve K, und das Paar (K, φ) heißt *parametrisierte Kurve.* Die Variable t heißt der Parameter.

Definition. Seien $J = [\alpha, \beta]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall mit $\alpha < \beta$ und $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Definieren wir die *Länge* $L(K, \varphi)$ der parametrisierten Kurve (K, φ) mit

$$\boxed{L(K,\varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2} dt}. \tag{11.15}$$

Satz 11.17 Unter d.o.g. Bedingungen sei die Funktion u monoton und surjektiv (d.h. $u(I) = J$). Dann bestimmen φ und ψ die gleiche Kurve $K = \varphi(J) = \psi(I)$, und die parametrisierten Kurven (K, φ) und (K, ψ) haben die gleichen Längen, d.h.

$$L(K,\varphi) = L(K,\psi).$$

11.10 * Wallis-Produkt

Satz 11.18 Es gelten die Äquivalenzen

$$\int_0^\pi \sin^n x dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für } n \to \infty \tag{11.16}$$

and

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n} \quad \text{für } n \to \infty. \tag{11.17}$$

11.11 * Stirling-Formel

Hauptsatz 11.19 Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } \; n \to \infty. \tag{11.18}$$

Chapter 12

Konvergenz von Integralen

12.1 Uneigentliches Riemann-Integral

Definition. Sei f eine Funktion auf einem beliebigen Intervall J. Die Funktion f heißt *lokal integrierbar auf* J falls f auf jedem abgeschlossen beschränkten Intervall $I \subset J$ Riemann-integrierbar ist.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall $[a, b)$ mit $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dann definieren wir das *uneigentliche* Riemann-Integral von f mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{b-} f(x)\, dx := \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx, \tag{12.1}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert als Element von $\overline{\mathbb{R}}$. Die Notation $c \to b-$ bedeutet, dass $c < b$ und $c \to b$; insbesondere ist das Riemann-Integral $\int_a^c f(x)\, dx$ wohldefiniert.

Ist der Grenzwert in (12.1) endlich, so sagt man, dass das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ an der Grenze b konvergiert.

Ist der Grenzwert unendlich, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b bestimmt divergiert.

Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das Integral an b unbestimmt divergiert. Im letzten Fall ist der Wert des Ausdrucks $\int_a^b f(x)\, dx$ nicht definiert.

Die Grenze b für das uneigentliche Integral in (12.1) heißt *kritisch*.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem linksoffenen Intervall $(a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < +\infty$. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+}^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\, dx, \tag{12.2}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Die Notation $c \to a+$ bedeutet, dass $c > a$ und $c \to a$. Die Grenze a für das uneigentliche Integral (12.2) heißt kritisch.

Satz 12.1 Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so stimmen die drei Werte von $\int_a^b f(x)\, dx$ überein.

Satz 12.2 *(Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral)* Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem halboffenen Intervall $J = [a, b)$ oder $J = (a, b]$. Sei F eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b\,,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Satz 12.3 *(Partielle Integration)* Seien u und v stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b)$ oder $J = (a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du \tag{12.3}$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist (d.h. der Wert $[uv]_a^b$ und das uneigentliche Integral $\int_a^b v du$ existieren und deren Differenz wohldefiniert ist).

Satz 12.4 *(Substitutionsregel)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Sei $u : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b)$. Nehmen wir an, dass der Wert $u(b-)$ existiert. Dann gilt

$$\int_a^b f(u(x))\,du(x) = \int_{u(a)}^{u(b-)} f(y)\,dy, \tag{12.4}$$

vorausgesetzt, dass mindestens eines von zwei Integralen wohldefiniert ist.

Im Fall $J = (a, b]$ gilt analog

$$\int_a^b f(u(x))\,du(x) = \int_{u(a+)}^{u(b)} f(y)\,dy, \tag{12.5}$$

vorausgesetzt, dass $u(a+)$ und mindestens eines von zwei Integralen wohldefiniert ist.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Integral (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Definieren wir das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit zwei kritischen Grenzen a, b wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+}^{b-} f(x)\,dx := \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b-} f(x)\,dx, \tag{12.6}$$

wobei $c \in (a, b)$, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale in der rechten Seite existieren als uneigentliche Integrale mit einer kritischen Grenze und deren Summe auch wohldefiniert ist.

Satz 12.5 *(Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen)* Seien $f(x)$ eine stetige Funktion auf (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und F eine Stammfunktion von f auf (a, b). Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b\,,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

12.2 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen

Satz 12.6 Sei f eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a,b) mit $-\infty \le a < b \le +\infty$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit dem Wert in $[0,+\infty]$. Insbesondere ist $\int_a^b f(x)\,dx$ genau dann konvergent, wenn

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty.$$

Satz 12.7 *(Integralkriterium für Konvergenz von Reihen)* Sei $f(x)$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion auf $[m,+\infty)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Äquivalenz

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \iff \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty.$$

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf (a,b). Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent*, falls $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent ist, d.h.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Satz 12.8 Ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{12.7}$$

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf (a,b), die im (a,b) nicht verschwinden. Man sagt, dass $f(x)$ äquivalent zu $g(x)$ für $x \to b-$ ist und schreibt

$$f(x) \sim g(x) \text{ für } x \to b-,$$

falls

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ für } x \to b-.$$

Analog definiert man die Äquivalenz

$$f(x) \sim g(x) \text{ für } x \to a+.$$

Lemma 12.9 (a) Die Relation $f \sim g$ für $x \to b-$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Gelten $f_1 \sim g_1$ und $f_2 \sim g_2$ für $x \to b-$ so gelten auch $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ für $x \to b-$.

(c) Es gilt $f \sim g$ genau dann wenn $f(x) = g(x) + o(g(x))$ für $x \to b-$.

Definition. Seien f, g zwei Funktionen auf (a, b) und $g(x) > 0$. Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b-$$

und sagt "$f(x)$ ist groß O von $g(x)$ für $x \to b-$" falls für ein $c \in (a, b)$ und ein $C > 0$ gilt

$$|f(x)| \leq C g(x)$$

for alle $x \in (c, b)$. Äquivalente Definition:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b \text{ falls } \limsup_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$$

Satz 12.10 Seien $f(x)$ und $g(x)$ lokal integrierbare Funktionen auf $[a, b)$. Sei g positiv auch diesem Intervall.

(a) *(Majorantenkriterium)* Gelten $f(x) = O(g(x))$ für $x \to b-$ und $\int_a^b g(x)\,dx < \infty$, so ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent.

(b) *(Vergleichskriterium)* Sei auch f positiv. Gilt $f(x) \sim g(x)$ für $x \to b-$ so sind die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^b g(x)\,dx$ gleichzeitig konvergent bzw divergent.

12.3 Bedingte Konvergenz

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *bedingt konvergent* falls es konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Satz 12.11 Seien f und g stetige Funktionen auf $[a, +\infty)$. Sei $g(x)$ zusätzlich stetig differenzierbar und monoton auf $[a, +\infty)$. Dann das Integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\,dx \tag{12.8}$$

konvergiert falls eine von den folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

(a) *(Abel-Kriterium)* Das Integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ist konvergent und $g(x)$ ist beschränkt.

(b) *(Dirichlet-Kriterium)* Die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist auf $[a, +\infty)$ beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$.

12.4 * Alternative Definition von Elementarfunktionen

12.5 * Gammafunktion

Definition. Definieren wir die *Gammafunktion* $\Gamma(x)$ für jedes $x > 0$ mit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{12.9}$$

Lemma 12.12 Das Integral *(12.9)* konvergiert für alle $x > 0$.

Lemma 12.13 Für alle $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

12.6 * Dirichlet-Integral

Chapter 13

Gleichmäßige Konvergenz von Reihen

13.1 Funktionenfolgen

Definition. Man sagt, dass die Folge $\{f_k\}$ gegen eine Funktion f *punktweise auf* J konvergiert falls für jedes $x \in J$ gilt $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$, d.h.

$$\forall x \in J \quad |f_k(x) - f(x)| \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Die punktweise Konvergenz bezeichnet man mit $f_k \to f$.

Definition. Man sagt, dass $\{f_k\}$ gegen f *gleichmäßig auf* J konvergiert, falls

$$\|f_k - f\| \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet man mit $f_k \rightrightarrows f$.

Satz 13.1 Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Gilt $f_k \rightrightarrows f$ auf J so ist f auch stetig auf J.

13.2 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert auf J punktweise bzw gleichmäßig falls die Folge $\{F_n\}$ von Partialsummen punktweise bzw gleichmäßig auf J konvergiert.

Satz 13.2 *(Weierstraßsches Majorantenkriterium; auch Weierstraßscher M-*Test*)* Sei $\{f_k\}$ eine Funktionenfolge auf J mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ auf J absolut und gleichmäßig.

Definition. Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen auf einem Intervall J. Die Folge $\{f_k\}$ konvergiert auf J *lokal gleichmäßig*, falls diese Folge auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert. Konvergiert $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig gegen f, so schreibt man $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Analog konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf J lokal gleichmäßig falls diese Reihe auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 13.3 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall J. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig auf J, so ist der Grenzwert $f(x) = \lim f_k(x)$ stetig auf J. Die ähnliche Eigenschaft gilt auch für die Reihen: die Summe einer lokal gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist stetig.

13.3 Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{13.1}$$

Satz 13.4 Angenommen, dass die Potenzreihe *(13.1)* für ein $x = x_0 \neq 0$ konvergent ist. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig auf dem Intervall $(-R, R)$ mit $R = |x_0|$. Folglich ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine stetige Funktion auf $(-R, R)$.

Definition. Der Wert

$$R := \sup\left\{|x| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ konvergiert}\right\} \in [0, +\infty] \tag{13.2}$$

heißt der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Das Intervall $(-R, R)$ heißt das *Konvergenzintervall* der Reihe.

Satz 13.5 Für den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gilt die folgende Formel von *Cauchy-Hadamard*:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{13.3}$$

Satz 13.6 *(Satz von Abel)* Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist stetig in jedem Punkt $x = x_0 \neq 0$ wo die Reihe konvergiert.

13.4 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.7 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Konvergiert f_n gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine Funktion f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.4}$$

Korollar 13.8 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen auf $[a, b]$ Funktionen. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ so gilt

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx. \tag{13.5}$$

Satz 13.9 Sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergent auf einem Intervall $(-R, R)$ mit $R > 0$ (insbesondere kann R der Konvergenzradius sein). Dann gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}. \tag{13.6}$$

13.5 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.10 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass

- $f_k \to f$ punktweise auf J;
- $f_k' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ auf J.

Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

Korollar 13.11 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass

- die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist auf J punktweise konvergent;
- die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ ist auf J lokal gleichmäßig konvergent.

Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'. \tag{13.7}$$

Satz 13.12 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

in $(-R, R)$ unendlich oft differenzierbar, es gilt in $(-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \tag{13.8}$$

und der Konvergenzradius der Reihe *(13.8)* ist auch R.

13.6 Taylorreihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \tag{13.9}$$

Definition. Die Reihe (13.9) heißt die *Taylorreihe* der Funktion f an der Stelle 0 (oder *Macklaurin-Reihe*).

Hauptsatz 13.13 *(Taylorformel mit Integralrestglied)* Sei f eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Dann gilt für jedes $x \in J$

$$f(x) = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{13.10}$$

Korollar 13.14 Sei f unendlich oft differenzierbar im Intervall J mit $0 \in J$. Sei $x \in J$. Die Identität

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{13.11}$$

gilt genau dann wenn $R_n(x) \to 0$.

13.7 * Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz

Satz 13.15 *(Satz von der majorisierten Konvergenz)* Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b) die lokal gleichmäßig auf (a,b) gegen f konvergiert. Sei g eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) mit

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty. \tag{13.12}$$

Gilt für alle k

$$|f_k| \le g \quad \text{auf} \quad (a,b) \tag{13.13}$$

so gilt

$$\int_a^b f_k(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{für } k \to \infty. \tag{13.14}$$

Korollar 13.16 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b). Angenommen seien die folgenden Bedingungen:

(a) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf (a,b);

(b) es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le g(x)$ wobei g eine lokal integrierbare nichtnegative Funktion auf (a,b) mit

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx. \tag{13.15}$$

Satz 13.17 *(Satz von Dini)* Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall J die punktweise gegen eine stetige Funktion f auf J konvergiert. Dann gilt auch die gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf J.

Satz 13.18 *(Sätze von der monotonen Konvergenz)*
(a) Sei $\{f_n\}$ eine monoton steigende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a, b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a, b) punktweise konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{13.16}$$

(b) Sei $\{f_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a, b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a, b) punktweise konvergiert. Gilt für ein m

$$\int_a^b f_m(x)\,dx < \infty, \tag{13.17}$$

so gilt (13.16).

13.8 * Gauss-Integral

Satz 13.19 Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{13.18}$$

Lemma 13.20 Für die Funktion $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ auf $(0, +\infty)$ ist monoton steigend und konvergiert gegen e für $t \to +\infty$.

Korollar 13.21 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

13.9 * Approximationssatz von Weierstraß

Hauptsatz 13.22 Für jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall J gibt es eine Folge von Polynomen $\{P_n\}$ mit $P_n \rightrightarrows f$ auf J für $n \to \infty$.

13.10 * Fourier-Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{13.19}$$

Lemma 13.23 Let the Fourier series *(13.19)* converge uniformly on $\mathbb{R}$ to a function $f(x)$. Then, for all k,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{and} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{13.20}$$

Definition. For any Riemann integrable function f on $[0, 2\pi]$, define its *Fourier coefficients* by

$$\boxed{a_k = a_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\ dx} \text{ and } \boxed{b_k = b_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\ dx} \tag{13.21}$$

for all integers $k \geq 0$. The Fourier series of function f is the series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Definition. For any complex valued integrable function f on $[0, 2\pi]$, define its *complex Fourier coefficients* for all $k \in \mathbb{Z}$ by

$$\boxed{c_k = c_k(f) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx}. \tag{13.22}$$

The complex Fourier series of f is the series

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Lemma 13.24 The complex Fourier series coincides with the Fourier series provided the both converge.

Hauptsatz 13.25 Let f be an 2π-periodic integrable function that is right and left differentiable at some $x \in \mathbb{R}$. Then the Fourier series of f at x converges to $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. If in addition $f(x)$ is continuous at x then the Fourier series of f at x converges to $f(x)$.

Chapter 14

Metrische Räume und stetige Abbildungen

14.1 Abstandsfunktion

Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* (=Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (somit $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$).

2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

3. Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist d eine Metrik auf X, so heißt das Paar (X, d) *metrischer Raum.*

Definition. Sei V eine Menge wo die folgenden zwei Operationen definiert werden: Addition

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R},\ x \in V \mapsto \lambda x \in V$$

Die Menge V mit diesen Operationen heißt Vektorraum über $\mathbb{R}$ falls die folgenden Axiome erfüllt werden:

1. Nullvektor: es gibt ein $0 \in V$ mit $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in V$.

2. Das inverse Element: für jedes $x \in V$ existiert ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

3. Assoziativgesetz für Addition: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Kommutativgesetz für Addition: $x + y = y + x$.

5. Skalarmultiplikation mit 1: $1x = x$ für alle x.

6. Assoziativgesetz für Skalarmultiplikation: $(\lambda\mu)\,x = \lambda\,(\mu x)$.

7. Distributivgesetz für Addition von Skalaren: $(\lambda + \mu)\,x = \lambda x + \mu x$.

8. Distributivgesetz für Addition von Vektoren: $\lambda\,(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Die Operationen Addition und Skalarmultiplikation heißen zusammen *lineare Operationen.*

Definition. Eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V heißt *Norm* falls sie die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $N(x) \geq 0$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (somit $N(x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$).

2. Absolute Homogenität: $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in V$.

3. Dreiecksungleichung: $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Das Paar (V, N) heißt *normierter* Vektorraum.
Die übliche Notation von Norm ist $\|x\|$ anstatt $N(x)$.

14.2 Die p-Norm in $\mathbb{R}^n$

Definition. Für jedes $1 \leq p < \infty$ definieren wir die *p-Norm* in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{14.1}$$

Satz 14.1 *(Hölder-Ungleichung)* Für alle $p, q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{14.2}$$

gilt die folgende Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{14.3}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Satz 14.2 *(Minkowski-Ungleichung)* Die p-Norm erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{14.4}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Folglich ist die p-Norm eine Norm in $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in [1, \infty)$.

14.3 Metrische Kugel

Definition. Für jedes $z \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene Kugel* $U_r(z)$ mit Zentrum z und Radius r wie folgt:

$$U_r(z) = \{x \in X : d(x,z) < r\}.$$

Definieren wir auch die *abgeschlossene Kugel* mit

$$\overline{U}_r(z) = \{x \in X : d(z,x) \leq r\}.$$

Lemma 14.3 Seien $U_r(x)$ und $U_s(y)$ zwei Kugeln im metrischen Raum (X,d).
(a) Gilt $d(x,y) \geq r+s$ so sind die Kugeln disjunkt.
(b) Gilt $d(x,y) \leq r-s$, so gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.

14.4 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus X *konvergiert* gegen ein $a \in X$ falls $d(x_n,a) \to 0$ für $n \to \infty$. Der Punkt a heißt der Grenzwert (=Limes) der Folge $\{x_n\}$ und man schreibt $d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a$ oder $x_n \xrightarrow{d} a$.

14.5 Stetige Abbildungen

Definition. Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Seien $a \in X$ und $b \in Y$. Man schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \to b \quad \text{für } x \to a \tag{14.5}$$

($f(x)$ konvergiert gegen b für $x \to a$) falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \text{s.d.} \ \forall x \in X \setminus \{a\} \ \ \text{mit} \ \ d_X(x,a) < \delta \text{ gilt } d_Y(f(x),b) < \varepsilon. \tag{14.6}$$

Der Punkt b heißt der Grenzwert (=Limes) von $f(x)$ für $x \to a$.

Lemma 14.4 Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent.

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$

(ii) Für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{d_X} a$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} b$.

Definition. Seien X und Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* in $a \in X$ falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definition. Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig falls sie in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Lemma 14.5 Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in $a \in X$ genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.

Korollar 14.6 Sind die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ (oder $f, g : X \to \mathbb{C}$) stetig in $a \in X$ so sind $f + g$, fg, f/g auch stetig in a sind (im Fall f/g vorausgesetzt, dass $g \neq 0$).

14.6 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition. Eine Menge $V \subset X$ heißt *offen* falls für jedes $x \in V$ existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x) \subset V$. Eine Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen* falls das Komplement $X^c := X \setminus F$ offen ist.

Satz 14.7 Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums.

(a) Die Vereinigung von beliebigen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.

(b) Der Schnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen.

(c) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

(d) Der Schnitt von beliebigen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

(e) Eine Menge V ist offen genau dann, wenn V eine Vereinigung von offenen metrischen Kugeln ist.

(f) Eine Menge F ist abgeschlossen genau dann, wenn jede konvergente Folge aus F den Grenzwert auch in F hat.

Satz 14.8 Seien X, Y zwei metrischen Räumen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das J $f^{-1}(V)$ eine offene Menge in X ist.

(b) f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset Y$ das J $f^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge in X ist.

Korollar 14.9 Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen von metrischen Räumen. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ stetig.

14.7 Äquivalente Normen

Definition. Seien N_1 und N_2 zwei Normen in V. Man sagt, dass N_1 und N_2 äquivalent sind, falls es die positiven Konstanten c, C gibt mit

$$cN_1(x) \le N_2(x) \le CN_1(x) \tag{14.7}$$

für alle $x \in V$.

Satz 14.10 Seien N_1 und N_2 zwei äquivalente Normen in V. Seien d_1 und d_2 die von N_1 bzw N_2 induzierten Metriken auf V, d.h.

$$d_1(x,y) = N_1(x-y) \quad \text{und } d_2(x,y) = N_2(x-y).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Die Begriffe von der Konvergenz von Folgen in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

(b) Die Topologien in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

(c) Die Begriffe von stetigen Abbildung von V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

Satz 14.11 Alle p-Normen in $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$ sind äquivalent.

14.8 Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Schwarz in X konvergent ist.

Definition. Ein normierter Vektorraum (V, N) heißt vollständig falls der metrische Raum (V, d) mit der induzierten Metrik $d(x,y) = N(x-y)$ vollständig ist. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banachraum*.

Satz 14.12 Sei S beliebige nicht-leere Menge. Der normierte Vektorraum $B(S)$ von allen reellwertigen beschränkten Funktionen auf S mit der sup-Norm ist ein Banachraum.

Korollar 14.13 Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum bezüglich jeder p-Norm, $p \in [1, \infty]$.

Korollar 14.14 Der Raum $C[a,b]$ von allen reellwertigen stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ ist ein Banachraum bezüglich der sup-Norm.

14.9 Fixpunktsatz von Banach

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von f falls $f(x) = x$.

Definition. Eine Selbstabbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt *Kontraktionsabbildung* falls es eine Konstante $q \in (0, 1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{14.8}$$

Hauptsatz 14.15 *(Fixpunktsatz von Banach)* Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktionsabbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Lemma 14.16 Gilt für eine Folge $\{x_n\}$ in einem metrischen Raum

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C q^n, \tag{14.9}$$

wobei $C > 0$ und $q \in (0, 1)$, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge.

14.10 Kompakte Mengen und Extremwertsatz

Definition. Eine *Überdeckung* von K ist ein Mengensystem $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ von Teilmengen von X, die K überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_\alpha,$$

wobei S eine beliebige Indexmenge ist. Sei T eine Teilmenge von S. Die Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in T}$ heißt *Teilüberdeckung* von $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ falls sie auch K überdeckt. Die Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ heißt *offen* falls alle V_α offene Teilmengen von X sind.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt* falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Satz 14.17 Seien X und Y zwei metrische Räume spaces und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt so ist auch das Bild $f(K) \subset Y$ kompakt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *beschränkt* falls sie in einer metrischen Kugel liegt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *totalbeschränkt* falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln von Radius ε gibt.

Definition. Sei K eine Teilmenge von X. Jede endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten von X heißt *ε-Netz* von K falls es für jedes $x \in K$ ein $i = 1, ..., n$ mit $d(x, x_i) < \varepsilon$ gibt. Äquivalent: die Folge von Kugeln $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ ist eine Überdeckung von K.

Wir sehen, dass K totalbeschränkt genau dann ist, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz von K gibt.

Satz 14.18 Jede Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist totalbeschränkt. Folglich sind in $\mathbb{R}^n$ Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent (bezüglich jeder p-Metrik).

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt* falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält.

Hauptsatz 14.19 Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und K eine Teilmenge von X. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.

(i) K ist kompakt.

(ii) K ist folgenkompakt.

(iii) K ist totalbeschränkt und abgeschlossen.

Korollar 14.20 Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Korollar 14.21 *(Extremwertsatz)* Seien K eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren die beiden Werten $\max_K f$ und $\min_K f$.

Korollar 14.22 Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent *(Beweis in Aufgabe* 134*).*

14.11 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz 14.23 *(Fundamentalsatz der Algebra)* Jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ des Grades $n \geq 1$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n \neq 0$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

14.12 Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz

Definition. Eine Teilmenge K von einem metrischen Raum X heißt *zusammenhängend* falls für jede Überdeckung $K \subset U \sqcup V$ von K mit zwei disjunkten offenen Mengen U, V gilt $K \subset U$ oder $K \subset V$.

Satz 14.24 *(Zwischenwertsatz)* Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine zusammenhängende Teilmenge von X so ist $f(K)$ auch zusammenhängend.

Satz 14.25 Jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Umgekehrt, jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.

Definition. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet*, falls es einen Punkt $a \in K$ gibt mit

$$x \in K \Rightarrow [a, x] \in K.$$

Der Punkt a heißt ein *Sternzentrum*.

Satz 14.26 Jedes Sterngebiet K in $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Insbesondere sind alle Kugeln in $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend.

14.13 * Gleichmäßige Stetigkeit

Satz 14.27 Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf jeder Kompakte Teilmenge $K \subset X$.

14.14 * Vervollständigung von metrischen Räumen

Definition. Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *isometrisch* falls es eine bijektive[1] Abbildung $\Phi : X \to Y$ gilt so dass

$$d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) = d_X\left(x_1, x_2\right) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X. \tag{14.10}$$

Die Abbildung Φ heißt dann *Isometrie.*

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir den *Abschluss* $\overline{A}$ von A als die Teilmenge von X die aus allen Grenzwerten von allen konvergenten Folgen aus A besteht.

Definition. Man sagt, dass die Menge $A \subset X$ *dicht* in X liegt falls $\overline{A} = X$.

Satz 14.28 Für jeden metrischen Raum (X, d) gibt es einen anderen metrischen Raum $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ist vollständig
- Es gibt eine Teilmenge $Y \subset \widetilde{X}$ so dass Y dicht in $\widetilde{X}$ liegt und $(Y, \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d) ist.

14.15 * p-adische Zahlen

Definition. Die Metrik d_p in $\mathbb{Q}$ heißt die *p-adische Metrik.*

Definition. Die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von $(\mathbb{Q}, d_p)$ wird mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet, und die Elemente von $\mathbb{Q}_p$ heißen *p-adische Zahlen.*

14.16 * Lebesgue-integrierbare Funktionen

Lemma 14.29 Für jede Funktion $f \in R[a, b]$ gibt es eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $C[a, b]$ mit

$$\int_a^b \left|f - f_n\right| dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{14.11}$$

[1] Es reicht zu erfordern, dass Φ surjektiv ist, da es aus (14.10) folgt, dass Φ injektiv ist:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow d_X\left(x_1, x_2\right) \neq 0 \Rightarrow d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) \neq 0 \Rightarrow \Phi\left(x_1\right) \neq \Phi\left(x_2\right).$$

Lemma 14.30 Zwei Funktionen $f, g \in R[a,b]$ entsprechen einem Element von $L^1[a,b]$ genau dann, wenn
$$\int_a^b |f-g|\,dx = 0. \tag{14.12}$$

Chapter 15

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

15.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Definition. Die Ableitung von f_k bezüglich x_j heißt *partielle Ableitung* 1-er Ordnung von f und wird mit $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ bezeichnet, d.h.

$$\boxed{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{t}}.$$

Definition. Existieren die partielle Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für alle k und j, so heißt die Funktion f *partiell differenzierbar* in x. In diesem Fall lässt sich die Menge von allen partiellen Ableitung von f in einer $m \times n$ Matrix anordnen wie folgt:

$$J_f := \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = (\partial_j f_k) = (f_{k;j}) = \begin{pmatrix} f_{1;1} & f_{1;2} & \dots & f_{1;n} \\ f_{2;1} & f_{2;2} & \dots & f_{2;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m;1} & f_{m;2} & \dots & f_{m;n} \end{pmatrix}, \tag{15.1}$$

wobei $k = 1, ..., m$ ein Zeilenindex ist und $j = 1, ..., n$ ein Spaltenindex. Die Matrix $J_f = J_f(x)$ heißt die *Jacobi-Matrix von* f an der Stelle x.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* in $x \in \Omega$ falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(x + h) = f(x) + Ah + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{15.2}$$

Die lineare Abbildung A heißt die *totale Ableitung* von f in x und wird mit $\frac{df}{dx}(x)$ oder $f'(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{f(x + h) = f(x) + f'(x) h + o(h) \quad \text{für } h \to 0.}$$

Definition. Die Variable h in (15.2) heißt das *Differential* von x und wird auch mit dx bezeichnet (so dass $dx \in \mathbb{R}^n$ eine unabhängige Variable ist). Die Funktion $h \mapsto Ah$ heißt das *Differential* der Funktion f in x und wird auch mit $df(x)$ bezeichnet, so that $df = Adx = f'(x) dx$.

Satz 15.1 Ist die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar im Punkt $x \in \Omega$, so gilt folgendes.

(a) f ist stetig in x.

(b) f ist partiell differenzierbar in x und es gilt

$$f'(x) = J_f(x). \tag{15.3}$$

Satz 15.2 Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, d.h. f partiell differenzierbar in allen Punkten von Ω und alle Ableitungen $\partial_j f_k$ sind stetig in Ω. Dann ist f total differenzierbar in jedem $x \in \Omega$.

15.2 Rechenregeln für totale Ableitung

Satz 15.3 *(Linearität)* Sind die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$, so ist auch ihre lineare Kombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ total differenzierbar in x und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Satz 15.4 *(Kettenregel)* Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Sei $g : U \to V$ differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar im Punkt $y = g(x) \in V$. Dann ist die Komposition $f \circ g : U \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in x und es gilt

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x)} = f'(g(x))\, g'(x).$$

Korollar 15.5 Unter den Bedingungen des Satzes 15.4 gilt

$$\boxed{(f \circ g)_{k;j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y)\, g_{i;j}(x)}. \tag{15.4}$$

wobei $y = f(x)$.

Korollar 15.6 *(Ableitung der inversen Funktion)* Seien U und V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei $g : U \to V$ eine bijektive Funktion die in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist. Sei die inverse Funktion $f = g^{-1}$ im Punkt $y = g(x)$ differenzierbar. Dann gilt

$$f'(y) = g'(x)^{-1}. \tag{15.5}$$

15.3 Richtungsableitung und Mittelwertsatz

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in \Omega$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(v)}{t},$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert (wobei t eine reelle Variable ist).

Satz 15.7 Ist die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x dann existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = f'(x)\, v = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x)\, v_j.$$

Satz 15.8 *(Mittelwertsatz)* Sei f eine reellwertige total differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien x, y zwei Punkte in Ω mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann es gibt einen Punkt $\xi \in [x, y]$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{15.6}$$

15.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und Satz von Schwarz

Satz 15.9 *(Satz von Hermann Schwarz)* Nehmen wir an, dass die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in Ω die beiden partiellen Ableitungen $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ hat, und dass $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ in Ω stetig sind. Dann gilt $\partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *k-fach (partiell) stetig differenzierbar* falls alle partielle Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig in Ω sind. Die Menge von allen k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet. Insbesondere wird mit $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ die Menge von allen stetigen Funktionen auf Ω bezeichnet.

Korollar 15.10 Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ ist der Wert von jeder partiellen Ableitung der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge von Ableiten. D.h., für jede Folge $i_1, ..., i_m$ von $m \leq k$ Indizes und für jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ gilt $\partial_{i_1 ... i_m} f = \partial_{j_1 ... j_m} f$.

Definition. Jede Folge $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen α_k heißt *Multiindex* von Dimension n. Die Menge von allen Multiindizes von Dimension n wird mit $\mathbb{I}^n$ bezeichnet. Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{I}^n$ definieren wir die Ordnung (den Betrag) von α mit

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

15.5 Taylorformel

Hauptsatz 15.11 *(Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano)* Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \geq 0$ und für jedes $a \in \Omega$ gilt

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + o\left(\|x - a\|^k\right) \text{ für } x \to a. \tag{15.7}$$

Umgekehrt, gilt für reelle Koeffizienten c_α

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} c_\alpha (x-a)^\alpha + o\left(\|x-a\|^k\right) \text{ für } x \to a, \tag{15.8}$$

so haben wir $c_\alpha = \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}$.

Definition. Die Funktion

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \qquad (15.9) \\ &= \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} \frac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1} ... (x_n-a_n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! ... \alpha_n!} \end{aligned}$$

heißt das *Taylor-Polynom* der Ordnung k der Funktion f im Punkt a. Die ausführliche Notation für das Taylor-Polynom ist $T_{k,f}(x;a)$

15.6 Lokale Extrema

Definition. Ein Punkt $a \in \Omega$ heißt *lokale Maximumstelle* von f falls es eine Kugel $U_r(a) \subset \Omega$ gibt so dass a eine Maximumstelle von f in $U_r(a)$ ist, d.h.

$$f(a) \ge f(x) \text{ für alle } x \in U_r(a).$$

Analog definiert man *lokale Minimumstelle.* Der Punkt a heißt *lokale Extremumstelle* von f, falls a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

Satz 15.12 Sei $a \in M$ eine lokale Extremumstelle von f in Ω. Ist f in a differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.

Definition. Sei f in Ω differenzierbar. Die Punkte $x \in \Omega$ wo $f'(x) = 0$ heißen die *kritischen Punkte* von f.

Definition. Für jede Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die *totale zweite Ableitung* $f''(x)$ als die folgende $n \times n$ Matrix:

$$f''(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) & ... & \partial_{1n} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) & ... & \partial_{2n} f(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial_{n1} f(x) & \partial_{n2} f(x) & ... & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch die *Hesse-Matrix* von f.

Definition. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A (und ihre quadratische Form Q) heißt

- *positive definit* falls $Q(u) > 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A > 0$);

- *positiv semidefinit* falls $Q(u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \geq 0$);
- *negativ definit* falls $Q(u) < 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A < 0$);
- *negativ semidefinit* falls $Q(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \leq 0$);
- *indefinit* falls $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt.

Satz 15.13 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine Funktion von $C^2(\Omega)$. Sei a ein kritischer Punkt von f, d.h. $f'(a) = 0$.

(a) *(Notwendige Bedingung für lokales Extremum)* Ist a eine lokale Maximumstelle von f, so gilt $f''(a) \leq 0$. Ist a eine lokale Minimumstelle von f so gilt $f''(a) \geq 0$.

(b) *(Hinreichende Bedingung für lokales Extremum)* Gilt $f''(a) < 0$ so ist a eine lokale Maximumstelle von f. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f.

15.7 Satz von der impliziten Funktion

Definition. Let Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Eine Funktion $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *l-fach stetig differenzierbar* falls alle partielle Ableitungen $D^\alpha \Phi_j$ der Ordnung $|\alpha| \leq l$ von allen Komponenten Φ_j existieren und stetig in Ω sind. Man sagt in diesem Fall, eine Funktion der Klasse C^l ist.

Hauptsatz 15.14 *(Der Satz von der impliziten Funktion)* Seien Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m}$ und F eine Funktion der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Gelten für einen Punkt $(a, b) \in \Omega$ die Bedingungen

$$F(a, b) = 0 \text{ und } \partial_y F(a, b) \text{ ist invertierbar,} \tag{15.10}$$

so existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$, $b \in V$, $U \times V \subset \Omega$, und eine Funktion $f : U \to V$ mit

$$F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \quad \text{für alle } x \in U,\; y \in V. \tag{15.11}$$

Darüber hinaus ist f von der Klasse C^l und es gilt für alle $x \in U$ die Identität

$$f'(x) = -\left(\partial_y F\right)^{-1} \partial_x F(x, f(x)) \tag{15.12}$$

15.8 Satz von der inversen Funktion

Hauptsatz 15.15 *(Satz von der inversen Funktion)* Seien W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : W \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Ist $f'(p)$ in einem Punkt $p \in W$ invertierbar, so existieren offene Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^n$, so dass $p \in U \subset W$, $f(p) \in V$, und $f|_U$ eine Bijektion von U nach V ist; insbesondere ist die inverse Funktion $f^{-1} : V \to U$ wohldefiniert. Darüber hinaus ist f^{-1} der Klasse C^l und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \tag{15.13}$$

für alle $y \in V$ und $x = f^{-1}(y)$.

15.9 * Beweise

15.9.1 Taylorformel

15.9.2 Satz von der impliziten Funktion

15.9.3 Satz von der inversen Funktion

15.10 * Holomorphe und harmonische Funktionen

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f \to \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ und die reellwertigen Funktionen u und v unendlich oft stetig differenzierbar in Ω und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} . \tag{15.14}$$

Die Gleichungen (15.14) heißen *Cauchy-Riemann-Gleichungen.*

Lemma 15.16 Seien f und g zwei holomorphe Funktionen in Ω. Dann auch die folgenden Funktionen sind holomorph: $f+g$, fg, f/g (vorausgesetzt $g \neq 0$).

Definition. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* falls $u \in C^2(\Omega)$ und in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch falls in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} \geq 0. \tag{15.15}$$

Lemma 15.17 *(Maximum-Prinzip)* Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die in Ω subharmonisch ist. Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{15.16}$$

Hauptsatz 15.18 Jedes Polynom $P(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.

15.11 * Parameterintegral

Satz 15.19 Sei $g(x,y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I und $J = [\alpha, \beta]$ zwei kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.

(a) Dann ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(b) Nehmen wir an, dass die partielle Ableitung g_x existiert und stetig auf $I \times J$ ist. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta g_x(x,y)\,dy.$$

Satz 15.20 Sei $g(x,y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I ein beliebiges Intervall ist und $J = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$.

(a) Gilt

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x\in I} |g(x,y)|\,dy < \infty, \tag{15.17}$$

so ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(b) Zusätzlich nehmen wir an, dass die partielle Ableitung g_x existiert und stetig auf $I \times J$ ist und dass

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x\in I} |g_x(x,y)|\,dy < \infty. \tag{15.18}$$

Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_0^\infty g_x(x,y)\,dy.$$

15.12 * Kurvenintegral und Windungszahl

Lemma 15.21 Sei $\tau : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine surjective monoton steigende stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die parametrisierte Kurve $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, d.h.

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)), \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Dann gilt $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ und

$$\int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy = \int_\gamma Pdx + Qdy.$$

Definition. Angenommen, dass $|\gamma|$ den Ursprung 0 nicht enthält, definieren wir

$$A_0(\gamma) := \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_a^b \frac{x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}dt. \tag{15.19}$$

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t). \tag{15.20}$$

Lemma 15.22 Liegt $|\gamma|$ in $\mathbb{R}^2\backslash 0$ so gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta(t)$ auf $[a,b]$, der mit dem Polarradius

$$r(t)=\sqrt{x(t)^2+y^2(t)}$$

die Identitäten *(15.20)* erfüllt. Für dieses $\theta(t)$ gilt

$$A_0(\gamma)=\theta(b)-\theta(a). \tag{15.21}$$

Definition. Die ganze Zahl n heißt die *Windungszahl* (auch *Index* genannt) der geschlossenen Kurve γ bezüglich 0 und wird mit $\operatorname{ind}_0\gamma$ bezeichnet. In anderen Wörtern, gilt

$$\operatorname{ind}_0\gamma:=\frac{1}{2\pi}A_0(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}, \tag{15.22}$$

vorausgesetzt, dass $0\notin|\gamma|$.

Definition. Für eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve γ und für beliebigen Punkt $w\in\mathbb{R}^2\setminus|\gamma|$ definieren wir den Index $\operatorname{ind}_w\gamma$ mit

$$\operatorname{ind}_w\gamma=\operatorname{ind}_0(\gamma-w)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{(x-w_x)\,dy-(y-w_y)\,dx}{(x-w_x)^2+(y-w_y)^2}. \tag{15.23}$$

Hauptsatz 15.23 Sei $f:D\to\mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe $D\subset\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sei γ die parametrisierte Kreislinie ∂D. Gilt für einen Punkt $w\in\mathbb{R}^2\setminus|f\circ\gamma|$

$$\operatorname{ind}_w f\circ\gamma\neq 0,$$

so liegt w im $f(D)$.

Hauptsatz 15.24 Jedes Polynom $f(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n\geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z\in\mathbb{C}$.

Hauptsatz 15.25 *(Fixpunktsatz von Brouwer)* Sei $f:D\to D$ eine stetige Selbstabbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe D in $\mathbb{R}^2$. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z\in D$ mit $f(z)=z$.

Satz 15.26 (a) Der Index $\operatorname{ind}_w\gamma$ ist eine stetige Funktion von $w\in\mathbb{R}^2\setminus|\gamma|$.

(b) Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ ist sie Menge

$$\Omega_k=\left\{w\in\mathbb{R}^2\setminus|\gamma|:\operatorname{ind}_w\gamma=k\right\}.$$

offen und

$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}\Omega_k=\mathbb{R}^2\setminus\gamma. \tag{15.24}$$

(c) Die Menge Ω_0 ist unbeschränkt während Ω_k für $k\neq 0$ ist immer beschränkt.

Hauptsatz 15.27 *(Satz von Jordan)* Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Dann in der Folge $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ gibt es nur zwei nicht-leere Mengen: Ω_0 und Ω_i wobei entweder $i = 1$ oder $i = -1$. Darüber sind die Mangen Ω_0 und Ω_i zusammenhängend und es gilt

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_i = \gamma.$$

Satz 15.28 Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Sei Ω das Innere von γ. Der Flächeninhalt von Ω ist gleich

$$F(\Omega) = \int_\gamma y dx = -\int_\gamma x dy = \frac{1}{2}\int_\gamma (y dx - x dy).$$

Chapter 16

* Flächen in $\mathbb{R}^n$

16.1 Parametrische Gleichung einer Fläche

Definition. Die Menge M heißt *m-dimensionale Fläche* falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. $M = f(U)$;
2. f ist injektiv;
3. f ist stetig differenzierbar;
4. f' ist nichtsingulär, d.h. $\operatorname{rg} f'(u) = m$ für alle $u \in U$.

Das Paar (U, f) heißt *Parametrisierung* von M. Das Dreifache (M, U, f) heißt *parametrisierte Fläche*. Die parametrisierte Fläche gehört zur Klasse C^l falls $f \in C^l$.

Lemma 16.1 Der Graph G ist eine m-dimensionale Fläche.

16.2 Tangentialebene

Definition. Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die *Tangentialabbildung* von f im Punkt $u \in U$ ist die folgende affine Abbildung

$$\begin{gathered} \tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \tau(h) = f(u) + f'(u)\,h. \end{gathered} \tag{16.1}$$

Definition. Sei (M, U, f) eine m-dimensionale parametrisierte Fläche in $\mathbb{R}^n$. Die *Tangentialebene* $T_x M$ an M im Punkt $x = f(u) \in M$ ist das Bild der Tangentialabbildung τ von f im Punkt u.

16.3 Implizite Flächen

Satz 16.2 Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $k < n$, eine stetig differenzierbare Funktion. Gilt $\operatorname{rg} F'(p) = k$ in einem Punkt $p \in \Omega$, so existiert eine offene Menge W mit $p \in W \subset \Omega$ so dass die Null-Niveaumenge

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

eine $(n-k)$-dimensionale Fläche ist.

Darüber hinaus gilt für jedes $x \in M$

$$T_x M = x + \ker F'(x) . \tag{16.2}$$