Axiomensystem von reellen Zahlen

Die Menge von reellen Zahlen ist eine Menge $\mathbb{R}$ mit Operationen "+", "•" und Ungleichheit "<", die die folgenden vier Gruppen von Axiomen erfüllt.

I. Axiome der Addition

1. (Das Nullelement) Es existiert ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass
$$x + 0 = 0 + x = x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. (Das Negative) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element $-x \in \mathbb{R}$ (das Negative von x), so dass
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. (Assoziativgesetz für +) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. (Kommutativgesetz für +) Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x + y = y + x.$$

II. Axiome der Multiplikation

1. (Das Einheitselement) Es existiert ein Element $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

2. (Das Inverse) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x), so dass
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

3. (Assoziativgesetz für •) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

4. (Kommutativgesetz für •) Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x \cdot y = y \cdot x$$

5. (Distributivgesetz) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

III. Anordnungsaxiome

1. (Vergleichbarkeit) Es gilt genau eine der folgenden Relationen: $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$.

2. (Transitivität)
$$x < y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow x < z$$

3. (Beziehung zur Addition)
$$x < y \ \Rightarrow x + z < y + z$$

4. (Beziehung zur Multiplikation)
$$x > 0 \ \wedge \ y > 0 \ \Rightarrow x \cdot y > 0.$$

IV. Vollständigkeitsaxiom

Seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq b.$$

Dann existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so dass
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$