

Funktionen

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

SS 2017

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Die reellen Zahlen | 1 |
| 1.1 | Mengen und Operationen auf Mengen | 1 |
| 1.2 | Abbildungen | 5 |
| 1.3 | Axiomensystem von reellen Zahlen | 8 |
| 1.4 | Folgerungen aus den Körperaxiomen | 10 |
| 1.5 | Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen | 13 |
| 1.6 | Intervalle | 16 |
| 1.7 | Quadratwurzel | 17 |
| 2 | Die ganzen Zahlen und vollständige Induktion | 19 |
| 2.1 | Natürliche Zahlen | 19 |
| 2.2 | Induktionsprinzip | 20 |
| 2.3 | Ganze Zahlen | 22 |
| 2.4 | Maximum und Minimum | 23 |
| 2.5 | Rationale Zahlen | 24 |
| 2.6 | Endliche Folgen | 25 |
| 2.7 | Endliche Mengen und Kardinalität | 27 |
| 2.8 | * Konstruktion von \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} unabhängig von \mathbb{R} | 31 |
| 2.9 | Zahlensystem: q -adische Darstellung natürlicher Zahlen | 32 |
| 2.10 | * Schriftliche Addition und Multiplikation | 35 |
| 2.11 | Der binomische Lehrsatz | 37 |
| 3 | Die komplexen Zahlen | 39 |
| 3.1 | Die Menge von komplexen Zahlen | 39 |
| 3.2 | Eigenschaften von Multiplikation | 42 |
| 3.3 | Konjugation | 44 |
| 3.4 | Betrag | 45 |
| 3.5 | Inverse und Division | 47 |
| 3.6 | Winkel und Winkelfunktionen | 48 |
| 3.7 | Polarkoordinaten | 53 |
| 3.8 | Winkel im Dreieck | 54 |
| 3.9 | Geraden | 56 |
| 3.10 | Graphen von Funktionen | 59 |
| 3.10.1 | Lineare Funktion | 59 |
| 3.10.2 | Transformationen der Ebene | 61 |
| 3.10.3 | Quadratische Funktion | 63 |
| 3.10.4 | Hyperbel | 67 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.10.5 | Kreis | 71 |
| 3.11 | Zusammenfassung | 73 |
| 3.11.1 | Operationen mit komplexen Zahlen | 73 |
| 3.11.2 | Nullstellen von Polynomen | 74 |
| 3.11.3 | Geometrie der Ebene | 74 |
| 3.12 | * Skalar- und Kreuzprodukt | 77 |
| 4 | Folgen und Reihen | 85 |
| 4.1 | Grenzwert einer Folge | 85 |
| 4.2 | Eigenschaften des Grenzwertes | 87 |
| 4.3 | Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ | 91 |
| 4.4 | Monotone Folgen | 94 |
| 4.5 | Reihen | 96 |
| 4.6 | Zahlensystem: q -adische Brüche | 99 |
| 4.7 | * Existenz und Eindeutigkeit von \mathbb{R} (Skizze) | 103 |
| 4.8 | Cauchy-Folgen | 103 |
| 4.9 | Grenzwert komplexwertiger Folgen | 107 |
| 4.10 | Konvergenz komplexwertiger Reihen | 109 |
| 4.11 | Majorantenkriterium und absolute Konvergenz | 110 |
| 4.12 | Bedingte Konvergenz | 111 |
| 4.13 | * Kommutativ und Assoziativgesetze für die Reihen | 112 |
| 4.14 | Quotientenkriterium | 113 |
| 5 | Exponentialfunktion | 115 |
| 5.1 | Exponentialreihe und die Zahl e | 115 |
| 5.2 | Eigenschaften der Exponentialfunktion | 118 |
| 5.3 | Hyperbelfunktionen | 121 |
| 5.4 | Trigonometrische Funktionen | 122 |
| 6 | Funktionen einer reellen Variablen | 125 |
| 6.1 | Stetige Funktionen | 126 |
| 6.2 | Stetigkeit von Komposition | 127 |
| 6.3 | Zwischenwertsatz | 128 |
| 6.4 | * Extremwertsatz | 130 |
| 6.5 | Die Zahl π | 132 |
| 6.6 | * Numerische Berechnung von π | 135 |
| 6.7 | Monotone Funktionen | 136 |
| 6.8 | Inverse Funktion | 137 |
| 6.9 | Logarithmische Funktion | 139 |
| 6.10 | Inverse trigonometrische Funktionen | 140 |
| 6.11 | * Bogenmaß | 142 |
| 6.12 | * Nullstellen von Polynomen | 144 |

Chapter 1

Die reellen Zahlen

04.17

Mathematik liefert für Anwendungen eine Menge von Regeln, um bestimmte Größe zu berechnen. Aber für die Mathematiker ist die Mathematik eine logische Theorie, wo die neuen Aussagen aus schon bestehenden Aussagen mit Hilfe von logischer Argumentation (*Beweis*) erhalten sollen. Es muss allerdings etwas am Anfang der Theorie geben. Die axiomatische Konstruktion von Mathematik beginnt mit einer Liste von den *Grundbegriffen* und *Axiomen*. Die Axiome sind die Aussagen, die man ohne Beweis akzeptiert und die die Eigenschaften der Grundbegriffe darstellen. Dazu gehören auch die Regeln von logischer Herleitung, die man in den Beweisen benutzen darf.

Die erste bekannte axiomatische Darstellung von Geometrie (und somit auch von ganzer Mathematik) wurde von Euklid durchgeführt. Euklid war ein griechischer Mathematiker, der im ca. 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria lebte. Sein Axiomensystem hatte allerdings einige Lücken. Erst in 1899 wurde von D.Hilbert das vollständige Axiomensystem von Geometrie gegeben.

Im 20. Jahrhundert wurde von N.Bourbaki ein anderes Axiomensystem entwickelt, die auf dem Begriff von reeller Zahl basiert. Die Begriffe von Geometrie werden später mit Hilfe von Kartesischen Koordinaten eingeführt. Dieses Axiomensystem von reellen Zahlen wird in diesem Kapitel präsentiert.

Aber ganz am Anfang von Mathematik stehen die Mengenlehre und die Mathematische Logik. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Begriffen der Mengenlehre, obwohl ohne richtige Axiomatisierung. Der Zweck davon ist, die auf der Mengenlehre basierende Sprache der Mathematik zu lernen. Danach führen wir die Axiome von reellen Zahlen ein und gewinnen aus den Axiomen alle wesentlichen Eigenschaften der reellen Zahlen.

1.1 Mengen und Operationen auf Mengen

Alle Objekte, die man in Mathematik trifft, sind entweder *Mengen* oder *Elemente von Mengen*. In axiomatischer Mengenlehre sind diese die Grundbegriffe, die man nicht definiert. In dieser Einführung benutzen wir keine axiomatische, sondern "naive" Mengenlehre, wo wir uns auf unserem intuitiven Verständnis von Objekten verlassen, das aus unserer Erfahrung stammt.

Der Begründer der Mengenlehre – der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918), erklärte den Begriff von Menge in 1895 wie folgt:

“Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten, ... welche die *Elemente* von M genannt werden.”

Elemente von Mengen. Jede Menge M besteht aus bestimmten Objekten, die die Elemente von M heißen. Ist x ein Element von M , so schreibt man

$$x \in M$$

(“ x gehört zu M ”, “ x ist in M ”, “ x liegt in M ”, “ x ist ein Element der Menge M ”). Ist x kein Element von M , so schreibt man

$$x \notin M.$$

Es gibt eine Menge, die keine Elemente besitzt. Diese Menge heißt die *leere Menge* und wird mit dem Zeichen \emptyset bezeichnet.

Eine Menge kann explizit angegeben werden wie folgt. Zum Beispiel, die Menge M , die aus Elementen a, b, c, d besteht, bezeichnet man mit

$$M = \{a, b, c, d\}$$

(d.h. alle Elementen von M in den geschwungenen Klammern). Das bedeutet, dass die Elemente von M die Buchstaben a, b, c, d sind, und nichts anderes. Noch ein Beispiel: die Menge $M = \{a\}$ besteht nur aus einem Element a .

Die Elemente dürfen selber die Mengen sein. Zum Beispiel, die Menge $M = \{\emptyset\}$ besteht aus einem Element \emptyset .¹

Häufig ist eine Menge M durch eine Eigenschaft E von Elementen angegeben, d.h. M besteht genau aus den Elementen x die E erfüllen. In diesem Fall schreibt man

$$M = \{x : x \text{ erfüllt } E\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \mid x \text{ erfüllt } E\}.$$

Teilmengen und Inklusion.

Definition. Menge A heißt *Teilmenge* von Menge B wenn aus $x \in A$ folgt $x \in B$. Man schreibt in diesem Fall

$$A \subset B$$

(“ A ist eine Teilmenge von B ”). Die Beziehung $A \subset B$ zwischen den Mengen A und B heißt *Inklusion*.

Die Aussage “aus $x \in A$ folgt $x \in B$ ” schreibt man kurz so auf:

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

wobei der Pfeil \Rightarrow bedeutet: “impliziert”, “ergibt”, “aus ... folgt ...”. Die obige Definition kann man ohne Wörter wie folgt umschreiben:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B), \tag{1.1}$$

¹Die Menge $\{\emptyset\}$ soll mit der Menge \emptyset nicht verwechselt werden: die erste Menge hat ein Element, während die zweite Menge hat kein Element.

wobei der Doppelpfeil \Leftrightarrow bedeutet: “genau dann, wenn” oder “äquivalent”.

Es folgt aus (1.1), dass die Inklusion von Mengen transitiv ist, d.h.

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C.$$

wobei das Zeichen \wedge bedeutet “und”.

Zwei Mengen A und B sind gleich genau dann wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, d.h.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Durchschnitt und Vereinigung. Jetzt definieren wir einige wichtigen Operationen auf den Mengen.

Definition. Der *Durchschnitt* der Mengen A und B ist die folgende Menge

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Die äquivalente Definition ist:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Die Mengen A und B heißen *disjunkt* falls $A \cap B = \emptyset$.

Definition. Die *Vereinigung* der Mengen A und B ist die folgende Menge:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

wobei das Zeichen \vee bedeutet “oder”.

Die äquivalente Definition ist:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Beispiel. Wir haben immer

$$A \cap A = A = A \cup A$$

und

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A.$$

Für alle Mengen A, B, C gelten die folgenden Identitäten.

Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

Subtraktion von Mengen.

Definition. Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A, B ist definiert wie folgt:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Das Zeichen \setminus heißt “Minus” oder “Mengenminus”.

Zum Beispiel, $A \setminus A = \emptyset$ und $A \setminus \emptyset = A$.

Komplement. Wählen wir eine Grundmenge X . Die Menge von allen Teilmengen von X heißt die *Potenzmenge* von X und wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet. Nach Definition haben wir:

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X.$$

Es ist klar, dass wenn A und B Teilmengen von X sind, so sind $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ auch Teilmengen von X . D.h. die Potenzmenge ist verschlossen bezüglich Operationen \cup, \cap, \setminus .

Definition. Für jede Menge $A \subset X$ definieren wir das *Komplement* A^c (bezüglich der Grundmenge X) durch

$$A^c = X \setminus A.$$

Äquivalent haben wir:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$

vorausgesetzt dass immer $x \in X$.

Für beliebige Mengen $A, B \subset X$ gelten die *Formeln von De Morgan*:

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich als die folgende Regel formulieren: das Komplement der Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplementen, und umgekehrt.

Kartesisches Produkt.

Definition. Für je zwei Mengen A, B definieren wir *kartesisches (direktes) Produkt* $A \times B$ der Mengen A, B wie folgt:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

d.h. die Menge $A \times B$ besteht aus allen geordneten *Paaren* (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Das geordnete Paar (a, b) ist ein neues Objekt, das man aus den Elementen von A und B erstellt. Zwei Paaren (a, b) und (a', b') sind gleich genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

1.2 Abbildungen

Definition. Gegeben seien zwei Mengen X, Y . Eine *Abbildung* f von X nach Y ist eine Zuordnung (Vorschrift, Regel) $x \mapsto y$, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Die Abbildung wird mit

$$f : X \rightarrow Y$$

oder

$$X \xrightarrow{f} Y$$

bezeichnet. Das Element y heißt das *Bild* von x (oder der *Wert* von f an der Stelle x) und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Man bezeichnet die Abbildung auch mit

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

oder mit

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* (oder *Definitionsmenge*) von f , die Menge Y – der *Wertebereich* (oder *Zielmenge*).

Beispiel. Die *identische* Abbildung $\text{Id} : X \rightarrow X$ wird wie folgt definiert: $\text{Id}(x) = x$ für alle x . Sie wird auch mit Id_X bezeichnet um den Definitionsbereich X zu betonen.

Komposition von Abbildungen.

Definition. Gegeben seien zwei Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z,$$

definieren wir die *Komposition* (*Verkettung*, *zusammengesetzte Abbildung*) $f \circ g$ als eine Abbildung von X nach Z mit

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Man kann auch schreiben

$$f \circ g : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto f(g(x)).$$

Schematisch kann man die Verkettung so darstellen:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ g \nearrow & & \searrow f \\ X & \xrightarrow{f \circ g} & Z \end{array}$$

Man muss betonen, dass die Komposition $f \circ g$ nur dann wohldefiniert ist, wenn der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f liegt. Daraus folgt, dass $g \circ f$ nicht unbedingt wohldefiniert sein soll, selbst wenn $f \circ g$ wohldefiniert ist. Insbesondere kann man nicht erwarten, dass die Komposition kommutativ ist. Aber die Komposition ist immer assoziativ.

Satz 1.1 (Assoziativgesetz für Komposition) *Die folgende Identität*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (1.2)$$

gilt für je drei Abbildungen

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} U.$$

Beweis. Bemerken wir zunächst, dass die beiden Verkettungen $(f \circ g) \circ h$ und $f \circ (g \circ h)$ wohldefiniert sind und von X nach U abbilden. Für jedes $x \in X$ gilt

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

und analog

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))),$$

woraus die Identität (1.2) folgt. ■

Das Assoziativgesetz erlaubt uns die Verkettung dreier Abbildungen zu definieren wie folgt:

$$f \circ g \circ h := (f \circ g) \circ h.$$

Quantoren. Unterhalb benutzen wir die folgenden Symbolen (*Quantoren*):

\forall bedeutet “für alle”, “für jedes”,

\exists bedeutet “es existiert”, “es gibt mindestens ein”, “für mindestens ein”.

Das Zeichen \forall stammt aus dem umgedrehten Buchstabe A (Alle) und heißt *Allquantor*. Das Zeichen \exists stammt aus dem umgedrehten E (Existiert) und heißt *Existenzquantor*.

Das Zeichen $\exists!$ (Existenzquantor mit dem Ausrufezeichen) bedeutet: “es gibt genau ein”.

Umkehrabbildung. Gegeben seien zwei Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$. Dann sind die beiden Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ wohldefiniert und

$$f \circ g : Y \rightarrow Y, \quad g \circ f : X \rightarrow X.$$

Definition. Die Abbildung g heißt die *Umkehrabbildung* (oder die *inverse Abbildung*) von f , falls

$$f \circ g = \text{Id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \text{Id}_X. \quad (1.3)$$

21.04.17

In diesem Fall ist f auch die Umkehrabbildung von g . Existiert die Umkehrabbildung von f , so bezeichnet man sie mit f^{-1} , d.h.

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_X.$$

Definition. Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und für jedes $y \in Y$, die Menge

$$\{x \in X : f(x) = y\}$$

heißt das *Urbild* von y .

Definition. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *bijektiv* falls das Urbild von jedem $y \in Y$ genau ein Element enthält, d.h.

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y.$$

Die Abbildung f heißt *surjektiv* falls das Urbild von jedem $y \in Y$ nicht leer ist, d.h.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y.$$

Die Abbildung f heißt *injektiv* falls das Urbild von jedem $y \in Y$ höchstens ein Element enthält, d.h.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Es ist klar, dass

$$f \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv und injektiv.}$$

Satz 1.2 *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ hat eine Umkehrabbildung genau dann, wenn f bijektiv ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung eindeutig bestimmt.*

Beweis. Hat f eine Umkehrabbildung g , so gilt (1.3), d.h.

$$\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y \tag{1.4}$$

und

$$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x. \tag{1.5}$$

Es folgt aus (1.4), dass das Urbild von jedem $y \in Y$ nicht leer ist, da es $g(y)$ enthält. Somit ist f surjektiv. Zeigen wir jetzt, dass f auch injektiv ist. Angenommen, dass $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in X$, es folgt aus (1.5), dass

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

so dass f injektiv ist. Es folgt, dass f bijektiv ist.

Umgekehrt, ist f bijektiv, so definieren wir die Abbildung $g : Y \rightarrow X$ wie folgt: für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so setzen wir $g(y) = x$. Dann gelten

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$$

und

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y,$$

so dass (1.3) gilt. Somit hat f die Umkehrabbildung g .

Ist f bijektiv, so ist die Abbildung g , die (1.5) erfüllt, eindeutig bestimmt. Somit ist die Umkehrabbildung f^{-1} eindeutig bestimmt. ■

Satz 1.3 *Gegeben seien zwei bijektive Abbildungen*

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Die folgende Identität gilt für die Umkehrabbildungen

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Beweis. Offensichtlich ist $f \circ g$ eine Abbildung von X nach Z , und $g^{-1} \circ f^{-1}$ – eine Abbildung von Z nach X , was aus dem folgenden Diagramm klar ist:

$$X \xleftarrow{g^{-1}} Y \xleftarrow{f^{-1}} Z.$$

Nach dem Satz 1.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) &= g^{-1} \circ (f^{-1} \circ (f \circ g)) \\ &= g^{-1} \circ ((f^{-1} \circ f) \circ g) \\ &= g^{-1} \circ (\text{Id}_Y \circ g) \\ &= g^{-1} \circ g = \text{Id}_X \end{aligned}$$

und analog

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ f^{-1} = \text{Id}_Z.$$

Somit ist $g^{-1} \circ f^{-1}$ die Umkehrabbildung von $f \circ g$. ■

1.3 Axiomensystem von reellen Zahlen

Hier definieren wir axiomatisch die *Menge von reellen Zahlen*.

Definition. Eine Menge \mathbb{R} heißt die Menge von reellen Zahlen und ihre Elemente heißen reelle Zahlen falls die folgenden vier Gruppen von Axiomen (insgesamt vierzehn Axiome) erfüllt sind.

I. Axiome der Addition. Es gibt eine Abbildung (Operation)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

die *Addition* heißt und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. (Das Nullelement) Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. (Das Negative) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ (das Negative von x), so dass

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. (Assoziativgesetz für +) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. (Kommutativgesetz für +) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

Die Zahl $x + y$ heißt die Summe von x, y . Eine Menge K (statt \mathbb{R}), wo die Operation Addition definiert ist und die Axiome 1-3 erfüllt, heißt (additive) *Gruppe*. Soll auch das Axiom 4 erfüllt werden, so heißt die Gruppe K kommutativ.

II. Axiome der Multiplikation. Es gibt eine Abbildung (Operation)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

die *Multiplikation* heißt und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. (Das Einheitsselement) Es existiert eine Zahl $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. (Das Inverse) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x), so dass

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. (Assoziativgesetz für \cdot) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4. (Kommutativgesetz für \cdot) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

5. (Distributivgesetz) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Die Zahl $x \cdot y$ heißt das Produkt von x, y . Man schreibt auch xy anstatt $x \cdot y$.

Eine Menge K (statt \mathbb{R}), wo die Operationen Addition und Multiplikation definiert sind und die obigen Axiome erfüllen, heißt *Körper*. Die ersten zwei Gruppen von Axiomen heißen *Körperaxiome*. Deshalb ist \mathbb{R} ein Körper. Es gibt auch andere Beispiele von Körper, die wir später besprechen.

III. Anordnungsaxiome. Auf \mathbb{R} ist *Ungleichung* $<$ definiert: für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ ist $x < y$ entweder wahr oder falsch (wobei $x < y$ und $y > x$ äquivalent sind). Die Ungleichung erfüllt die folgenden Bedingungen, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. (Vergleichbarkeit) Es gilt genau eine der folgenden Relationen: $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$.

2. (Transitivität)

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

3. (Beziehung zur Addition)

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

4. (Beziehung zur Multiplikation)

$$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0.$$

Falls eine Relation $<$ auf einer Menge K definiert ist und die Anordnungsaxiome 1-2 erfüllt, so heißt sie (totale) *Ordnung* und die Menge K heißt (total) geordnet. Die Axiome 3 und 4 etablieren die Beziehung zwischen der Ordnung und den Körperoperationen. Ein Körper K der auch die Anordnungsaxiome erfüllt, heißt *angeordneter Körper*. Somit ist \mathbb{R} ein angeordneter Körper.

Wir definieren auch die unechte Ungleichung: $x \leq y$ (oder $y \geq x$) gilt genau dann, wenn es entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt, d.h.

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y.$$

IV. Vollständigkeitsaxiom.

Seien A, B nicht leere Teilmengen von \mathbb{R} mit der Eigenschaft

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \text{gilt } a \leq b.$$

Dann existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \text{gilt } a \leq c \leq b.$$

Man sagt, dass die Zahl c die Mengen A und B trennt.

Man stellt die reellen Zahlen dar als die Punkte auf einer waagerechten Gerade. Die Punkte am links sind immer kleiner als die Punkte am rechts. Die Vollständigkeitsaxiom bedeutet folgendes: liegt die ganze Menge A links von B , so existiert ein Punkt c zwischen A und B . Man kann es auch so vorstellen, dass die Gerade *keine Lücke* enthält.

Bemerkung. Die Existenz der Menge \mathbb{R} , die alle Axiome von reellen Zahlen erfüllt, wird später kurz besprochen.

1.4 Folgerungen aus den Körperaxiomen

25.04.17

Folgerungen aus den Axiomen der Addition. Jetzt zeigen wir, wie man aus den Axiomen die üblichen algebraischen Regeln bzw die weiteren Eigenschaften von reellen Zahlen gewinnt.

[1] *Das Nullelement ist eindeutig bestimmt.*

Seien 0 und $0'$ zwei Nullelemente. Nach Definition erfüllen 0 und $0'$ die folgenden Identitäten, für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

und

$$x + 0' = 0' + x = x.$$

Einsetzen in der ersten Identität $x = 0'$ ergibt

$$0' + 0 = 0' + 0 = 0'$$

und in der zweiten Identität $x = 0$ ergibt

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0,$$

woraus $0' = 0$ offensichtlich folgt.

[2] *Das Negative von $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.*

Seien y und z zwei Negative von x . Nach Definition erfüllen y und z die folgenden Identitäten:

$$x + y = y + x = 0$$

und

$$x + z = z + x = 0.$$

Es folgt nach Axiom I.1

$$y + (x + z) = y + 0 = y$$

und nach Axiomen I.3 und I.1

$$y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z,$$

woraus $y = z$ folgt.

[3] *Es gelten*

$$-0 = 0$$

und

$$-(-x) = x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da nach Axiom I.1 gilt $0 + 0 = 0$, so sehen wir, dass 0 die Definition von -0 erfüllt. Nach [2] beschließen wir, dass $-0 = 0$. Bezeichnen wir mit y das Negative von $-x$, d.h. y erfüllt

$$(-x) + y = y + (-x) = 0. \tag{1.6}$$

Da nach Definition von $-x$ gilt

$$x + (-x) = (-x) + x = 0,$$

so folgt es, dass die Identitäten (1.6) für $y = x$ erfüllt sind. Nach der Eindeutigkeit des Negatives erhalten wir, dass das Negative von $(-x)$ gleich x ist.

[4] *Für jede $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x + a = b$ eine eindeutige Lösung $x = b + (-a)$.*

Die Zahl $x = b + (-a)$ erfüllt die Gleichung, weil

$$x + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b.$$

Andererseits folgt es aus der Gleichung $x + a = b$, dass

$$\begin{aligned} (x + a) + (-a) &= b + (-a), \\ x + (a + (-a)) &= b + (-a), \\ x &= b + (-a). \end{aligned}$$

Die Summe $b + (-a)$ wird auch mit $b - a$ bezeichnet und heißt die *Differenz* von b und a . Die Abbildung (Operation) $(a, b) \mapsto b - a$ heißt *Subtraktion*.

Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation. Die Beweise der folgenden Eigenschaften [5] – [8] sind analog zu [1] – [4].

[5] *Das Einheitsselement 1 ist eindeutig bestimmt.*

[6] *Das Inverse von $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eindeutig bestimmt.*

[7] *Es gelten $1^{-1} = 1$ und $(x^{-1})^{-1} = x$, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

[8] *Für jede $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ eine einer eindeutige Lösung $x = a^{-1} \cdot b$.*

Das Produkt $a^{-1} \cdot b$ heißt der *Quotient* von b und a und wird mit b/a oder $\frac{b}{a}$ bezeichnet. Die Abbildung (Operation) $(a, b) \mapsto b/a$ heißt *Division*. Insbesondere gilt $a^{-1} = 1/a$.

Folgerungen aus dem Distributivgesetz.

[9] $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Da $0 + 0 = 0$, so erhalten wir aus dem Axiom II.5

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Mit Hilfe von [4] erhalten wir

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = 0.$$

[10] $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist $x \cdot y = 0$ nach [9]. Beweisen wir, dass $x \cdot y = 0$ ergibt $x = 0$ oder $y = 0$. Nehmen wir an, dass $x \neq 0$. Lösen der Gleichung $x \cdot y = 0$ bezüglich y mit Hilfe von [8] ergibt $y = x^{-1} \cdot 0$, woraus $y = 0$ nach [9] folgt.

[11] $(-1) \cdot x = -x$

Mit Hilfe von Axiomen II.1, II.5, I.2 erhalten wir

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

wobei die letzte Identität nach [9] gilt. Somit erfüllt $(-1) \cdot x$ die Definition des Negatives von x , und nach [2] beschließen wir, dass $(-1) \cdot x = -x$.

[12] $(-1) \cdot (-x) = x$

Wir haben nach [11] und [3], dass

$$(-1) \cdot (-x) = -(-x) = x.$$

[13] $-(x + y) = -x - y$ (siehe Aufgaben).

[14] $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

Nach [11] und Axiomen II.3, II.4 erhalten wir

$$x \cdot (-y) = x \cdot ((-1) \cdot y) = (-1) \cdot (x \cdot y) = -(x \cdot y).$$

[15] $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Insbesondere $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Einsetzen in [14] $(-x)$ statt x ergibt

$$(-x) \cdot (-y) = -((-x) \cdot y) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

Für $x = y = 1$ erhalten wir

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

[16] *Bezeichnen wir $2 := 1 + 1$ und $x^2 := x \cdot x$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

(siehe Aufgaben).

Bemerkung. Obwohl wir die Zahl 2 definiert haben, es ist noch nicht klar ob 2 von 0 und 1 abweicht (bemerken wir, dass $1 \neq 0$ nach Axiom II.1 gilt). Die Körperaxiome allein implizieren die Existenz von Zahlen außer 0 und 1 nicht. Zum Beispiel, betrachten wir die Menge $K = \{0, 1\}$, die aus zwei Elementen 0 und 1 besteht, und definieren Addition und Multiplikation in K mit

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$$

und

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Dann werden alle Axiome von Addition und Multiplikation erfüllt, so dass K ein Körper ist (siehe Aufgaben). Dieser Körper wird mit \mathbb{F}_2 bezeichnet. In \mathbb{F}_2 gilt offensichtlich $2 = 0$! Dass in \mathbb{R} gilt $2 \neq 0$ ist eine Folgerung von Anordnungsaxiomen unterhalb.

1.5 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *positiv* falls $x > 0$ und *negativ* falls $x < 0$. Das Axiom III.1 ergibt, dass jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ entweder positiv, oder negativ, oder Null ist.

[17] $x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$

Ist $y < z$, so folgt das aus dem Axiom III.2. Ist $y = z$ so ist die Implikation trivial.

[18] $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Im Fall $x = y = z$ ist die Implikation trivial. Im Fall $x < y$ oder $y < z$ folgt sie aus [17].

[19] $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

Nach Axiom III.1 gilt immer eine der Möglichkeiten $x < y$, $x > y$, $x = y$. Da $x < y$ im Widerspruch zu $y \leq x$ steht und $x > y$ – im Widerspruch zu $x \leq y$, so bleibt es nur die Möglichkeit $x = y$.

[20] $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

Im Fall $x < y$ folgt aus dem Axiom III.3, dass $x + z < y + z$, im Fall $x = y$ erhalten wir $x + z = y + z$.

$$[21] \quad x \leq y \wedge a < b \Rightarrow x + a < y + b$$

Mit Hilfe von [20] und Axiom III.3 erhalten wir

$$x + a \leq y + a = a + y < b + y = y + b,$$

woraus $x + a < y + b$ nach [17] folgt.

[22] *Die Summe von positiven Zahlen ist positiv, und die Summe von negativen Zahlen – negativ.*

Falls $x > 0$ und $y > 0$, so erhalten wir nach [21], dass $x + y > 0 + 0 = 0$. Der Fall von negativen x, y ist analog.

$$[23] \quad x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow x + a \leq y + b$$

Im Fall $x < y$ oder $a < b$ erhalten wir aus [21], dass $x + a < y + b$, im Fall $x = y$ und $a = b$ gilt $x + a = y + b$.

[24] *Die folgenden Äquivalenzen gelten:*

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow -x > -y \tag{1.7}$$

und

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -y. \tag{1.8}$$

Addieren $(-x)$ zu den beiden Seiten von $x < y$ ergibt nach Axiom III.3

$$x < y \Leftrightarrow x + (-x) < y + (-x) \Leftrightarrow 0 < y - x.$$

Analog erhalten wir

$$-x > -y \Leftrightarrow (-x) + y > (-y) + y \Leftrightarrow y - x > 0$$

Der Beweis von (1.8) ist analog.

[25] *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$x \text{ negativ} \Leftrightarrow -x \text{ positiv}, \tag{1.9}$$

$$x \text{ positiv} \Leftrightarrow -x \text{ negativ}. \tag{1.10}$$

Setzen wir in (1.7) $y = 0$ und erhalten

$$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0,$$

was äquivalent zu (1.9) ist. Setzen wir in (1.8) $x = 0$ und erhalten

$$0 < y \Leftrightarrow 0 > -y,$$

was äquivalent zu (1.10) ist.

[26] *Sind die Zahlen x und y gleichzeitig positiv oder negativ, so ist $x \cdot y$ positiv. Ist eine Zahl von x, y positiv und andere negativ, so ist $x \cdot y$ negativ.*

Im Fall $x, y > 0$ ergibt das Axiom III.4, dass $x \cdot y > 0$. Im Fall $x, y < 0$ erhalten wir nach [25] dass $-x$ und $-y$ positiv sind, und nach [15] und Axiom III.4

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y) > 0.$$

Im Fall $x < 0$ und $y > 0$, erhalten wir nach [25] $-x > 0$ und nach [14] und Axiom III.4

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y > 0,$$

woraus nach [25] folgt $x \cdot y < 0$. Der Fall $x > 0$ und $y < 0$ ist analog.

[27] Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x \cdot x > 0$.

Da $x \neq 0$, so ist x entweder positiv oder negativ (Axiom III.1), und in den beiden Fällen gilt $x \cdot x > 0$ nach [26].

[28] $1 > 0$ und $-1 < 0$.

Nach Axiom II.1 haben wir $1 \neq 0$ und $1 = 1 \cdot 1$. Da $1 \cdot 1 > 0$ nach [27], so folgt es, dass $1 > 0$. Es folgt aus [25], dass $-1 < 0$.

Definieren wir jetzt die Zahlen $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$ usw. Es folgt aus $1 > 0$ mit Hilfe von Axiom III.3, dass $2 > 1$, $3 > 2$, $4 > 3$, d.h.

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots \quad (1.11)$$

[29] Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$. Ist $x < 0$ so ist $x^{-1} < 0$.

Da $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$, so nach [9] ist x^{-1} nicht Null, und nach [26] sind die beiden Zahlen x und x^{-1} gleichzeitig positiv oder negativ, was zu beweisen war.

[30] Sei $x < y$. Für alle $a > 0$ gilt $a \cdot x < a \cdot y$, und für alle $a < 0$ gilt $a \cdot x > a \cdot y$.
Siehe Aufgaben.

[31] Falls $0 < x < y$ und $0 < a < b$, so gilt $a \cdot x < b \cdot y$.
Siehe Aufgaben.

[32] Für alle $x > y > 0$ gilt $x^{-1} < y^{-1}$.

Da $y < x$ und x^{-1}, y^{-1} positiv nach [29] sind, so erhalten wir mit Hilfe von [30], dass

$$x^{-1} \cdot y < x^{-1} \cdot x$$

und

$$(x^{-1} \cdot y) \cdot y^{-1} < (x^{-1} \cdot x) \cdot y^{-1}. \quad (1.12)$$

Nach Axiomen II.3, II.2, II.1 erhalten wir

$$(x^{-1} \cdot y) \cdot y^{-1} = x^{-1} \cdot (y \cdot y^{-1}) = x^{-1} \cdot 1 = x^{-1}$$

und

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y^{-1} = y^{-1}.$$

Somit impliziert (1.12), dass $x^{-1} < y^{-1}$.

Insbesondere erhalten wir aus (1.11) und [32], dass

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > 0.$$

1.6 Intervalle

Definition. Für je zwei reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$ definieren wir die *Intervalle* wie folgt:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{– offenes Intervall} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{– halboffenes (linksoffenes) Intervall} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{– halboffenes (rechtsoffenes) Intervall} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{– abgeschlossenes Intervall} \end{aligned}$$

Die Zahlen a, b heißen die *Grenzen* des Intervalles.

Satz 1.4 *Jedes Intervall I mit den Grenzen $a < b$ ist nicht leer.*

Beweis. Zeigen wir, dass

$$c := \frac{1}{2}(a + b)$$

ein Element von (a, b) ist, so dass $I \neq \emptyset$. Da $\frac{1}{2} > 0$ und

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

so erhalten wir

$$c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)b = 1 \cdot b = b.$$

Analog gilt $c > a$, woraus $c \in I$ folgt. ■

Definieren wir die *erweiterte Menge* von reellen Zahlen

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

wobei $+\infty$ und $-\infty$ die neuen Elemente sind, die “*Unendliche*” heißen, und erweitert die Anordnungsrelation $<$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt immer

$$-\infty < a < +\infty.$$

Die obige Definition von Intervall gilt auch im Fall wenn die Grenzen a, b die Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ sind. Zum Beispiel, für $a \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < +\infty\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty < x \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ [a, +\infty] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq +\infty\} = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Auch gelten $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ und $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$. Satz 1.4 gilt auch in diesem Fall.

Ein Intervall mit den Grenzen a, b heißen *beschränkt*, falls $a, b \in \mathbb{R}$ und *unbeschränkt*, falls mindestens eine von a, b unendlich ist.

1.7 Quadratwurzel

Satz 1.5 Für jede nichtnegative Zahl $a \geq 0$ existiert genau eine nichtnegative Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Definition. Die eindeutige nichtnegative Zahl x mit $x^2 = a$ heißt die *Quadratwurzel* aus a und wird mit \sqrt{a} bezeichnet.

Beweis. Im Fall $a = 0$ erhalten wir trivial $x = 0$. Sei $a > 0$. Betrachten wir die Mengen

$$A = \{x \in [0, \infty) : x^2 \leq a\} \quad (1.13)$$

und

$$B = \{y \in [0, \infty) : y^2 \geq a\}. \quad (1.14)$$

Die beiden Mengen sind nicht leer, da A enthält $x = 0$ und B enthält $y = a + 1$, weil

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a.$$

Für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x \leq y$, da sonst aus $x > y$ folgt $x^2 > y^2$, was im Widerspruch zur $x^2 \leq a \leq y^2$ steht.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom erhalten wir die Existenz einer Zahl c zwischen A und B , d.h.

$$x \leq c \leq y \quad \text{für alle } x \in A \text{ und } y \in B. \quad (1.15)$$

Wir werden beweisen, dass $c^2 = a$. Dafür reicht es zu zeigen, dass die anderen Fälle $c^2 < a$ und $c^2 > a$ unmöglich sind.

Zuerst nehmen wir an, dass $c^2 > a$. Insbesondere gilt $c > 0$. Wir zeigen, dass es eine Zahl ε gibt mit

$$0 < \varepsilon < c \quad (1.16)$$

und

$$(c - \varepsilon)^2 > a.$$

Dann erhalten wir einen Widerspruch, da nach (1.14) die Zahl $y = c - \varepsilon$ in B liegen soll, was nach (1.15) unmöglich ist. Da

$$(c - \varepsilon)^2 = c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 \geq c^2 - 2c\varepsilon,$$

so reicht es ε so zu wählen, dass ε die folgende Ungleichung erfüllt:

$$c^2 - 2c\varepsilon > a,$$

was äquivalent zu

$$\varepsilon < \frac{c^2 - a}{2c}. \quad (1.17)$$

Da $c^2 > a$, so ist die Zahl $d := \frac{c^2 - a}{2c}$ positiv. Die Bedingungen (1.16) und (1.17) sind äquivalent zu

$$\varepsilon \in (0, c) \cap (0, d).$$

Der Schnitt $(0, c) \cap (0, d)$ ist gleich $(0, m)$, wobei

$$m = \min(c, d) = \begin{cases} c, & c < d \\ d, & c \geq d \end{cases}.$$

Da $m > 0$, so ist das Intervall $(0, m)$ nicht leer nach dem Satz 1.4, und wir erhalten die Existenz von $\varepsilon \in (0, m)$. Somit ist der Fall $c^2 > a$ ausgeschlossen.

Jetzt nehmen wir an, dass $c^2 < a$, und zeigen, dass es ein ε gibt mit

$$0 < \varepsilon < 1 \quad (1.18)$$

und

$$(c + \varepsilon)^2 < a,$$

was zum Widerspruch zu (1.13) und (1.15) führt. Da

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 \leq c^2 + (2c + 1)\varepsilon,$$

so reicht es ε so zu wählen, dass ε die folgende Ungleichung erfüllt:

$$c^2 + (2c + 1)\varepsilon < a,$$

was äquivalent zu

$$\varepsilon < \frac{a - c^2}{2c + 1}. \quad (1.19)$$

Da $a - c^2 > 0$, so erhalten wir wie oberhalb die Existenz von ε , das die beiden Bedingungen (1.18) und (1.19) erfüllt, was beweist, dass $c^2 < a$ unmöglich ist.

Somit erhalten wir $c^2 = a$, was die Existenz der Lösung von $x^2 = a$ beweist. Für die Eindeutigkeit müssen wir noch zeigen, dass für $x, y \geq 0$

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$$

Ist $x \neq y$ so gilt $x < y$ oder $x > y$. Im ersten Fall erhalten wir $x^2 < y^2$ und im zweiten Fall $x^2 > y^2$, woraus $x = y$ folgt. ■

Korollar 1.6 Für jedes $a > 0$ hat die Gleichung $x^2 = a$ genau zwei reellen Lösungen: $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$.

Beweis. Ist $x > 0$, so haben wir die einzige Lösung $x = \sqrt{a}$ nach dem Satz 1.5. Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $(-x)^2 = x^2 = a$. Somit gilt $-x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$. Es ist klar, dass die beiden Werte $x = \pm\sqrt{a}$ die Gleichung $x^2 = a$ erfüllen. ■

Mit Hilfe von Quadratwurzel löst man *Quadratgleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.20)$$

mit reellen Koeffizienten $a \neq 0, b, c$.

Satz 1.7 Die Gleichung (1.20) hat eine reelle Lösung genau dann, wenn

$$d := b^2 - 4ac \geq 0.$$

Ist $d > 0$, so hat (1.20) zwei reelle Lösungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}. \quad (1.21)$$

Ist $d = 0$, so hat (1.20) genau eine reelle Lösung

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Der Beweis ist in Aufgaben. Der Wert $d = b^2 - 4ac$ heißt die *Diskriminante* der Gleichung (1.20).

Chapter 2

Die ganzen Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Natürliche Zahlen

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff von natürlichen Zahlen. Man erwartet, dass die Menge \mathbb{N} von natürlichen Zahlen eine Teilmenge von \mathbb{R} ist, die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $1 \in \mathbb{N}$
- $x \in \mathbb{N}$ ergibt $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Jedoch bestimmen diese diese zwei Eigenschaften die Menge \mathbb{N} nicht eindeutig. Zum Beispiel, die ganze Menge \mathbb{R} erfüllt sie. Um eine vollständige Definition von \mathbb{N} zu geben, führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv* falls

$$x \in S \Rightarrow x + 1 \in S.$$

Zum Beispiel, die ganze Menge \mathbb{R} ist induktiv. Auch die Intervalle $(a, +\infty)$ und $[a, +\infty)$ sind induktive Mengen, während die beschränkten Intervalle nicht induktiv ist.

Definition. Die Menge \mathbb{N} ist der Durchschnitt von allen induktiven Mengen die 1 enthalten. Die Elemente von \mathbb{N} heißen *natürliche Zahlen*.

Bezeichnen wir mit \mathcal{F} die Menge von allen induktiven Mengen S mit 1. Die Definition von \mathbb{N} lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in S \quad \forall S \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Satz 2.1 *Die Menge \mathbb{N} ist induktiv und enthält 1.*

Beweis. Da $1 \in S$ für alle $S \in \mathcal{F}$, so erhalten wir nach (2.1), dass $1 \in \mathbb{N}$. Da jedes $S \in \mathcal{F}$ induktiv ist, so erhalten wir für alle $S \in \mathcal{F}$

$$x \in \mathbb{N} \implies x \in S \implies x + 1 \in S,$$

woraus folgt $x + 1 \in \mathbb{N}$. Somit ist \mathbb{N} induktiv. ■

Folglich ist \mathbb{N} die *kleinste* induktive Menge mit 1, d.h. $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{N} \subset S$ für jedes $S \in \mathcal{F}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt die natürliche Zahl $n + 1$ der *Nachfolger* von n .

Beispiel. Das Intervall $[1, +\infty)$ ist eine induktive Menge mit 1. Es folgt, dass $\mathbb{N} \subset [1, +\infty)$. Insbesondere ist 1 die kleinste natürliche Zahl.

Da $1 \in \mathbb{N}$, daraus folgt auch $2 := 1+1 \in \mathbb{N}$, $3 := 2+1 \in \mathbb{N}$ usw. bis $9 := 8+1 \in \mathbb{N}$. Die Zahl *zehn* = $9 + 1$ wird auch mit 10 bezeichnet, aber diese Bezeichnung hat mit *Stellenwertsystem* zu tun und wird später eingeführt.

2.2 Induktionsprinzip

Häufig braucht man eine Aussage beweisen, die von einem natürlichen Parameter n abhängt. Dafür benutzt man das folgende Induktionsprinzip.

Satz 2.2 (Induktionsprinzip) *Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (i) (Induktionsanfang) $A(1)$ ist wahr;
- (ii) (Induktionsschritt) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (d.h. ist $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ auch wahr).

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

02.05.17

Beweis. Bezeichnen wir mit S die Menge von allen $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ wahr ist, d.h.

$$S = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Nach dem Induktionsanfang gilt $1 \in S$, und nach dem Induktionsschritt gilt

$$n \in S \Rightarrow n + 1 \in S,$$

d.h. S ist induktiv. Nach Definition von \mathbb{N} erhalten wir $\mathbb{N} \subset S$, woraus folgt, dass $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. ■

Die Beweismethode, die auf dem Induktionsprinzip basiert, heißt die *vollständige Induktion*. Im Induktionsschritt nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*.

Der folgende Satz wird mit Hilfe von vollständiger Induktion bewiesen.

Satz 2.3 *Für je zwei natürliche Zahlen n, m gilt*

- (a) $n + m \in \mathbb{N}$
- (b) $nm \in \mathbb{N}$

Beweis. (a) Wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ und beweisen per Induktion nach n , dass $n + m \in \mathbb{N}$. Bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage, dass $n + m \in \mathbb{N}$.

(i) Induktionsanfang.

$A(1)$ ist die Aussage, dass $1+m \in \mathbb{N}$. Da \mathbb{N} eine induktive Menge ist und $m \in \mathbb{N}$, so folgt es daraus, dass $m+1 \in \mathbb{N}$, was zu beweisen war.

(ii) Induktionsschritt.

Die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ ist: $n+m \in \mathbb{N}$, die Induktionsbehauptung $A(n+1)$ ist: $(n+1)+m \in \mathbb{N}$. Ist $A(n)$ wahr, d.h. $n+m \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(n+m)+1 \in \mathbb{N}$ und somit

$$(n+1)+m = (n+m)+1 \in \mathbb{N},$$

d.h. $A(n+1)$ ist wahr.

Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ und beweisen wir per Induktion nach n , dass $nm \in \mathbb{N}$.

(i) Induktionsanfang für $n = 1$.

Ist $n = 1$ so gilt $nm = m \in \mathbb{N}$.

(ii) Induktionsschritt von n nach $n+1$.

Ist es schon bekannt, dass $nm \in \mathbb{N}$, dann gilt nach (a)

$$(n+1)m = nm + m \in \mathbb{N}$$

da die beiden Zahlen nm und m natürlich sind. ■

Satz 2.4 Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Beweisen wir zunächst diese Behauptung für $m = 1$, d.h.

$$n > 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Das letztere ist äquivalent zur folgenden Aussage

$$A(n) = (n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, die wir per Induktion nach n beweisen.

(i) Induktionsanfang. $A(1)$ ist wahr, da $n = 1$.

(ii) Induktionsschritt. $A(n+1)$ ist wahr, da $(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$.

Beweisen wir jetzt, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$. Bezeichnen wir

$$B(m) = (\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > m \text{ gilt } n - m \in \mathbb{N})$$

und beweisen per Induktion nach m , dass $B(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(i) Induktionsanfang für $m = 1$.

$B(1)$ bedeutet: für jedes $n > 1$ gilt $n - 1 \in \mathbb{N}$, was genau (2.2) ist.

(ii) Induktionsschritt von m nach $m + 1$.

Angenommen, dass $B(m)$ wahr ist, beweisen wir $B(m + 1)$, d.h.

$$n \in \mathbb{N} \text{ und } n > m + 1 \Rightarrow n - (m + 1) \in \mathbb{N}.$$

Da $n > m$, so erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung, dass $n - m \in \mathbb{N}$. Nach $n > m + 1$ erhalten wir $n - m > 1$ und somit nach (2.2) gilt $(n - m) - 1 \in \mathbb{N}$. Es bleibt nun zu bemerken, dass

$$n - (m + 1) = n + (-1)(m + 1) = n + (-m) + (-1) = (n - m) - 1,$$

woraus $n - (m + 1) \in \mathbb{N}$ folgt. ■

2.3 Ganze Zahlen

Bezeichnen wir mit \mathbb{Z} die Vereinigung von $\{0\}$, \mathbb{N} , und von den Negativen von \mathbb{N} , d.h.

$$\mathbb{Z} := \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}).$$

Die Elemente von \mathbb{Z} heißen die *ganze Zahlen* und \mathbb{Z} heißt die Menge von ganzen Zahlen. Offensichtlich haben wir

$$x \in \mathbb{Z} \text{ und } x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}.$$

Satz 2.5 Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sind $x + y$, $x - y$, xy auch in \mathbb{Z} .

Beweis. Da $x - y = x + (-y)$ und $(-y) \in \mathbb{Z}$, es reicht zu beweisen, dass xy und $x + y$ ganze Zahlen sind. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist die Aussage trivial. Sonst gibt es natürliche Zahlen n, m mit $x = \pm n$ und $y = \pm m$. Im Fall $x = n$ und $y = m$ sind xy und $x + y$ Elemente von \mathbb{N} nach dem Satz 2.3.

Betrachten wir jetzt den Fall $x = n$ und $y = -m$. Dann $nm \in \mathbb{N}$ und $xy = n(-m) = -nm \in \mathbb{Z}$. Beweisen wir, dass $x + y = n - m$ eine ganze Zahl ist. Im Fall $n = m$ gilt $n - m = 0 \in \mathbb{Z}$. Im Fall $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$ nach dem Satz 2.4. Im Fall $n < m$ gilt $m - n \in \mathbb{N}$ und somit $n - m = -(m - n) \in \mathbb{Z}$.

Die anderen Fälle von den Vorzeichen in $x = \pm n$ und $y = \pm m$ werden analog betrachtet. ■

Korollar 2.6 Für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist die Bedingung $x > y$ äquivalent zu $x \geq y + 1$. Folglich, für jedes $n \in \mathbb{Z}$ enthält das Intervall $(n, n + 1)$ keine ganze Zahl.

Beweis. Sei $x > y$. Da $x - y \in \mathbb{Z}$ und $x - y > 0$, erhalten wir $x - y \in \mathbb{N}$. Da 1 die kleinste natürliche Zahl ist, folgt $x - y \geq 1$ und damit $x \geq y + 1$. Die Implikation in der Rückrichtung ist offensichtlich: $x \geq y + 1$ und $y + 1 > y$ ergeben $x > y$.

Ist m eine ganze Zahl im Intervall $(n, n + 1)$, so gilt $m > n$ und somit $m \geq n + 1$, was im Widerspruch zu $m < n + 1$ steht. ■

2.4 Maximum und Minimum

Sei S eine nicht-leere Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition. Ein Element $m \in S$ heißt das *Maximum* von S falls für alle $x \in S$ gilt $x \leq m$. In diesem Fall wird m mit $\max S$ bezeichnet.

Ein Element $m \in S$ heißt das *Minimum* von S falls für all $x \in S$ gilt $x \geq m$. In diesem Fall wird m mit $\min S$ bezeichnet

Z.B. für ein abgeschlossenes Intervall $S = [a, b]$ mit reellen $a < b$ gilt $\max S = b$ und $\min S = a$.

Zeigen wir, dass ein offenes Intervall $S = (a, b)$ weder Maximum noch Minimum hat (und in diesem Fall $\max S$ und $\min S$ werden nicht definiert). Sei $m = \max S$. Da $m \in S$, so gilt $a < m < b$. Nach dem Satz 1.4 ist das Intervall (m, b) nicht leer, sei $c \in (m, b)$. Dann liegt c auch in (a, b) und $c > m$, so dass m kein Maximum von S ist. Analog beweist man, dass S kein Minimum hat.

Definition. Sei S eine nicht-leere Teilmenge von \mathbb{R} . Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke* von S falls $a \leq x$ für alle $x \in S$. Die Menge S heißt nach *unten beschränkt* falls es eine untere Schranke von S gibt. Sonst heißt S (nach unten) *unbeschränkt*.

Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von S falls $b \geq x$ für alle $x \in S$. Die Menge S heißt nach *oben beschränkt*, falls es eine obere Schranke von S gibt. Sonst heißt S (nach oben) *unbeschränkt*.

Z.B., für das Intervall (a, b) mit $a < b$ ist a eine untere Schranke und b – eine obere Schranke; somit ist (a, b) nach oben und nach unten beschränkt. Das Intervall $(a, +\infty)$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Das Intervall $(-\infty, b)$ ist nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt. Die ganze Menge \mathbb{R} ist nach oben und nach unten unbeschränkt.

Existiert $\max S$, so ist $\max S$ eine obere Schranke von S . Analog ist $\min S$ eine untere Schranke von S .

Die Existenz von einer oberen (bzw unteren) Schranke reicht generell für die Existenz des Maximums (bzw Minimums) nicht, was das Beispiel von $S = (a, b)$ zeigt.

Satz 2.7 Sei S eine nicht-leere Teilmenge von \mathbb{Z} . Ist S nach oben beschränkt, so existiert $\max S$. Ist S nach unten beschränkt, so existiert $\min S$. Insbesondere existiert $\min S$ für jede nicht-leere Teilmenge von \mathbb{N} .

05.17

Beweis. Sei S nach oben beschränkt. Bezeichnen wir mit B die Menge von oberen Schranken von S . Da für jedes $a \in S$ und $b \in B$ gilt $a \leq b$, so erhalten wir nach dem Vollständigkeitsaxiom die Existenz von $c \in \mathbb{R}$ zwischen S und B , d.h.

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in S \quad \forall b \in B. \quad (2.3)$$

Da nach (2.3) $c - 1$ keine obere Schranke von S ist, so existiert ein $n \in S$ mit $n > c - 1$. Beweisen wir, dass $n = \max S$. Da $n + 1 > c$, so erhalten wir nach (2.3), dass $n + 1 > a$ für alle $a \in S$. Da $n + 1$ und a ganze Zahlen sind, so folgt es nach dem Korollar 2.6, dass $n + 1 \geq a + 1$, d.h. $n \geq a$, was bedeutet, dass $n = \max S$.

Die Existenz von $\min S$ wird analog bewiesen. Die Teilmengen von \mathbb{N} sind immer nach unten von 1 beschränkt, woraus die letzte Aussage folgt. ■

Beispiel. Mit Hilfe von dem Satz 2.7 zeigen wir, dass \mathbb{N} nach oben unbeschränkt ist (während $\min \mathbb{N} = 1$ und somit \mathbb{N} nach unten beschränkt ist). Angenommen, dass \mathbb{N} nach oben beschränkt ist, so erhalten wir nach dem Satz 2.7 dass $m = \max \mathbb{N}$ existiert. Aber dann auch gilt $m + 1 \in \mathbb{N}$ und somit m kein Maximum ist. Analog zeigt man, dass \mathbb{Z} nach unten und nach oben unbeschränkt ist.

Satz 2.8 (Archimedisches Prinzip) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$n \leq x < n + 1. \quad (2.4)$$

Die Zahl n wird mit $[x]$ (x in den eckigen Klammern) bezeichnet und heißt die *Gaußklammer* von x . Der Wert von n heißt auch der *Ganzzahlanteil* von x . Zum Beispiel, $[\frac{1}{2}] = 0$ und $[-\frac{1}{2}] = -1$. Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt $[x] = x$.

Beweis. Fixieren wir ein $x \in \mathbb{R}$ und betrachten die Menge

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Zeigen wir zunächst, dass diese Menge nicht leer ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass S leer ist. Dann gilt $k > x$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, d.h. x eine untere Schranke von \mathbb{Z} ist, was nicht möglich ist.

Da S nicht-leer ist und nach oben von x beschränkt, so erhalten wir nach dem Satz 2.7, dass S das Maximum hat. Setzen wir $n = \max S$. Da $n \in S$, erhalten wir nach Definition von S , dass $n \leq x$. Da $n + 1 > n = \max S$ und deshalb $n + 1 \notin S$, erhalten wir, dass $n + 1 > x$. Damit erfüllt n die Bedingungen (2.4).

Um die Eindeutigkeit von n zu beweisen, nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass es noch ein $n' \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n' \leq x < n' + 1.$$

Daraus folgt, dass $n + 1 > n'$ und somit nach Korollar 2.6 $n \geq n'$. Analog beweist man, dass $n \leq n'$, woraus $n = n'$ folgt. ■

2.5 Rationale Zahlen

Eine *rationale* Zahl ist ein Quotient von ganzen Zahlen, d.h. eine reelle Zahl der Form¹ $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Die Menge von allen rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} bezeichnet, so dass

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Offensichtlich gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

wo alle Inklusionen echt sind. Da $0 < \frac{1}{2} < 1$, so ist $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl. Da $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, so sehen wir, dass $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ und die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ echt ist. Die Inklusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist echt da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist (siehe Aufgaben), d.h. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

¹Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt auch ein *Bruch*. Die Zahl a heißt der Zähler und b - der Nenner des Bruches.

Satz 2.9 Die Menge \mathbb{Q} ist ein angeordneter Körper.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass \mathbb{Q} bezüglich der Operationen Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, die Negativen und Inversen von rationalen Zahlen auch in \mathbb{Q} liegen, und $0, 1 \in \mathbb{Q}$. Dann gelten alle Axiome der Addition, Multiplikation und Ordnung automatisch, da \mathbb{Q} eine Teilmenge von \mathbb{R} ist.

Die obigen Aussagen folgen aus dem Satz 2.5 und den folgende Identitäten

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

und

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

die in den Aufgaben bewiesen werden.

Zum Beispiel, für rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit ganzen a, b, c, d ist ihre Summe auch rational, da sie gleich $\frac{ad+bc}{bd}$ ist und die Zahlen $ad + bc$ und bd ganz nach dem Satz 2.5 sind. ■

Bemerken wir, dass \mathbb{Q} nicht vollständig ist, d.h., die Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{Q} nicht gilt. In der Tat impliziert die Vollständigkeitsaxiom die Existenz von Quadratwurzel \sqrt{a} für jedes $a \geq 0$, aber es gibt kein $\sqrt{2}$ in \mathbb{Q} .

2.6 Endliche Folgen

Für ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ bezeichnen wir mit $\{m, \dots, n\}$ die Menge

$$\{m, \dots, n\} := \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\} = \mathbb{Z} \cap [m, n].$$

Definition. Eine *endliche Folge* ist eine Abbildung $a : \{m, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$. Man bezeichnet den Wert $a(k)$ auch mit a_k und die Folge a mit $\{a_k\}_{k=m}^n$ oder kurz mit $\{a_k\}$.

Alle Zahlen a_k heißen die *Glieder* oder die *Elemente* der Folge a .

Für jede endliche Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ definieren wir die Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ von Elementen dieser Folge per Induction nach n wie folgt:

- ist $n = 1$ dann setzen wir $\sum_{k=1}^n a_k = a_1$;
- ist $\sum_{k=1}^n a_k$ schon definiert, so setzen wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}. \quad (2.6)$$

Man schreibt auch

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n.$$

Die folgenden Eigenschaften der Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ lassen sich per Induktion beweisen:

$$c \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (ca_k)$$

und

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

(siehe Aufgaben).

Analog definiert man das Produkt $\prod_{k=1}^n a_k$ der Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ mit:

- $\prod_{k=1}^1 a_k = a_1$
- $\prod_{k=1}^{n+1} a_k = (\prod_{k=1}^n a_k) \cdot a_{n+1}$.

09.05.17

Man schreibt auch

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Betrachten wir die Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ mit $a_k = a \in \mathbb{R}$ für alle k und definieren wir die *Potenzen* von a mit

$$a^n = \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{a \text{ ist } n \text{ mal}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Äquivalent kann man die Potenzen a^n direkt per Induktion definieren:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Man beweist per Induktion die folgenden Identitäten:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (2.8)$$

(siehe Aufgaben).

Ist $a \neq 0$, so definiert man die Potenzen a^n auch für nicht-positive ganze n wie folgt:

$$a^0 := 1 \quad \text{und} \quad a^n := (a^{-1})^{-n} \quad \text{für } n < 0.$$

Die Identitäten (2.8) gelten in diesem Fall auch für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Definieren wir die *Fakultät*² $n!$ (n mit dem Ausrufezeichen) wie folgt: $0! = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

² heißt auch *Faktorielle*

2.7 Endliche Mengen und Kardinalität

Definition. Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen. Die Menge X heißt *gleichmächtig* (oder *äquivalent*) zu Y falls es eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt. In diesem Fall schreibt man $X \sim Y$. Die leere Menge \emptyset ist nach Definition gleichmächtig zu sich selbst, d.h. $\emptyset \sim \emptyset$.

Satz 2.10 *Die Gleichmächtigkeit von Mengen hat die folgenden Eigenschaften:*

- $X \sim X$ (*Reflexivität*)
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ (*Symmetrie*)
- $X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ (*Transitivität*).

Beweis. Der Fall mit leeren Mengen ist trivial, so nehmen wir an, dass alle Mengen X, Y, Z nicht leer sind. Da die Identitätsabbildung $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ bijektiv ist, haben wir $X \sim X$.

Gilt $X \sim Y$, so existiert eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Nach dem Satz 1.2 ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ wohldefiniert und bijektiv, woraus $Y \sim X$ folgt.

Existieren die bijektiven Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$, so ist die Verkettung $g \circ f : X \rightarrow Z$ bijektiv nach dem Satz 1.3, woraus $X \sim Z$ folgt. ■

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit \mathcal{E}_n die folgende Menge

$$\mathcal{E}_n := \{1, \dots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\},$$

und $\mathcal{E}_0 = \emptyset$. Es ist klar, dass $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_m$ für $n \leq m$. Auch gilt nach Korollar 2.6

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \cup \{n+1\}.$$

Definition. Eine Menge S heißt *endlich* falls $S \sim \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gibt es solches n nicht, so heißt S *unendlich*.

Für $n = 0$ bedeutet $S \sim \mathcal{E}_0$ dass S eine leere Menge ist. Für $n \in \mathbb{N}$ bedeutet $S \sim \mathcal{E}_n$ die Existenz einer Bijektion $f : \mathcal{E}_n \rightarrow S$, d.h. man kann die Menge S mit den Zahlen $1, \dots, n$ aufzählen.

Definition. Gilt $S \sim \mathcal{E}_n$, so sagen wir: die Anzahl von Elementen von S ist n , oder die *Kardinalität* von S ist n . Man bezeichnet die Kardinalität von S mit $\text{card } S$ oder mit $|S|$ (Betrag von S).

Z.B., für die Menge $S = \{a, b\}$ gilt $\text{card } S = 2$, da diese Menge zu $\mathcal{E}_2 = \{1, 2\}$ gleichmächtig ist.

Wir beweisen einige Eigenschaften von endlichen Mengen und Kardinalitäten. Aber zunächst zeigen wir, dass die Kardinalität wohl-definiert ist, d.h. $S \sim \mathcal{E}_n$ und $S \sim \mathcal{E}_m$ mit verschiedenen Zahlen n, m unmöglich sind.

Satz 2.11 *Sind m, n natürliche Zahlen mit $m > n$, so gibt es keine injektive Abbildung von \mathcal{E}_m nach \mathcal{E}_n . Insbesondere sind \mathcal{E}_m und \mathcal{E}_n gleichmächtig genau dann, wenn $m = n$.*

Die Aussage von Satz 2.11 heißt das *Schubfachprinzip*: sind m Objekten zwischen n Schubfächern verteilt, wobei $m > n$, so gibt es ein Schubfach mit mindestens zwei Objekten. Es gibt viele interessante Anwendungen von diesem Prinzip.

Im Beweis benutzen wir den Begriff von *disjunkter Vereinigung*.

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Die disjunkte Vereinigung $A \sqcup B$ wird als die Vereinigung $A \cup B$ definiert, vorausgesetzt $A \cap B = \emptyset$. Im Fall $A \cap B \neq \emptyset$ wird $A \sqcup B$ nicht definiert.

Behauptung *Disjunkte Vereinigung hat die folgende Eigenschaft: ist $A \sim A'$ und $B \sim B'$ so gilt*

$$A \sqcup B \sim A' \sqcup B', \quad (2.9)$$

vorausgesetzt dass $A \cap B = \emptyset$ und $A' \cap B' = \emptyset$.

Beweis. Seien $f : A \rightarrow A'$ und $g : B \rightarrow B'$ bijektive Abbildungen. Definieren wir die Abbildung

$$F : A \sqcup B \rightarrow A' \sqcup B'$$

wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann ist F bijektiv, woraus (2.9) folgt. ■

Vor dem Beweis des Satzes 2.11 beweisen wir ein Lemma.

Lemma 2.12 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $a \in \mathcal{E}_{n+1}$ gilt*

$$\mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_n. \quad (2.10)$$

Beweis. Induktion nach n . Für $n = 1$ ist (2.10) offensichtlich, dass für $a = 2$

$$\mathcal{E}_2 \setminus \{a\} = \{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\} = \mathcal{E}_1$$

und für $a = 1$

$$\mathcal{E}_2 \setminus \{a\} = \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \sim \{1\} = \mathcal{E}_1.$$

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Angenommen sei (2.10), beweisen wir, dass für jedes $a \in \mathcal{E}_{n+2}$

$$\mathcal{E}_{n+2} \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_{n+1}. \quad (2.11)$$

Ist $a = n + 2$, so gilt

$$\mathcal{E}_{n+2} \setminus \{n + 2\} = \mathcal{E}_{n+1} \sim \mathcal{E}_{n+1}.$$

Ist $a < n + 2$, so liegt a in \mathcal{E}_{n+1} . Nach Induktionsvoraussetzung haben wir (2.10), woraus mit Hilfe von (2.9) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+2} \setminus \{a\} &= (\mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\}) \sqcup \{n + 2\} \\ &\sim \mathcal{E}_n \sqcup \{n + 1\} \\ &= \mathcal{E}_{n+1}. \end{aligned}$$

■

Beweis von dem Satz 2.11. Die Bedingung $m > n$ impliziert, dass $\mathcal{E}_{n+1} \subset \mathcal{E}_m$. Soll eine injektive Abbildung $f : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$ mit $m > n$ existieren, so ist die Beschränkung $f|_{\mathcal{E}_{n+1}}$ eine injektive Abbildung von \mathcal{E}_{n+1} nach \mathcal{E}_n . Deshalb reicht es zu beweisen, dass es keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}_n$ gibt. Diese Aussage beweisen wir per Induktion nach n .

Induktionsanfang für $n = 1$. Es gibt nur eine Abbildung $f : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ und zwar mit $f(1) = f(2) = 1$. Somit ist f nicht injektiv.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Sei

$$f : \mathcal{E}_{n+2} \rightarrow \mathcal{E}_{n+1}$$

eine injektive Abbildung. Setzen wir $a = f(n + 2)$. Da f injektiv ist, so gilt

$$f(k) \neq a \quad \forall k \in \mathcal{E}_{n+1}.$$

Somit ergibt die Beschränkung von f auf \mathcal{E}_{n+1} eine injektive Abbildung

$$\mathcal{E}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\}. \quad (2.12)$$

Nach Lemma 2.12 haben wir (2.10), d.h. es gibt eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\} \rightarrow \mathcal{E}_n. \quad (2.13)$$

Die Komposition zweier injektiven Abbildungen (2.12) und (2.13) ergibt eine injektive Abbildung

$$\mathcal{E}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}_n,$$

was nach der Induktionsvoraussetzung nicht möglich ist. Somit ist das Schubfachprinzip bewiesen.

Beweisen wir jetzt, dass

$$\mathcal{E}_m \sim \mathcal{E}_n \Leftrightarrow m = n.$$

Der Fall $m = 0$ oder $n = 0$ ist offensichtlich. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ist $m = n$ so ist $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_n$. Sei $\mathcal{E}_m \sim \mathcal{E}_n$. Dann gibt es eine injektive (sogar bijektive) Abbildung $\mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$. Nach dem Schubfachprinzip erhalten wir $m \leq n$. Da es auch eine injektive Abbildung $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_m$ gibt, so erhalten wir analog $n \leq m$, woraus $n = m$ folgt. ■

Satz 2.13 *Eine Teilmenge S einer endlichen Menge M ist endlich, und $\text{card } S \leq \text{card } M$.*

Beweis. Sei $n = \text{card } M$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $M = \mathcal{E}_n$, und beweisen per Induktion nach n , dass jede Teilmenge S von \mathcal{E}_n endlich ist und $\text{card } S \leq n$.

Induktionsanfang. Ist $n = 0$, so ist jede Teilmenge S von \mathcal{E}_0 leer und somit endlich mit $\text{card } S = 0$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Angenommen sei, dass jede Teilmenge T von \mathcal{E}_n endlich ist und $\text{card } T \leq n$. Beweisen wir, dass jede Teilmenge $S \subset \mathcal{E}_{n+1}$ endlich ist und $\text{card } S \leq n + 1$. Betrachten wir zwei Fälle.

Gilt $S \subset \mathcal{E}_n$, so ist S endlich nach Induktionsvoraussetzung, und $\text{card } S \leq n < n + 1$.

Gilt $S \notin \mathcal{E}_n$, so enthält S die Zahl $n + 1$. Die Menge $S' = S \setminus \{n + 1\}$ ist eine Teilmenge von \mathcal{E}_n und somit nach Induktionsvoraussetzung ist S' endlich und $\text{card } S' \leq n$. In anderen Wörtern $S' \sim \mathcal{E}_m$ für ein $m \leq n$. Dann erhalten wir mit Hilfe von (2.9)

$$S = S' \sqcup \{n + 1\} \sim \mathcal{E}_m \sqcup \{n + 1\} = \mathcal{E}_{m+1},$$

woraus die Endlichkeit von S folgt, und auch

$$\text{card } S = m + 1 \leq n + 1.$$

■

12.05.17

Es folgt aus dem Satz 2.13, dass für jede zwei endliche Mengen A, B auch $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ endlich sind.

Satz 2.14 *Seien A, B zwei endliche Mengen. Dann ist auch $A \cup B$ endlich. Sind A und B zusätzlich disjunkt, so gilt*

$$\text{card}(A \sqcup B) = \text{card } A + \text{card } B. \quad (2.14)$$

Beweis. Die Vereinigung $A \cup B$ lässt sich als eine disjunkte Vereinigung darstellen:

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

(siehe Aufgabe 8(c) mit $X = A \cup B$). Deshalb reicht es zu beweisen, dass eine disjunkte Vereinigung zweier Mengen endlich ist.

Seien jetzt A, B zwei disjunkte endliche Mengen mit $\text{card } A = n$ und $\text{card } B = m$, d.h.

$$A \sim \mathcal{E}_n \quad \text{und} \quad B \sim \mathcal{E}_m. \quad (2.15)$$

Betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}'_m = \{n + 1, \dots, n + m\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{E}_n \sim \mathcal{E}'_m$ (mit Bijektion $k \mapsto n + k$) und somit $B \sim \mathcal{E}'_m$. Die Mengen \mathcal{E}_n und \mathcal{E}'_m sind disjunkt, woraus folgt, dass

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_n \sqcup \mathcal{E}'_m = \{1, \dots, n\} \cup \{n + 1, \dots, n + m\} = \mathcal{E}_{n+m},$$

woraus folgt

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_{n+m}. \quad (2.16)$$

Insbesondere ist $A \sqcup B$ endlich. Die Identität (2.14) folgt aus (2.16). ■

Bemerkung. Es folgt aus dem Satz 2.14, dass für jede Teilmenge S einer endlichen Menge M gilt

$$\text{card}(M \setminus S) = \text{card } M - \text{card } S,$$

da $M = S \sqcup (M \setminus S)$.

Bemerkung. Für beliebige endliche Mengen A und B gilt

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$$

(siehe Aufgaben).

Satz 2.15 Die Menge \mathbb{N} ist unendlich.

Beweis. Sei \mathbb{N} endlich, so dass es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}_n$ gibt, wobei $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir ein $m > n$, z.B. $m = n + 1$. Dann ist die Beschränkung f auf \mathcal{E}_m eine injektive Abbildung von \mathcal{E}_m nach \mathcal{E}_n , was nach dem Schubfachprinzip unmöglich ist. ■

2.8 * Konstruktion von \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} unabhängig von \mathbb{R}

Wir haben die Theorie mit den Axiomen von reellen Zahlen angefangen. Hier besprechen wir kurz andere Konstruktionen, wenn man mit den natürlichen und ganzen Zahlen anfängt und nur danach die reellen Zahlen definiert.

Für Konstruktion der Menge \mathbb{N} von natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei verschiedene Methoden. In der erten Methode fängt man mit der Mengenlehre an und definiert zunächst *Kardinalzahlen* als Äquivalenzklassen von gleichmächtigen Mengen. Dann definiert man *endliche Menge* als eine Menge die zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist. Die natürlichen Zahlen (inklusive Null) lassen sich als die Kardinalzahlen von endlichen Mengen definieren.

Zum Beispiel, definieren wir 0 als die Kardinalzahl von \emptyset , d.h. $0 := |\emptyset|$. Um 1 zu definieren, benutzen wir die Potenzmenge $A = \mathcal{P}(\emptyset)$, die aus einem Element \emptyset besteht, d.h. $A = \{\emptyset\}$. Dann setzen wir $1 := |A|$. Warum existieren die höheren Zahlen? Betrachten wir die Potenzmenge $B = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$, die aus zwei Elementen besteht, und setzen $2 := |B|$. Dann betrachten wir die Potenzmenge $C = \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{A\}, B\}$, die aus vier Elementen besteht, und setzen wir $4 := |C|$, usw. Mit Hilfe von weiteren Potenzmengen können wir beliebig große endliche Mengen konstruieren und somit Existenz von beliebig großen natürlichen Zahlen zeigen.

Allerdings muss man weiter die Operationen in \mathbb{N} mit Hilfe von Mengenoperationen definieren und alle notwendige Eigenschaften beweisen. Z.B. man definiert die Summe von Kardinalzahlen als

$$|A| + |B| = |A \cup B|,$$

vorausgesetzt, dass die Mengen A und B disjunkt sind. Danach definiert man die negativen Zahlen und die Operationen in \mathbb{Z} .

In der zweiten Methode wird die Menge \mathbb{N} axiomatisch mit Hilfe von *Peano-Axiomen* definiert. Eine Menge \mathbb{N} heißt die Menge von natürlichen Zahlen und die Elementen von \mathbb{N} heißen natürliche Zahlen, falls es eine Abbildung $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, die die folgenden Axiome erfüllt:

1. F ist injektiv (d.h. $F(n) = F(m) \Rightarrow n = m$).
2. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$ das nicht zum Bild von F gehört (d.h. $F(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).
3. Sei M eine Teilmenge von \mathbb{N} mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $1 \in M$;
- (b) $n \in M \Rightarrow F(n) \in M$.

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Die Zahl $F(n)$ heißt der Nachfolger von n und entspricht zu $n + 1$. Das dritte Axiom ist genau das Induktionsprinzip.

Man definiert die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen per Induktion wie folgt:

1. $n + 1 := F(n)$
2. $n + F(m) := F(n + m)$
3. $n \cdot 1 := n$
4. $n \cdot F(m) := (n \cdot m) + m$.

Die Ungleichheit ist wie folgt definiert: $n < m$ genau dann, wenn $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter werden die üblichen Eigenschaften von Addition, Multiplikation und Ungleichheit bewiesen.

Ist \mathbb{Z} schon definiert, so definiert man die *Brüche* $\frac{p}{q}$ als Paaren (p, q) von ganzen Zahlen mit $q \neq 0$. Die zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ heißen äquivalent, falls $pq' = qp'$. Die Menge von Äquivalenzklassen von Brüchen bezeichnet man mit \mathbb{Q} , und die Elementen von \mathbb{Q} heißen die rationalen Zahlen. Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ kann auch als Element von \mathbb{Q} betrachtet werden mit Hilfe der Zuordnung $n \mapsto \frac{n}{1}$.

Man definiert die Summe und das Produkt von Brüchen mit

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$
2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Auch definiert man die Ungleichheit \leq auf \mathbb{Q} : für positive b und d gilt $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad \leq bc$. Für negativen Werten von den Nennern gibt es eine offensichtliche Modifikation.

Man zeigt, dass die Operationen $+$, \cdot und die Relation \leq auch für Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und mit den Operationen $+$, \cdot bzw mit der Relation \leq auf \mathbb{Z} kompatibel sind. Die so definierte Menge \mathbb{Q} ist ein angeordneter Körper. Aber \mathbb{Q} erfüllt das Vollständigkeitsaxiom nicht.

Die Menge \mathbb{R} bildet man weiter mit Hilfe von dem Begriff von *Grenzwert*, was wir später besprechen.

2.9 Zahlensystem: q -adische Darstellung natürlicher Zahlen

Ein Zahlensystem ist eine Methode von bequemer Darstellung von Zahlen. Im Alltag benutzt man die dezimale Darstellung. In Rechnern wird ein anderes Zahlensystem angewandt – das Dualsystem. In diesem Abschnitt besprechen wir Darstellung

natürlicher Zahlen in einem q -adischen *Zahlensystem*, wobei $q > 1$ eine fixierte natürliche Zahl ist, die die Basis des System heißt. Für Dezimalsystem ist $q = \text{zehn}$, für Dualsystem $q = 2$.

Bezeichnen wir mit \mathbb{Z}_+ die Menge von nichtnegativen ganzen Zahlen, d.h. $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 2.16 *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{N}$ existieren genau ein $n \in \mathbb{Z}_+$ und genau eine Folge $\{a_k\}_{k=0}^n$ von ganzen Zahlen $a_k \in \{0, \dots, q-1\}$ mit $a_n \neq 0$ derart, dass*

$$x = \sum_{k=0}^n a_k q^k \quad (= a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n). \quad (2.17)$$

Definition. Die Identität (2.17) heißt die Darstellung von x im q -adischen Zahlensystem (= *das Zahlensystem zur Basis q*). Die Identität (2.17) wird in Kurzform wie folgt geschrieben:

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_0 \quad \text{oder} \quad x = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_q.$$

(mit dem Produkt nicht zu verwechseln).

Die Zahlen $\{0, \dots, q-1\}$ heißen *q -adische Ziffern*. Die Zahl a_k heißt der *Ziffernwert* an der Stelle k , und q^k heißt der *Stellenwert* an der Stelle k . Die Ziffer a_n an der höchstwertigen Stelle n muß immer positiv sein.

Die gängigsten Basen sind $q = 2$ (Dualsystem), $q = \text{zehn} := 9 + 1$ (Dezimalsystem) und $q = \text{sechzehn} := \text{zehn} + 6$ (Hexadezimalsystem).

Im Dualsystem gibt es nur zwei Ziffern 0 und 1. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 werden im Dualsystem wie folgt dargestellt:

$$1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, 1000_2, 1001_2,$$

z.B.

$$110_2 = 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 2 + 4 = 6.$$

Die Ziffern im Dezimalsystem sind 0, 1, 2, ..., 9. Im Hexadezimalsystem sind die Ziffern 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F, wobei die Buchstaben die Ziffern zwischen zehn und fünfzehn bezeichnen. Zum Beispiel, es gilt

$$C3F_{\text{hex}} = (F + 3 \cdot q + C \cdot q^2)_{\text{hex}} = (15 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 16^2)_{\text{dez}} = 3135_{\text{dez}}.$$

Der Satz 2.16 bedeutet, dass jede natürliche Zahl sich im q -adischen System eindeutig darstellen lässt. Für den Beweis brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.17 (Ganzzahlige Division) *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ existiert genau ein $y \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, \dots, q-1\}$ mit*

$$x = qy + r. \quad (2.18)$$

Diese Darstellung heißt die *ganzzahlige Division* von x durch q . Die Zahl y heißt der *Quotient* und r heißt der *Rest* der ganzzahligen Division.

Beweis. Für die Existenz setzen wir $y = \left[\frac{x}{q} \right]$ (=die Gaußklammer von $\frac{x}{q}$), so dass

$$y \leq \frac{x}{q} < y + 1.$$

Es folgt, dass

$$qy \leq x < qy + q,$$

und somit

$$0 \leq x - qy < q.$$

Setzen wir

$$r := x - qy,$$

so dass (2.18) erfüllt ist. Die Zahl r ist ganz und erfüllt $0 \leq r < q$, woraus folgt

$$r \in \{0, \dots, q - 1\}.$$

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es noch eine solche Darstellung

$$x = qy' + r'$$

gibt. Daraus folgt, dass

$$r - r' = q(y - y').$$

Ist $y \neq y'$, z.B. $y > y'$, so gilt $y - y' \geq 1$ und $q(y - y') \geq q$ während $r - r' \leq q - 1$. Somit ist $y = y'$ und dann auch $r = r'$. ■

Im nächsten Beweis benutzen wir die folgende Variante des Induktionsprinzips (siehe Aufgaben). Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $A(1)$ ist wahr;
- (ii) für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt folgendes: ist $A(k)$ wahr für alle natürliche $k < n$, so ist $A(n)$ auch wahr.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsschritt für diese Version des Induktionsprinzips ist “von $< n$ nach n ”, im Gegenteil zum kanonischen Induktionsschritt “von $n - 1$ nach n ”.

Beweis von dem Satz 2.16. Zunächst beweisen wir per Induktion nach $x \in \mathbb{N}$ die Existenz der q -adischen Darstellung (2.17). Bezeichnen wir mit $A(x)$ die Aussage, dass eine q -adische Darstellung von x existiert. Induktionsanfang für $x = 1$: (2.17) ist erfüllt mit $n = 0$ und $a_0 = 1$.

Induktionsschritt von $< x$ nach x bedeutet folgendes: angenommen, dass $A(y)$ für alle $y < x$ gilt, zu beweisen, dass $A(x)$ gilt. So, nehmen wir an, dass es für jedes $y \in \mathbb{N}$ mit $y < x$ eine q -adische Darstellung gibt, und beweisen wir die Existenz der q -adischen Darstellung für x .

Wir benutzen die ganzzahlige Division von x durch q , d.h. die Identität (2.18). Ist $y = 0$ so ist $x = a_0$ mit $a_0 = r$ die q -adische Darstellung von x . Sonst gilt $1 \leq y < x$ und nach Induktionsvoraussetzung hat y eine q -adische Darstellung

$$y = \sum_{k=0}^m b_k q^k.$$

Einsetzen in (2.18) ergibt eine q -adische Darstellung von x wir folgt:

$$\begin{aligned} x &= r + qy = r + q \sum_{k=0}^m b_k q^k \\ &= r + \sum_{k=0}^m b_k q^{k+1} \\ &= r + \sum_{l=1}^{m+1} b_{l-1} q^l \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^{m+1} a_l q^l = \sum_{l=0}^n a_l q^l, \end{aligned}$$

wobei $a_0 = r$, $a_l = b_{l-1}$ für $l \geq 1$, und $n = m + 1$.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit der q -adischen Darstellung (2.17), auch per Induktion nach x . Für $x < q$ gibt es nur eine Darstellung $x = a_0$ mit $n = 0$ (ist $n \geq 1$ so gilt $x \geq a_n q^n \geq q$). Sei $x \geq q$. Dann $n \geq 1$ und wir haben

$$x = a_n q^n + \dots + a_1 q + a_0 = q (a_n q^{n-1} + \dots + a_1) + a_0 = qy + a_0,$$

wobei

$$y = a_n q^{n-1} + \dots + a_1. \quad (2.19)$$

Da $x = qy + a_0$ die ganzzahlige Division ist, so sind y und a_0 eindeutig bestimmt. Da $y < x$, so ist die q -adische Darstellung (2.19) von y eindeutig bestimmt nach der Induktionsvoraussetzung, woraus folgt, dass der Wert von n und alle Ziffern a_1, \dots, a_n auch eindeutig bestimmt sind. ■

Die q -adische Darstellung von reellen Zahlen (Kommazahlen) wird später besprochen.

2.10 * Schriftliche Addition und Multiplikation

Wir besprechen kurz schriftliche Addition und Multiplikation mit Hilfe von q -adischer Darstellung. Betrachten wir zwei natürliche Zahlen im q -adischen System

$$x = (a_n \dots a_0)_q = \sum_{k=0}^n a_k q^k$$

und

$$y = (b_m \dots b_0)_q = \sum_{k=0}^m b_k q^k.$$

Ist $n > m$ so erweitern wir die Folge $\{b_k\}_{k=0}^m$ zu $\{b_k\}_{k=0}^n$ indem wir $b_k = 0$ für alle $k > m$ setzen. Im Fall $n < m$ erweitern wir analog $\{a_k\}_{k=0}^n$. So, ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $n = m$. Die schriftliche Addition basiert auf der offensichtlichen Identität

$$x + y = \sum_{k=0}^n a_k q^k + \sum_{k=0}^n b_k q^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) q^k,$$

d.h.

$$x + y = \sum_{k=0}^n c_k q^k, \quad (2.20)$$

wobei $c_k = a_k + b_k$. Gilt $c_k \leq q - 1$ für alle k , so erhalten wir schon die q -adische Darstellung von $x + y$:

$$x + y = (c_n \dots c_0)_q.$$

Gibt es ein k mit $c_k \geq q$, so setzen wir

$$l = \min \{k : c_k \geq q\}.$$

Ganzzahlige Division von c_l durch q ergibt

$$c_l = dq + r,$$

wobei $r \in \{0, \dots, q - 1\}$ and $d \in \mathbb{N}$ (übrigens ist $d = 1$ da $c_l = a_l + b_l < 2q$). Somit gilt

$$c_l q^l = r d^l + d q^{l+1},$$

und man ersetzt zwei Glieder in der Summe (2.20) wie folgt:

$$\begin{array}{l} c_l q^l \text{ durch } r q^l \\ c_{l+1} q^{l+1} \text{ durch } (c_{l+1} + d) q^{l+1} \end{array}$$

so dass der Wert der Summe bleibt unverändert und der Koeffizient vor q^l schon $\leq q - 1$ ist. Dieses Verfahren heißt *Übertrag* von d von der Stelle l nach der Stelle $l + 1$. Dann holt man Überträge in den höheren Stellen wieder bis alle Koeffizienten $\leq q - 1$ sind.

Für dieses Verfahren braucht man die *Additionstabelle* im Voraus zu erstellen, d.h. alle Summen $a + b$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, \dots, q - 1\}$ im Voraus zu wissen.

Die schriftliche Multiplikation basiert auf der Identität

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\sum_{k=0}^n a_k q^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^m b_l q^l \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_k b_l q^{k+l}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Um $a_k b_l$ berechnen zu können braucht man zunächst die *Multiplikationstabelle* für alle Produkte $a \cdot b$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, \dots, q - 1\}$. Diese Tabelle wird mit Hilfe der Identität

$$ab = \sum_{k=1}^a b = \underbrace{b + \dots + b}_{a \text{ mal}}$$

erstellt. Die Doppelsumme (2.21) lässt sich wie folgt umformen:

$$x \cdot y = \sum_{j=0}^N c_j q^j,$$

wobei $c_j \in \mathbb{Z}_+$. Dann benutzt man Überträge wie oberhalb um alle Koeffizienten $\leq q - 1$ zu machen.

2.11 Der binomische Lehrsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Identität

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

was direkt aus den Axiomen von Addition und Multiplikation folgt. Multiplizieren dieser Identität weiter mit $a + b$ ergibt

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Hier beweisen wir eine ähnliche Identität für $(a + b)^n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Da die Summe $a + b$ auch Binom heißt, so heißt diese Identität binomische Formel oder binomischer Lehrsatz.

Für ganze Zahlen $n \geq k \geq 0$ definieren wir den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad (2.22)$$

wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$.

Es folgt aus (2.22), dass

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Z.B. wir haben

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

usw.

Satz 2.18 (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (2.23)$$

Beweis. Wir benutzen die folgende Identität: für alle $n \geq k \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \quad (2.24)$$

(siehe Aufgaben). Wir beweisen (2.23) per Induction nach n . Induktionsanfang: für $n = 1$ ist (2.23) äquivalent zu $(a+b)^1 = a+b$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l+1} b^l + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n-l+1} b^l && \text{(Wechsel } l = k+1) \\ &= a^{n+1} + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} a^{n-l+1} b^l + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} a^{n-l+1} b^l + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{l=1}^n \left(\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1} \right) a^{n-l+1} b^l + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{l=1}^n \binom{n+1}{l} a^{n-l+1} b^l + b^{n+1} && (2.24) \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} a^{n-l+1} b^l, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Z.B., es folgt aus (2.23), dass

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5. \end{aligned}$$

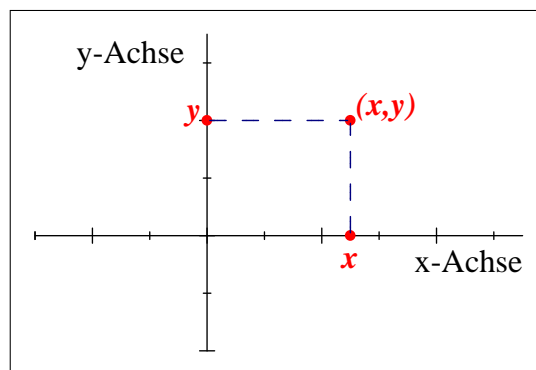
Chapter 3

Die komplexen Zahlen

3.1 Die Menge von komplexen Zahlen

Die Produktmenge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heißt die Ebene. Die Elemente von der Ebene sind die Paaren (x, y) von reellen Zahlen, und sie werden auch *Punkte* genannt. Die Zahlen x und y heißen die (kartesischen) *Koordinaten* oder *Komponenten* von dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Man stellt die Ebene als Produkt von zwei Geraden (=zwei Kopien von \mathbb{R}) dar: eine ist waagrecht und heißt die x -Achse, und andere ist senkrecht und heißt die y -Achse.



In der Ebene \mathbb{R}^2 werden Addition und Multiplikation definiert wie folgt.

Definition. Die Menge \mathbb{C} von *komplexen Zahlen* ist die Ebene \mathbb{R}^2 mit den folgenden Operationen $+$ und \cdot :

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

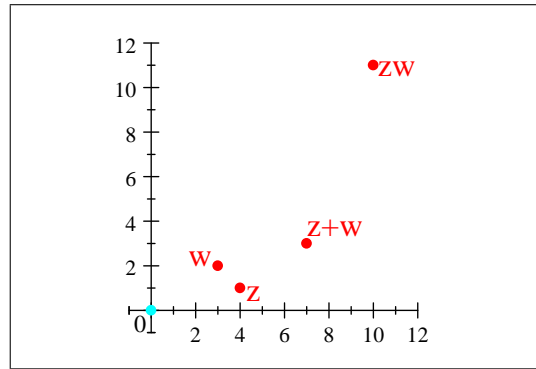
Die Elemente von \mathbb{C} heißen komplexe Zahlen.

Beispiel. Für komplexe Zahlen $z = (4, 1)$ und $w = (3, 2)$ gilt

$$z + w = (4, 1) + (3, 2) = (7, 3)$$

und

$$z \cdot w = (4, 1) \cdot (3, 2) = (4 \cdot 3 - 1 \cdot 2, 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = (10, 11).$$



Satz 3.1 Die Addition von komplexen Zahlen erfüllt alle Axiome von Addition: Kommutativ- und Assoziativgesetze, Existenz von Nullelement und Negative.

Beweis. Kommutativ- und Assoziativgesetze für komplexe Zahlen sind die Identitäten

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{und} \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Da Addition komplexer Zahlen komponentenweise definiert ist, so folgen diese Identitäten direkt aus den Axiomen der Addition in \mathbb{R} .

Das Nullelement ist $(0, 0)$, da

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y).$$

Das Negative für $z = (x, y)$ ist

$$-z := (-x, -y),$$

da $z + (-z) = 0$. ■

Die Menge \mathbb{C} hat auch das Einheitsselement $(1, 0)$, da

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y).$$

Die Existenz von Inverse und andere Eigenschaften der Multiplikation werden später bewiesen.

Für die komplexen Zahlen der Form $(x, 0)$ gelten die Regeln

$$\begin{aligned} (x, 0) + (x', 0) &= (x + x', 0) \\ (x, 0) \cdot (x', 0) &= (xx', 0). \end{aligned}$$

Wir identifizieren jede reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ und somit betrachten die Menge \mathbb{R} als eine Teilmenge von \mathbb{C} . Wichtig ist, dass die Operationen Addition und Multiplikation in \mathbb{R} und \mathbb{C} übereinstimmen.

Die komplexe Zahl $(x, 0)$ wird einfach mit x bezeichnen. Insbesondere wird das Nullelement $(0, 0)$ mit 0 bezeichnet, und das Einheitsselement $(1, 0)$ – einfach mit 1 .

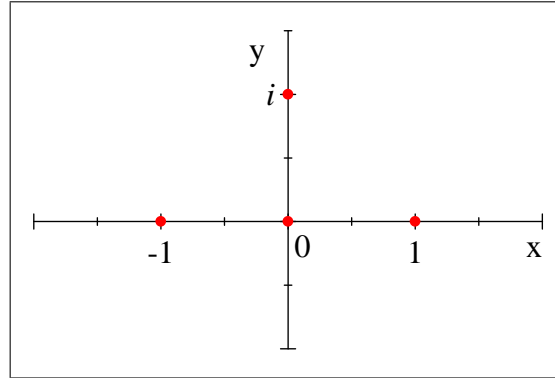
Die komplexe Zahl $(0, 1)$ ist besonders wichtig und wird mit i bezeichnet. Die Zahl $i = (0, 1)$ heißt die *imaginäre Einheit*. Nach Definition haben wir

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

so that

$$i^2 = -1.$$

Diese Identität ist eine von Motivationen die Menge von reellen Zahlen zu erweitern, da es in \mathbb{R} keine Zahl x mit $x^2 = -1$ gibt.



0.05.17

Bemerken wir, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{C}$,

$$a \cdot (x, y) = (a, 0) \cdot (x, y) = (ax, ay),$$

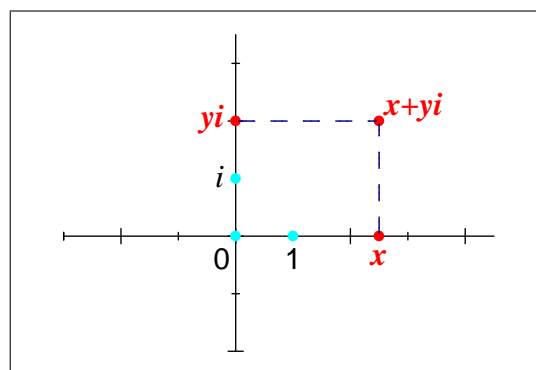
and analog

$$(x, y) \cdot a = (xa, ya) = (ax, ay),$$

woraus folgt

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0, 1) = x + yi = x + iy.$$

Somit kann jede komplexe Zahl in der Form $x + yi$ (oder $x + iy$) dargestellt werden. Diese Darstellung heißt die *kartesische* oder *algebraische* Form der komplexen Zahl. Z.B., wir haben $0 = 0 + 0i$, $1 = 1 + 0i$, $i = 0 + 1i$.



Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt die Komponente x *Realteil* und y *Imaginärteil* von z . Man schreibt:

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im} z,$$

so dass

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Offensichtlich ist z reell genau dann, wenn $\operatorname{Im} z = 0$. Komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re} z = 0$ heißen *imaginär*.

In der kartesischen Form sehen die Rechenregeln von komplexen Zahlen wie folgt aus:

$$\boxed{(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')}$$

und

$$\boxed{(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)}$$

Man addiert und multipliziert die Ausdrücke $x + iy$ und $x' + iy'$ genau so, wie die reellen Zahlen, aber mit der zusätzlichen Regel $i^2 = -1$.

Beispiel. Für $z = 4 + i$ und $w = 3 + 2i$ gilt

$$z + w = (4 + i) + (3 + 2i) = 7 + 3i$$

und

$$zw = (4 + i)(3 + 2i) = (4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (4 \cdot 2 + 1 \cdot 3)i = 10 + 11i.$$

3.2 Eigenschaften von Multiplikation

Satz 3.2 *Multiplikation von komplexen Zahlen erfüllt die Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributivgesetze, d.h. für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten:*

- (a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Kommutativgesetz)
- (b) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (Assoziativgesetz)
- (c) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (Distributivgesetz)

Somit gelten in \mathbb{C} alle Axiome von Addition und Multiplikation außer Existenz von Inverse, was später bewiesen wird.

Beweis. Setzen wir $z_k = x_k + iy_k$ wobei $x_k, y_k \in \mathbb{R}$.

(a) Wir haben nach Definition

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

und

$$z_2 z_1 = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1) + i(x_2 y_1 + y_2 x_1),$$

so dass $z_1 z_2 = z_2 z_1$ nach dem Kommutativgesetz in \mathbb{R} .

(c) Wir haben

$$z_1 z_3 = (x_1 x_3 - y_1 y_3) + i(x_1 y_3 + y_1 x_3)$$

und

$$z_2 z_3 = (x_2 x_3 - y_2 y_3) + i(x_2 y_3 + y_2 x_3),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
 z_1 z_3 + z_2 z_3 &= x_1 x_3 - y_1 y_3 + x_2 x_3 - y_2 y_3 \\
 &\quad + i(x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_2 y_3 + y_2 x_3) \\
 &= (x_1 + x_2) x_3 - (y_1 + y_2) y_3 \\
 &\quad + i((x_1 + x_2) y_3 + (y_1 + y_2) x_3) \\
 &= (z_1 + z_2) z_3,
 \end{aligned}$$

wobei wir das Distributivgesetz in \mathbb{R} benutzt haben,

(b) Jetzt beweisen das Assoziativgesetz

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3). \quad (3.1)$$

Bemerken wir zunächst, dass das (3.1) im folgenden speziellen Fall gilt: wenn jede Zahl z_k entweder reell oder imaginär ist. Zum Beispiel, sind alle z_1, z_2, z_3 reell, so gilt (3.1) nach dem Assoziativgesetz in \mathbb{R} . Sind alle z_1, z_2, z_3 imaginär, d.h. $z_k = iy_k$, so haben wir

$$(z_1 z_2) z_3 = (iy_1 \cdot iy_2) \cdot iy_3 = -(y_1 y_2) \cdot iy_3 = -i((y_1 y_2) \cdot y_3) = -i(y_1 y_2 y_3)$$

und

$$z_1 (z_2 z_3) = iy_1 \cdot (iy_2 \cdot iy_3) = iy_1 \cdot -(y_2 y_3) = -i(y_1 \cdot (y_2 y_3)) = -i(y_1 y_2 y_3),$$

woraus (3.1) wieder folgt. Im Fall wenn z_1 reell ist und z_2, z_3 imaginär, erhalten wir

$$(z_1 z_2) z_3 = (x_1 \cdot iy_2) \cdot iy_3 = i(x_1 y_2) \cdot iy_3 = -(x_1 y_2) y_3 = -x_1 y_2 y_3$$

und

$$z_1 (z_2 z_3) = x_1 \cdot (iy_2 \cdot iy_3) = x_1 \cdot -(y_2 y_3) = -x_1 (y_2 y_3) = -x_1 y_2 y_3,$$

so dass (3.1) erfüllt ist. Analog beweist man (3.1) für alle andere Kombinationen von reellen und imaginären Zahlen z_1, z_2, z_3 .

Im allgemeinen Fall von $z_k \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\begin{aligned}
 z_1 &= a_1 + ia_2 \quad \text{mit } a_1 = x_1, \quad a_2 = y_1 \\
 z_2 &= b_1 + ib_2 \quad \text{mit } b_1 = x_2, \quad b_2 = y_2 \\
 z_3 &= c_1 + ic_2 \quad \text{mit } c_1 = x_3, \quad c_2 = y_3,
 \end{aligned}$$

d.h.

$$z_1 = \sum_{k=1}^2 a_k, \quad z_2 = \sum_{l=1}^2 b_l, \quad z_3 = \sum_{m=1}^2 c_m.$$

Nach dem Distributivgesetz gilt

$$z_1 z_2 = \sum_{k=1}^2 a_k \sum_{l=1}^2 b_l = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (a_k b_l)$$

und

$$(z_1 z_2) z_3 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (a_k b_l) \cdot \sum_{m=1}^2 c_m = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 (a_k b_l) c_m.$$

Analog erhalten wir

$$z_1(z_2z_3) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 a_k(b_l c_m).$$

Nach dem speziellen Fall des Assoziativgesetzes gilt

$$(a_k b_l) c_m = a_k (b_l c_m),$$

woraus (3.1) folgt. ■

3.3 Konjugation

Für komplexe Zahlen gibt es eine neue Operation – die *Konjugation*.

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Konjugierte* \bar{z} durch

$$\boxed{\bar{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}.$$

Offensichtlich gilt $\bar{\bar{z}} = z$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und $\bar{\bar{z}} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 3.3 Für Konjugation gelten die folgenden Identitäten, für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

- (a) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- (b) $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$
- (c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (Additivität)
- (d) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ (Multiplikativität)

Beweis. (a) + (b) Setzen wir $z = x + iy$. Dann gilt $\bar{z} = x - iy$ und

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z$$

und

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2.$$

(c) + (d) Sei $w = u + iv$. Für die Summe haben wir

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(x + u) + i(y + v)} = (x + u) - i(y + v) \\ &= (x - iy) + (u - iv) = \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned}$$

Für das Produkt gilt

$$zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

und

$$\bar{z}\bar{w} = (x - iy)(u - iv) = (xu - yv) - i(xv + yu) = \overline{zw}$$

was zu beweisen war. ■

3.4 Betrag

Erinnern wir uns den Begriff des *Betrages* von reellen Zahlen: für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Es folgt, dass Betrag die folgenden Eigenschaften erfüllt (siehe Aufgaben):

- $|x|^2 = x^2$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|xy| = |x| |y|$.

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ definieren wir den Betrag $|z|$ als die einzige nicht negative reelle Zahl mit

$$\boxed{|z|^2 = z\bar{z}},$$

oder, äquivalent,

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}.$$

Nach dem Satz 3.4 ist $z\bar{z}$ eine nicht negative reelle Zahl, so dass $\sqrt{z\bar{z}}$ wohldefiniert ist. Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt diese Definition des Betrages mit dem Definition des Betrages für reellen Zahlen überein, da in diesem Fall $\bar{z} = z$.

Nach dem Satz 3.3 gilt für $x = x + iy$ die Identität

$$\boxed{|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.2)$$

Insbesondere gilt $|z| \geq 0$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

Es folgt aus (3.2), dass

$$|\bar{z}| = |z|$$

und

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

Satz 3.4 *Der Betrag hat die folgenden Eigenschaften, für alle $z, w \in \mathbb{C}$:*

- (a) $|zw| = |z| |w|$ (Multiplikativität)
- (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. (a) Nach Multiplikativität der Konjugation erhalten wir

$$|zw|^2 = zw \overline{zw} = zw \bar{z} \bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2 |w|^2 = (|z| |w|)^2,$$

woraus $|zw| = |z| |w|$ folgt.

(b) Bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Da $\operatorname{Re} z \leq |z|$, so erhalten wir weiter

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

woraus die Dreiecksungleichung folgt. ■

23.05.17

Für beliebige Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir den *Abstand* $d(a, b)$ zwischen a und b wie folgt:

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Man kann d als eine Abbildung von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ nach \mathbb{R} betrachten. Insbesondere gilt $d(a, 0) = |a|$ so dass $|a|$ der Abstand zwischen z und 0 ist.

Korollar 3.5 *Der Abstand hat die folgenden Eigenschaften:*

- $d(a, a) = 0$ und $d(a, b) > 0$ für $a \neq b$ (Positivität);
- $d(a, b) = d(b, a)$ (Symmetrie);
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung).

Beweis. Die Positivität und Symmetrie sind trivial, die Dreiecksungleichung wird wie folgt bewiesen:

$$d(a, b) = |a - b| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| = d(a, b) + d(b, c),$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für den Betrag benutzt haben (Satz 3.4). ■

Bemerkung. Für $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ gilt

$$d(a, b) = |a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Die Dreiecksungleichung lässt sich wie folgt umformulieren:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} + \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2},$$

für alle reelle a_k, b_k, c_k .

Definition. Ein Dreieck ist eine Folge $\{a, b, c\}$ von drei verschiedenen Punkten von \mathbb{R}^2 . Die Punkte a, b, c werden *Ecken* des Dreiecks genannt.

Beispiel. Für das Dreieck mit den Ecken

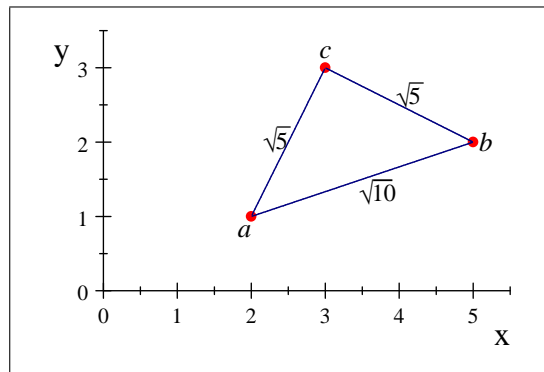
$$a = (2, 1), \quad b = (5, 2), \quad c = (3, 3),$$

bestimmen wir die Abstände zwischen den Ecken:

$$d(a, b) = \sqrt{(2-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$d(a, c) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(b, c) = \sqrt{(5-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$



3.5 Inverse und Division

Das Inverse von $z \in \mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl z^{-1} mit

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Im nächsten Satz beweisen wir die Existenz von Inverse und somit Existenz von Division von komplexen Zahlen. Somit erfüllt \mathbb{C} alle Axiome von Addition und Multiplikation so dass \mathbb{C} ein Körper ist.

Satz 3.6 (a) Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat das Inverse wie folgt:

$$\boxed{z^{-1} = |z|^{-2} \bar{z}}. \quad (3.3)$$

Es gilt auch

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}.$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $aw = b$ eine eindeutige Lösung $w = a^{-1}b$, was mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet wird. Es gelten die Identitäten:

$$\boxed{\frac{b}{a} = |a|^{-2} \bar{a}b \quad \text{und} \quad \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{|b|}{|a|}}. \quad (3.4)$$

Beweis. (a) Wir haben

$$(|z|^{-2} \bar{z})z = |z|^{-2} (\bar{z}z) = |z|^{-2} |z|^2 = 1,$$

so dass $|z|^{-2} \bar{z}$ das Inverse von z ist. Es folgt aus (3.3), dass

$$|z^{-1}| = |z|^{-2} |z| = |z|^{-2} |z| = |z|^{-1},$$

was zu beweisen war.

(b) Die Gleichung $aw = b$ ist äquivalent zu

$$a^{-1}(aw) = a^{-1}b,$$

woraus $w = a^{-1}b$ folgt. Da $a^{-1} = |a|^{-2} \bar{a}$, so erhalten wir

$$w = |a|^{-2} \bar{a}b.$$

Auch gilt

$$\left| \frac{b}{a} \right| = |a^{-1}b| = |a^{-1}| |b| = \frac{|b|}{|a|}.$$

■

Beispiel. Berechnen wir

$$\frac{4 - 3i}{1 + 2i}.$$

Man kann die Formel (3.4) benutzen oder, äquivalent, den Nenner und Zähler mit der Konjugierte des Nenners multiplizieren:

$$\frac{4 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-2 - 11i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i.$$

3.6 Winkel und Winkelfunktionen

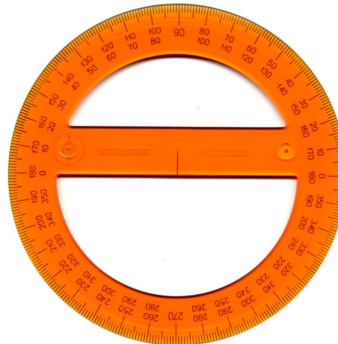
Definition. Definieren wir den *Einheitskreis* \mathbb{S} mit

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Z.B., die Punkte $1, -1, i, -i$ sind Elemente von \mathbb{S} . Auch der Punkt $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ liegt in \mathbb{S} .

Definition. Die Elemente von \mathbb{S} heißen *Polarwinkel* oder einfach *Winkel*.

Motivation für diese Definition von Winkel ist wie folgt. Normalerweise unter Winkel versteht man eine Figur aus zwei Halbgeraden mit gleichem Anfangspunkt. Die Winkel lassen sich messen, z.B. mit einem Winkelmesser.



Man richtet eine Gerade nach der Nullmarke des Gerätes, und dann zeigt die zweite Gerade den Punkt auf dem Kreis, neben denen das Gradmaß geschrieben ist. Deshalb identifizieren wir den Winkel mit dem Punkten auf dem Kreis. Eine Zuordnung zwischen den Punkten des Kreises und reellen Zahlen (Gradmaß) wird später bestimmt werden.

Obwohl \mathbb{S} eine Teilmenge von \mathbb{C} ist, wir betrachten \mathbb{S} unabhängig von \mathbb{C} und sogar benutzen unterschiedliche Notation für die Elemente von \mathbb{S} und \mathbb{C} . Insbesondere werden die Elemente von \mathbb{S} mit griechischen Buchstaben bezeichnet und die Elemente von \mathbb{C} – wie üblich mit lateinischen Buchstaben.

Zu jedem Polarwinkel $\alpha \in \mathbb{S}$ entspricht eine komplexe Zahl z_α , die α als Element von \mathbb{C} darstellt. Eigentlich bezeichnen z_α und α den gleichen Punkt in \mathbb{C} aber wir betrachten α als Element von \mathbb{S} und z_α – als Element von \mathbb{C} .

Definition. In \mathbb{S} wird die Operation *Winkeladdition* wie folgt definiert: für $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$ definieren wir der Winkel $\alpha + \beta \in \mathbb{S}$ durch die Identität

$$\boxed{z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta}. \quad (3.5)$$

Bemerken wir, dass nach dem Satz 3.4 gilt

$$|z_\alpha z_\beta| = |z_\alpha| |z_\beta| = 1,$$

so dass $z_\alpha z_\beta$ wirklich einen Winkel bestimmt, der $\alpha + \beta$ genannt wird. Es folgt aus dem Satz 3.2, dass die Winkeladdition kommutativ und assoziativ ist.

Definieren wir den *Nullwinkel* $0 \in \mathbb{S}$ mit

$$z_0 = 1.$$

Dann gilt

$$\alpha + 0 = \alpha$$

da

$$z_{\alpha+0} = z_\alpha z_0 = z_\alpha \cdot 1 = z_\alpha.$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{S}$ definieren wir das *Negative* $-\alpha \in \mathbb{S}$ mit

$$z_{-\alpha} := (z_\alpha)^{-1} = \overline{z_\alpha}. \quad (3.6)$$

Nach dem Satz 3.6 gilt $|(z_\alpha)^{-1}| = |z_\alpha|^{-1} = 1$ so dass $(z_\alpha)^{-1}$ einen Winkel bestimmt. In (3.6) haben wir auch benutzt, dass

$$(z_\alpha)^{-1} = |z_\alpha|^{-2} \overline{z_\alpha} = \overline{z_\alpha}.$$

Es gilt

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

da

$$z_{\alpha+(-\alpha)} = z_\alpha z_{-\alpha} = z_\alpha (z_\alpha)^{-1} = 1 = z_0.$$

Deswegen erfüllt die Winkeladdition alle Axiome von Addition, und somit ist \mathbb{S} eine additive Gruppe.

Bezeichnen wir mit π den Winkel mit

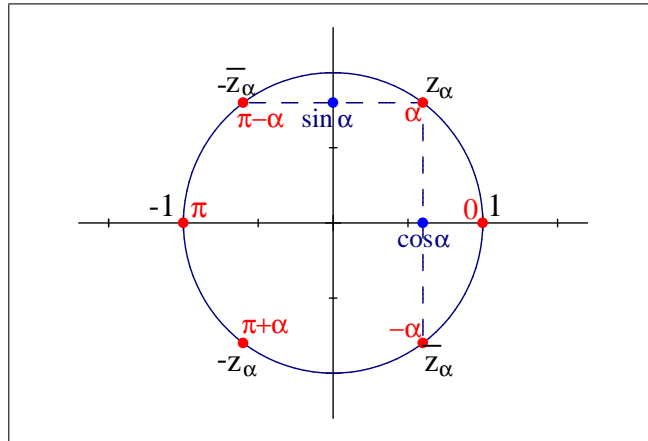
$$z_\pi = -1.$$

Dann gilt

$$z_{-\pi} = \overline{z_\pi} = \overline{-1} = -1 = z_\pi,$$

so dass $-\pi = \pi$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{S}$ gilt

$$z_{\pi+\alpha} = z_\pi z_\alpha = -z_\alpha.$$



Definition. Für jedes $\alpha \in \mathbb{S}$ definieren wir $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ mit

$$\cos \alpha = \operatorname{Re} z_\alpha, \quad \sin \alpha = \operatorname{Im} z_\alpha,$$

was zur folgenden Identität äquivalent ist:

$$z_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (3.7)$$

Die Abbildung $\cos : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Kosinusfunktion* und $\sin : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – *Sinusfunktion*. Man definiert auch die *Tangensfunktion*

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

für alle α mit $\cos \alpha \neq 0$. Die Funktionen \cos , \sin , \tan heißen auch *Winkelfunktionen*.

Z.B., da $z_0 = 1 = 1 + 0i$ und $z_\pi = -1 = -1 + 0i$, so erhalten wir

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0.$$

Satz 3.7 Die Winkelfunktionen erfüllen die folgenden Identitäten für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$:

- (a) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- (c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Die Identitäten (b) und (c) heißen *Additionstheoreme*. Es folgt aus (a), dass

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Beweis. Es folgt aus (3.7), dass

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = |z_\alpha|^2 = 1,$$

was (a) beweist. Nach (3.5) gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta), \end{aligned}$$

woraus (b) und (c) folgen, ■

Für jedes $\alpha \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Winkel $n\alpha \in \mathbb{S}$ per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$1\alpha := \alpha, \quad (n+1)\alpha := n\alpha + \alpha.$$

Insbesondere gilt:

$$2\alpha = \alpha + \alpha, \quad 3\alpha = 2\alpha + \alpha, \quad \text{usw.}$$

Es folgt, dass¹

$$z_{n\alpha} = (z_\alpha)^n.$$

Nach den Eigenschaften der Potenzen (2.8), die auch für die komplexen Zahlen gelten, erhalten wir

$$(n+m)\alpha = n\alpha + m\alpha \quad \text{und} \quad n(m\alpha) = (nm)\alpha. \quad (3.8)$$

Tatsächlich haben wir

$$z_{(n+m)\alpha} = (z_\alpha)^{n+m} = (z_\alpha)^n (z_\alpha)^m = z_{n\alpha} z_{m\alpha} = z_{n\alpha+m\alpha}$$

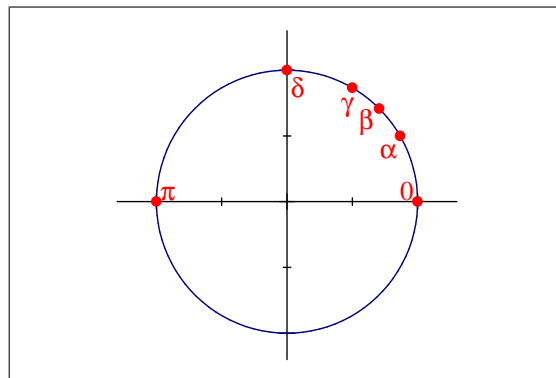
und

$$z_{n(m\alpha)} = (z_{m\alpha})^n = ((z_\alpha)^m)^n = z_\alpha^{nm} = z_{(nm)\alpha},$$

was (3.8) beweist.

Beispiel. Betrachten wir die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die wie folgt definiert werden:

- $z_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $z_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $z_\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_\delta = i$



¹Die Potenzen z^n einer komplexen Zahl z werden genau so induktiv definiert wie für reelle Zahlen:

$$z^1 = z \quad \text{und} \quad z^{n+1} = z^n z.$$

Die Eigenschaften von Potenzen, die mit Ungleichungen nicht verbunden sind, gelten auch für komplexe Zahlen, z.B. der binomische Lehrsatz.

Wir haben

$$z_{2\delta} = (z_\delta)^2 = i^2 = -1 = z_\pi,$$

so dass

$$2\delta = \pi.$$

Deshalb wird der Winkel δ auch $\frac{\pi}{2}$ genannt. Es folgt, dass $z_{\frac{\pi}{2}} = i$ und somit

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Es gilt

$$z_{2\beta} = (z_\beta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = i = z_\delta$$

so dass

$$2\beta = \delta \quad \text{und} \quad 4\beta = \pi.$$

Der Winkel β wird $\frac{\pi}{4}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

und somit

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es gilt

$$z_{3\gamma} = (z_\gamma)^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1 = z_\pi$$

so dass

$$3\gamma = \pi.$$

Der Winkel γ wird $\frac{\pi}{3}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

und somit

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Es gilt

$$z_{2\alpha} = (z_\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_\gamma,$$

so dass

$$2\alpha = \gamma \quad \text{und} \quad 6\alpha = \pi.$$

Der Winkel α wird $\frac{\pi}{6}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

und

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel. Betrachten wir den Winkel ε mit

$$z_\varepsilon = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{i}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Man kann zeigen, dass diese Zahl den Betrag 1 hat, so dass der Winkel ε wohldefiniert ist, und dass

$$z_{5\varepsilon} = (z_\varepsilon)^5 = -1 = z_\pi,$$

so dass $5\varepsilon = \pi$. Der Winkel ε wird $\frac{\pi}{5}$ genannt.

Es gibt das Verfahren von *Halbieren* des Winkels: für jedes $\alpha \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$ existiert genau ein $\beta \in \mathbb{S}$ mit $2\beta = \alpha$ und $\sin \beta > 0$ (siehe Aufgaben). Der Winkel β wird $\frac{\alpha}{2}$ genannt. Per Induktion erhält man den Winkel $\frac{\alpha}{2^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Z.B. so erhält man die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ aus π und $\frac{\pi}{6}$ aus $\frac{\pi}{3}$.

3.7 Polarkoordinaten

Definition. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir $\arg z$ als der Winkel α mit

$$z_\alpha = \frac{z}{|z|}.$$

Der Wert $\arg z$ heißt das *Argument* von z oder der *Polarwinkel* von z .

Da $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, so ist der Winkel α wohldefiniert. Man kann \arg betrachten als eine Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}$. Geometrisch bestimmt $\arg z$ die Richtung von 0 nach z durch ein Element von \mathbb{S} .

Satz 3.8 Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\boxed{\arg(zw) = \arg z + \arg w} \quad (3.9)$$

und

$$\boxed{\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w}. \quad (3.10)$$

Beweis. Sei $\alpha = \arg z$, $\beta = \arg w$ und $\gamma = \arg(zw)$. Dann gilt

$$z_\alpha = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad z_\beta = \frac{w}{|w|},$$

woraus folgt

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta = \frac{z}{|z|} \frac{w}{|w|} = \frac{zw}{|zw|} = z_\gamma$$

und somit

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

was äquivalent zu (3.9). Man erhält (3.10) aus (3.9) wie folgt. Es gilt nach (3.9)

$$\arg \frac{z}{w} + \arg w = \arg \left(\frac{z}{w} w \right) = \arg z.$$

Addieren zu den beiden Seiten von $-\arg w$ ergibt (3.10). ■

Beispiel. Sei a eine reelle Zahl, $a \neq 0$. Im Fall $a > 0$ gilt $\arg a = 0$, da $\frac{a}{|a|} = 1$ und $z_0 = 1$. Im Fall $a < 0$ gilt $\arg a = \pi$, da $\frac{a}{|a|} = -1$ und $z_\pi = -1$. Es folgt aus (3.9), dass

$$\arg(az) = \arg z \quad \text{für } a > 0$$

und

$$\arg(az) = \arg z + \pi \quad \text{für } a < 0.$$

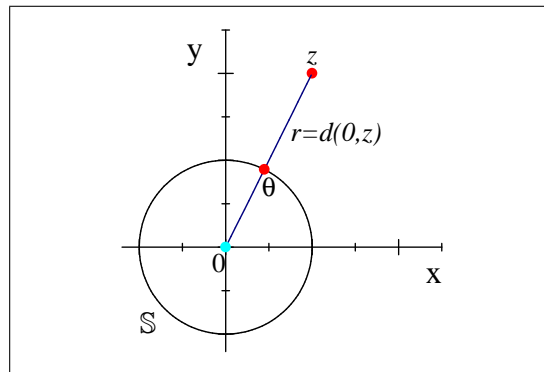
Da $\arg i = \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$\arg(iz) = \arg z + \frac{\pi}{2}.$$

Bezeichnen wir $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entspricht ein Paar (r, θ) mit

$$r := |z| \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad \theta := \arg z \in \mathbb{S}.$$

Die Elemente des Paares (r, θ) heißen *Polarkoordinaten* von z , wobei r *Polarradius* ist und θ – Polarwinkel. Offensichtlich r ist gleich der Abstand zwischen 0 und z , und θ zeigt die *Richtung* von 0 nach z .



Da

$$\frac{z}{|z|} = z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta,$$

so erhalten wir die folgende Beziehung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten:

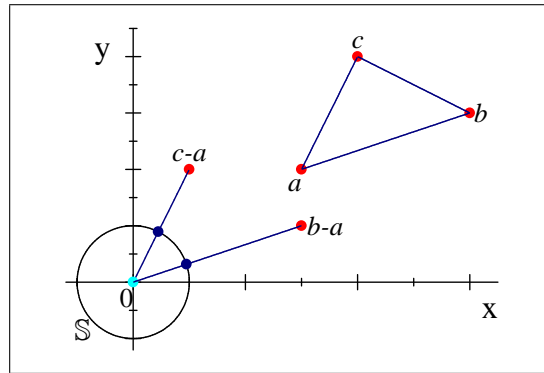
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \theta + i(r \sin \theta). \quad (3.11)$$

Umgekehrt, für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ und jedes $\theta \in \mathbb{S}$ hat die komplexe Zahl (3.11) die Polarkoordinaten (r, θ) .

3.8 Winkel im Dreieck

Definition. Im Dreieck $\{a, b, c\}$ definieren wir den Winkel $\angle cab$ an der Ecke a mit

$$\angle cab = \arg(c - a) - \arg(b - a).$$



Analog definiert man den Winkel an der Ecke b

$$\angle abc = \arg(a - b) - \arg(c - b)$$

und den Winkel an der Ecke c :

$$\angle bca = \arg(b - c) - \arg(a - c).$$

Bemerken wir, dass

$$\angle bac = \arg(b - a) - \arg(c - a) = -\angle cab,$$

was bedeutet, dass die Winkel im Dreieck *orientiert* sind, d.h. abhängig von der Anordnung der Ecken.

Bemerken wir auch, dass die in der Definition benutzten Folgen cab , abc , und bca die *zyklischen* Permutationen von abc sind, d.h. die Teilfolgen von $abcabc$ wie folgt: $\underline{abc}abc$, $\underline{abc}abc$, $\underline{abc}abc$.

Satz 3.9 Im beliebigen Dreieck $\{a, b, c\}$ bezeichnen wir die Winkel wie folgt

$$\alpha = \angle cab, \quad \beta = \angle abc, \quad \gamma = \angle bca.$$

Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Nach dem Satz 3.8 haben wir

$$\alpha = \arg \frac{c - a}{b - a}, \quad \beta = \arg \frac{a - b}{c - b}, \quad \gamma = \arg \frac{b - c}{a - c}$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg \left(\frac{c - a}{b - a} \frac{a - b}{c - b} \frac{b - c}{a - c} \right).$$

Bemerken wir:

$$\frac{c - a}{b - a} \frac{a - b}{c - b} \frac{b - c}{a - c} = (-1)^3 = -1,$$

woraus folgt, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(-1) = \pi.$$

■

3.9 Geraden

Definition. Eine Gerade ist eine Teilmenge G von \mathbb{R}^2 der Form

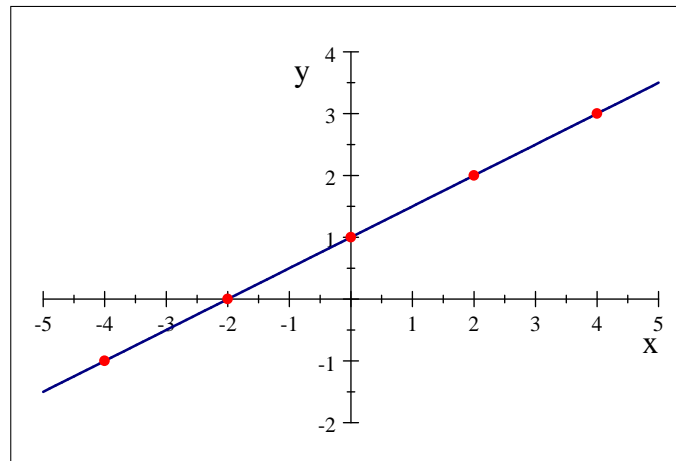
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$$

wobei a, b, c reelle Zahlen mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sind. Man sagt, dass die Gleichung

$$ax + by = c$$

die Gerade G bestimmt.

Z.B. die Gleichung $y = 0$ bestimmt die x -Achse, und die Gleichung $x = 0$ bestimmt die y -Achse, so dass die beiden Achsen Geraden sind. Die Gleichung $x - 2y = -2$ bestimmt die Gerade auf dem Bild unterhalb. Diese Gerade enthält, z.B., die Punkte $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 3)$ usw.



Für beliebige zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die *affine Hülle* von p, q als die folgende Teilmenge von \mathbb{R}^2 :

$$\text{affine}(p, q) = \{(1 - t)p + tq : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.12)$$

Der Punkt $(1 - t)p + tq$ mit $t \in \mathbb{R}$ heißt eine affine Kombination von p, q . Bemerken wir, dass $\text{affine}(p, q)$ die Punkte p und q enthält, für $t = 0$ bzw $t = 1$. Im Fall $p = q$ besteht die affine Hülle aus einem Punkt p . Für verschiedene p, q ist die affine Hülle eine Gerade durch p und q , was im folgenden Satz besagt wird.

Satz 3.10 *Für zwei beliebige verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Gerade G die p und q enthält. Darüber hinaus gilt*

$$G = \text{affine}(p, q). \quad (3.13)$$

Es folgt, dass jede Gerade eine affine Hülle von zwei verschiedenen Punkten ist, und dass die affine Hülle von zwei verschiedenen Punkten eine Gerade ist.

Beweis. Bezeichnen wir die Komponenten von p und q wie folgt:

$$p = (x_1, y_1) \quad \text{und} \quad q = (x_2, y_2) \quad (3.14)$$

Zunächst zeigen wir, dass es eine Gerade G durch p und q gibt. Die Gleichung der Gerade durch p und q lässt sich explizit wie folgt angeben²:

$$\boxed{(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1}. \quad (3.15)$$

Da $p \neq q$, so gilt $x_1 \neq x_2$ oder $y_1 \neq y_2$ und somit $a = y_2 - y_1 \neq 0$ oder $b = x_1 - x_2 \neq 0$. Für $x = x_1$ und $y = y_1$ ist diese Gleichung offensichtlich erfüllt, so dass $p = (x_1, y_1) \in G$. Für $x = x_2$ und $y = y_2$ ist (3.15) auch erfüllt, da

$$\begin{aligned} (y_2 - y_1)x_2 - (x_2 - x_1)y_2 &= y_2x_2 - y_1x_2 - x_2y_2 + x_1y_2 \\ &= -y_1x_2 + x_1y_2 \\ &= (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1, \end{aligned}$$

woraus $q = (x_2, y_2) \in G$ folgt.

Jetzt beweisen wir, dass jede Gerade G , die p und q enthält, stimmt mit affine (p, q) überein. Angenommen, dass die Gleichung von G ist

$$ax + by = c, \quad (3.16)$$

beweisen wir zunächst, dass

$$\text{affine}(p, q) \subset G, \quad (3.17)$$

d.h. jeder Punkt

$$z = (1 - t)p + tq$$

auf G liegt. Sei $z = (x, y)$ d.h.

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2 \quad \text{und} \quad y = (1 - t)y_1 + ty_2. \quad (3.18)$$

Die beiden Punkte p, q erfüllen die Gleichung der Gerade, d.h.

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{und} \quad ax_2 + by_2 = c. \quad (3.19)$$

Multiplizieren die erste Gleichung mit $(1 - t)$, die zweite Gleichung mit t und Addieren zweier Gleichungen ergibt

$$ax + by = (1 - t)c + tc = c,$$

woraus (3.17) folgt.

Es bleibt zu beweisen, dass

$$G \subset \text{affine}(p, q).$$

Sei $z = (x, y)$ ein Punkt auf G , d.h. x und y erfüllen (3.16). Beweisen wir, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit (3.18). Betrachten wir zunächst den Fall wenn $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Es folgt, dass $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Die erste Gleichung in (3.18) ist äquivalent zu

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.20)$$

²Im Fall $x_1 \neq x_2$ lässt sich (3.15) wie folgt vereinfachen:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

und die zweite Gleichung ist äquivalent zu

$$t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.21)$$

Mit Hilfe von Subtrahieren der Gleichungen erhalten wir aus (3.19) und (3.16), dass

$$a(x - x_1) = -b(y - y_1)$$

und

$$a(x_2 - x_1) = -b(y_2 - y_1).$$

Dividieren die erste Gleichung durch die zweite ergibt (3.21).

Sei $a = 0$ und somit $b \neq 0$. Dann erhalten wir aus (3.19) und (3.16), dass

$$y_1 = y_2 = y = \frac{c}{b}.$$

Definieren wir t mit (3.20), so dass die erste Gleichung in (3.18) erfüllt ist. Dann gilt die zweite Gleichung in (3.18) automatisch, da $y = y_1 = y_2$. Der Fall $b = 0$ ist analog. ■

Wenn man den Wert von t in (3.12) zum Intervall $[0, 1]$ einschränkt, so erhält man die *konvexe Hülle* von p, q :

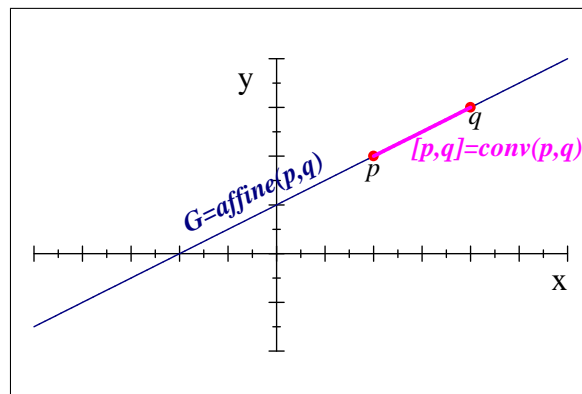
$$\text{conv}(p, q) = \{(1 - t)p + tq : t \in [0, 1]\}.$$

Der Punkt $(1 - t)p + tq$ mit $t \in [0, 1]$ heißt eine konvexe Kombination von p, q . Offensichtlich ist $\text{conv}(p, q)$ eine Teilmenge von $\text{affine}(p, q)$. Die konvexe Hülle von p, q enthält die beiden Punkten p, q (für $t = 0$ bzw $t = 1$) sowie auch den Mittelpunkt $\frac{p+q}{2}$ (für $t = \frac{1}{2}$).

Im Fall wenn p, q verschieden und reell sind (d.h. p, q liegen auf der x -Achse), es gilt

$$\text{affine}(p, q) = \mathbb{R} \text{ und } \text{conv}(p, q) = [p, q]$$

(siehe Aufgabe 20). Für beliebige verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ wird die konvexe Hülle von p, q die *Strecke* zwischen p und q genannt und auch als $[p, q]$ bezeichnet.



3.10 Graphen von Funktionen

Eine Funktion ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wobei X und Y Teilmengen von \mathbb{R} oder \mathbb{C} sind. In diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ wobei I ein Intervall in \mathbb{R} ist.

Definition. Für jede Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den *Graph* von f als die folgende Menge:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}.$$

In anderen Worten, Γ_f ist die Teilmenge von \mathbb{R}^2 die die folgende Gleichung $y = f(x)$ erfüllt.

3.10.1 Lineare Funktion

Eine *lineare Funktion* ist die Funktion der Form

$$f(x) = ax + b$$

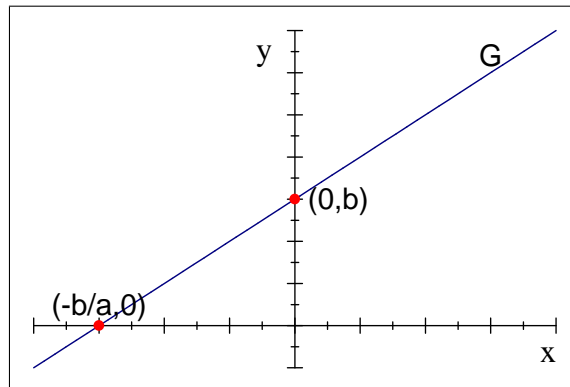
mit reellen $a, b \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich von f ist \mathbb{R} . Der Graph Γ_f hat die Gleichung

$$y = ax + b, \quad (3.22)$$

was eine Gerade G ist. Im Fall $a = 0$ ist diese Gerade waagrecht.

Sei jetzt $a \neq 0$. Die Gerade G wird von zwei Punkten bestimmt. Offensichtlich liegen die folgenden zwei Punkten auf G :

$$(0, b) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{b}{a}, 0\right).$$

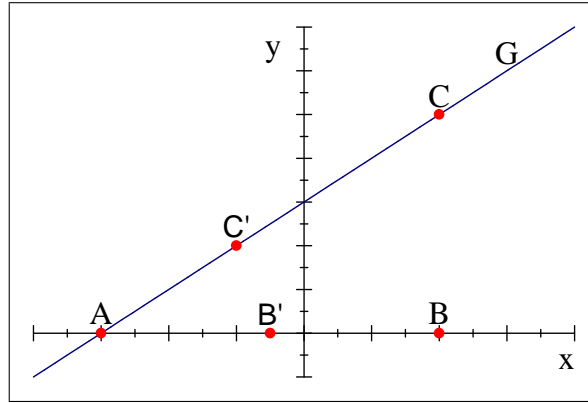


Setzen wir $A = (-b/a, 0)$. Seien B ein Punkt auf der x -Achse und C – ein Punkt auf G mit

$$\operatorname{Re} B > \operatorname{Re} A \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} C > \operatorname{Re} A. \quad (3.23)$$

Definition. Der Winkel $\alpha = \angle CAB$ heißt der Winkel zwischen dem Gerade G und der x -Achse. Der Wert $\tan \alpha$ heißt die *Neigung* der Gerade G .

Satz 3.11 *Der Winkel α ist unabhängig von der Wahl der Punkte B und C (wobei A eindeutig bestimmt ist). Darüber hinaus gilt es $\tan \alpha = a$.*



Beweis. Seien C' und B' noch andere Punkte auf G bzw x -Achse mit

$$\operatorname{Re} B' > \operatorname{Re} A \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} C' > \operatorname{Re} A. \quad (3.24)$$

Nach dem Satz 3.10 gilt für einige $t, s \in \mathbb{R}$

$$C' = (1 - t)A + tC \quad \text{und} \quad B' = (1 - s)A + sB,$$

woraus folgt

$$C' - A = t(C - A) \quad \text{und} \quad B' - A = s(B - A).$$

Die Bedingungen (3.23) und (3.24) ergeben $t > 0$ und $s > 0$. Wir erhalten

$$\frac{C' - A}{B' - A} = \frac{t(C - A)}{s(B - A)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \angle C'AB' &= \arg \frac{C' - A}{B' - A} = \arg \left(\frac{t(C - A)}{s(B - A)} \right) = \arg \frac{t}{s} + \arg \frac{C - A}{B - A} \\ &= \arg \frac{C - A}{B - A} = \angle CAB, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Hier haben wir benutzt, dass $\frac{t}{s} > 0$ und deshalb $\arg \frac{t}{s} = 0$.

Um $\tan \alpha$ zu berechnen, wählen ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x > -b/a = \operatorname{Re} A$$

und setzen

$$B = (x, 0) \quad \text{und} \quad C = (x, ax + b).$$

Offensichtlich liegt B auf x -Achse, C auf G , und die Bedingungen (3.23) sind erfüllt. Die Punkte A, B, C als komplexe Zahlen haben die folgenden Darstellungen:

$$A = -b/a, \quad B = x, \quad C = x + i(ax + b).$$

Dann erhalten wir

$$\alpha = \arg \frac{C - A}{B - A} = \arg \frac{(x + b/a) + i(ax + b)}{x + b/a} = \arg(1 + ai),$$

woraus folgt

$$z_\alpha = \frac{1 + ai}{|1 + ai|} = \frac{1 + ai}{\sqrt{1 + a^2}}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Somit erhalten wir

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = a.$$

■

0.06.17

3.10.2 Transformationen der Ebene

Eine *Transformation* der Ebene ist eine bijektive Selbstabbildung von \mathbb{C} . In diesem Abschnitt definieren wir spezielle Transformationen: Rotation und Translation.

Definition. Sei w eine komplexe Zahl. Eine *Translation* der Ebene um w (genannt auch *Parallelverschiebung*) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T_w &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ T_w(z) &= z + w. \end{aligned}$$

Wenn man die komplexe Zahl w für Translation T_w benutzt, so wird w auch *Vektor* (oder *Verschiebungsvektor*) genannt. Offensichtlich hat die Abbildung T_w die inverse Abbildung T_{-w} , da

$$T_w \circ T_{-w} = T_{-w} \circ T_w = \text{Id}.$$

Insbesondere ist T_w bijektiv.

Definition. Für jeden Winkel $\alpha \in \mathbb{S}$ definieren wir die *Rotation* (*Drehung*) R_α der Ebene als die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} R_\alpha &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ R_\alpha(z) &= z_\alpha z \end{aligned}$$

wobei $z_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Bemerken wir, dass die inverse Abbildung $(R_\alpha)^{-1}$ existiert und erfüllt

$$(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha},$$

da

$$R_\alpha \circ R_{-\alpha}(z) = z_\alpha z_{-\alpha} z = z_0 z = z$$

und somit

$$R_\alpha \circ R_{-\alpha} = \text{Id} = R_{-\alpha} \circ R_\alpha.$$

Für $z = x + iy$ berechnen wir $R_\alpha(z)$ explizit wie folgt:

$$\begin{aligned} R_\alpha(z) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha) + i(x \sin \alpha + y \cos \alpha). \end{aligned}$$

Z.B., für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$R_{\frac{\pi}{2}}(z) = (-y, x)$$

und für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$R_{\frac{\pi}{4}}(z) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + i \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Rotation R_α und Translation T_w von \mathbb{R}^2 haben die folgende Eigenschaft: unter jeder von diesen Abbildungen bleiben die Abstände zwischen den Punkten in \mathbb{R}^2 und die Winkel in den Dreiecken erhalten (siehe Aufgaben). Jede Transformation von \mathbb{R}^2 mit diesen Eigenschaften heißt *Bewegung*. Man kann beweisen, dass jede Bewegung von \mathbb{R}^2 eine Komposition $T_w \circ R_\alpha$ ist. Die Komposition von zwei Bewegungen ist wieder eine Bewegung, und die inverse Abbildung von Bewegung ist auch Bewegung. Somit ist die Menge von allen Bewegungen von \mathbb{R}^2 eine (nicht kommutative) Gruppe bezüglich Komposition.

Als ein Beispiel von Anwendung der Begriffe von Translation und Rotation, beweisen wir die folgende Behauptung.

Satz 3.12 *Der Graph Γ_f der linearen Funktion*

$$f(x) = ax + b$$

lässt sich wie folgt darstellen:

$$\Gamma_f = T_w \circ R_\alpha(X), \quad (3.25)$$

wobei X die x -Achse ist, $w = (-b/a, 0)$ und $\tan \alpha = a$.

Beweis. Die Menge X besteht aus den reellen Zahlen $x = x + 0i$. Somit besteht $R_\alpha(X)$ aus den Punkten

$$R_\alpha(x) = z_\alpha x = x \cos \alpha + ix \sin \alpha,$$

und $T_w \circ R_\alpha(X)$ besteht aus den Punkten

$$T_w(R_\alpha(x)) = (x \cos \alpha - b/a) + ix \sin \alpha.$$

Da x beliebige reelle Zahl ist, so ist auch

$$t := x \cos \alpha - b/a$$

reell und beliebig. Dann gilt

$$x \sin \alpha = \frac{t + b/a}{\cos \alpha} \sin \alpha = (t + b/a) \tan \alpha = (t + b/a) a = at + b = f(t).$$

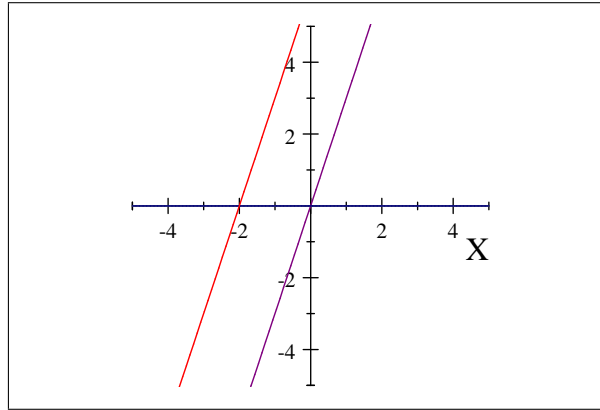
Somit besteht $T_w \circ R_\alpha(X)$ aus den Punkten der Form $(t, f(t))$, woraus (3.25) folgt.

■

Beispiel. Betrachten wir die lineare Funktion

$$f(x) = 3x + 6.$$

Nach dem Satz 3.12 gilt $\Gamma_f = T_{(-2,0)} \circ R_\alpha(X)$ wie auf dem Bild.



3.10.3 Quadratische Funktion

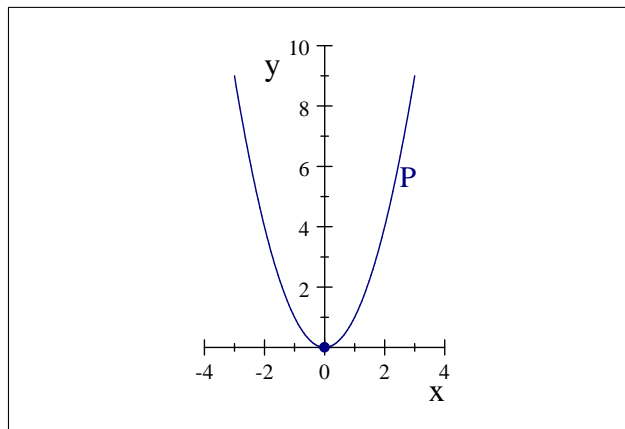
Eine *quadratische Funktion* ist die Funktion der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

wobei a, b, c reelle Koeffizienten sind und $a \neq 0$. Der Definitionsbereich ist \mathbb{R} .

Definition. Der Graph der speziellen quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ heißt die *Parabel* oder auch *Normalparabel* und wird mit P bezeichnet.

Die Parabel sieht wie auf dem Bild aus:



Da 0 der minimale Wert für x^2 ist, so ist der Punkt $(0, 0)$ der niedrigste Punkt der Parabel. Der Punkt $(0, 0)$ heißt *Scheitelpunkt* der Parabel.

Betrachten wir jetzt die allgemeine quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Mit Hilfe von quadratischer Ergänzung erhalten wir folgendes:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a(x - x_0)^2 + y_0, \end{aligned}$$

wobei

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}. \quad (3.26)$$

Die Darstellung

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

mit reellen a, x_0, y_0 heißt die *Normalform* der quadratischer Funktion. Der Graph von f wird mit Hilfe von Translation und Dilatation gezeichnet.

Definition. Sei λ eine positive reelle Zahl. Die *Dilatation* (*Streckung*) der Ebene mit Streckfaktor λ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} D_\lambda &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ D_\lambda(z) &= \lambda z. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Dilatation bijektiv, da $D_\lambda \circ D_{\lambda^{-1}} = \text{Id}$. Unter Dilatation bleiben die Winkel erhalten, aber alle Abstände werden mit λ multipliziert.

Satz 3.13 Sei P die Normalparabel. Der Graph Γ_f der Funktion

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

mit $a > 0$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$\Gamma_f = T_w \circ D_\lambda(P), \quad (3.27)$$

mit $w = (x_0, y_0)$ und $\lambda = 1/a$.

Der Graph Γ_f heißt auch Parabel. Der Scheitelpunkt ist in diesem Fall w .

Beweis. Die Parabel P besteht aus den Punkten (x, x^2) mit $x \in \mathbb{R}$. Somit besteht das Bild $D_\lambda(P)$ aus den Punkten

$$(\lambda x, \lambda x^2),$$

und das Bild $T_w \circ D_\lambda(P)$ besteht aus den Punkten

$$(\lambda x, \lambda x^2) + w = (\lambda x + x_0, \lambda x^2 + y_0).$$

Setzen wir

$$t := \lambda x + x_0.$$

Da x beliebige reelle Zahl ist, so ist t auch beliebig und reell. Dann gilt

$$x = \frac{1}{\lambda}(t - x_0)$$

und

$$\lambda x^2 + y_0 = \lambda \frac{1}{\lambda^2}(t - x_0)^2 + y_0 = \frac{1}{\lambda}(t - x_0)^2 + y_0 = f(t),$$

da $\frac{1}{\lambda} = a$. Somit besteht $T_w \circ D_\lambda(P)$ aus den Punkten $(t, f(t))$ mit beliebigen $t \in \mathbb{R}$, woraus (3.27) folgt. ■

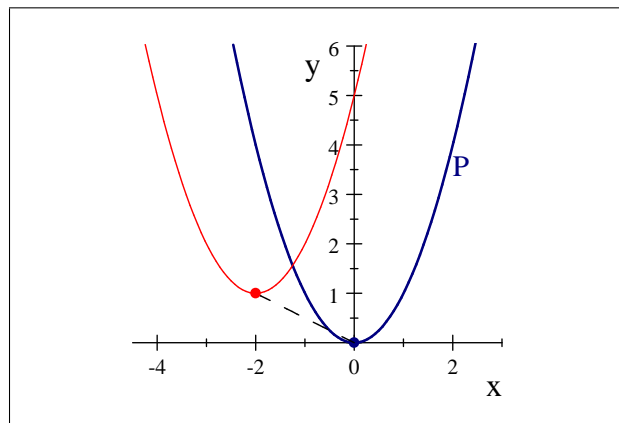
Beispiel. Zeichnen wir den Graph der Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x + 5.$$

Wir haben

$$f(x) = (x + 2)^2 + 1.$$

Nach dem Satz 3.13 gilt $\Gamma_f = T_{(-2,1)}(P)$ wie auf dem Bild.



Beispiel. Zeichnen wir den Graph der Funktion

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 9.$$

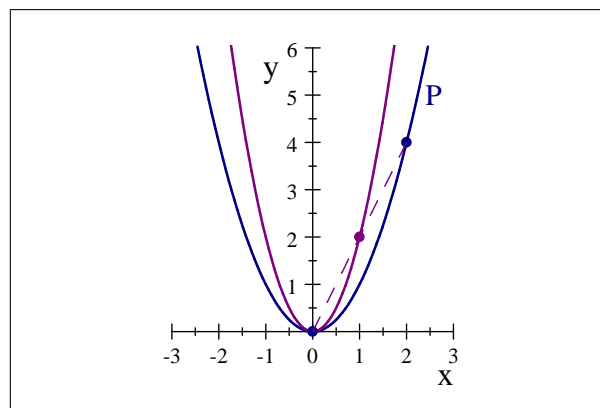
Wir haben

$$f(x) = 2 \left(x^2 + 4x + \frac{9}{2} \right) = 2 \left((x + 2)^2 + \frac{1}{2} \right) = 2(x + 2)^2 + 1.$$

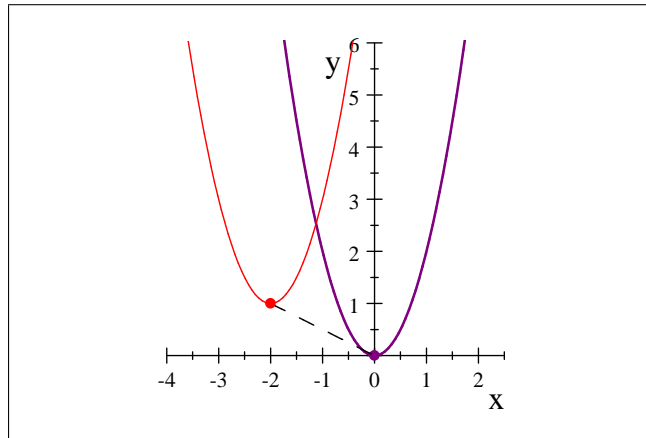
Somit erhalten wir

$$\Gamma_f = T_{(-2,1)} \circ D_{1/2}(P).$$

Zunächst zeichnen wir $D_{1/2}(P)$ wie folgt:



Danach wenden wir die Translation $T_{(-2,1)}$ an und erhalten Γ_f wie auf dem Bild.



Betrachten wir jetzt die Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit $a < 0$. In diesem Fall zeichnet man zuerst den Graph der Funktion

$$g(x) = -f(x) = -ax^2 - bx - c.$$

Dann erhält man den Graph Γ_f aus dem Graph Γ_g mit Hilfe von *Spiegelung*:

$$\begin{aligned} S &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ S(z) &= \bar{z}. \end{aligned}$$

In der Tat gilt

$$(x, f(x)) = (x, -g(x)) = S(x, g(x)),$$

so dass

$$\Gamma_f = S(\Gamma_g).$$

Beispiel. Zeichnen wir den Graph von

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

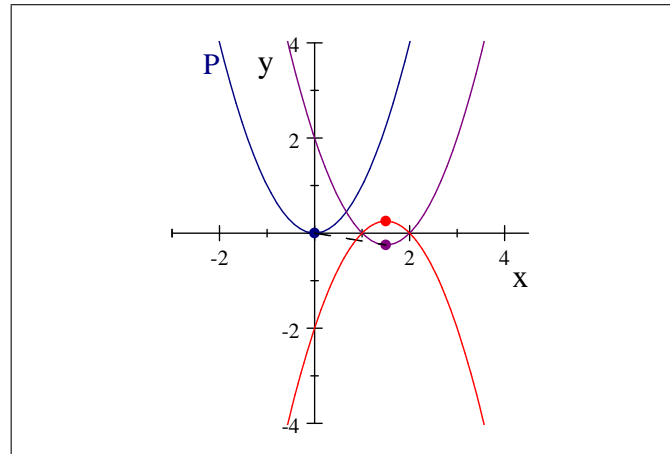
Zunächst zeichnen wir den Graph Γ_g von

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

als

$$\Gamma_g = T_{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)}(P)$$

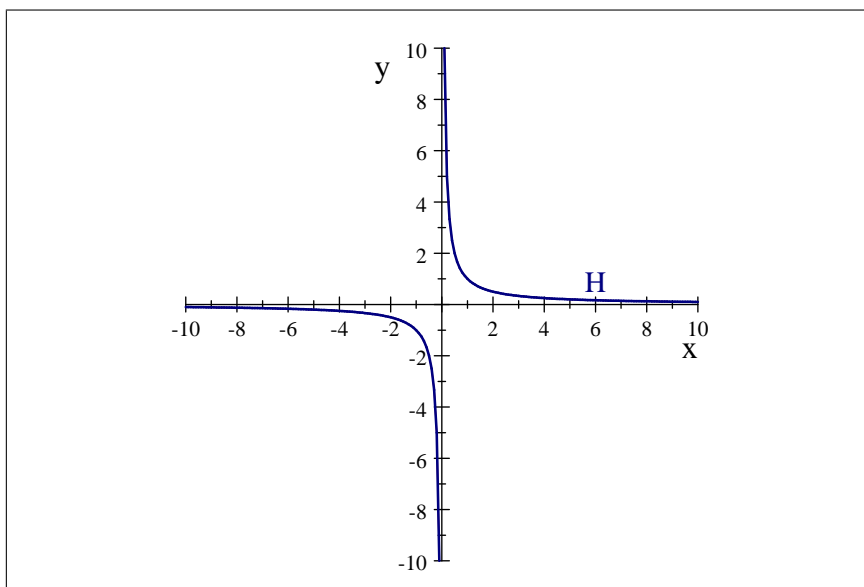
Dann zeichnen wir $\Gamma_f = S(\Gamma_g)$ wie folgt.



3.10.4 Hyperbel

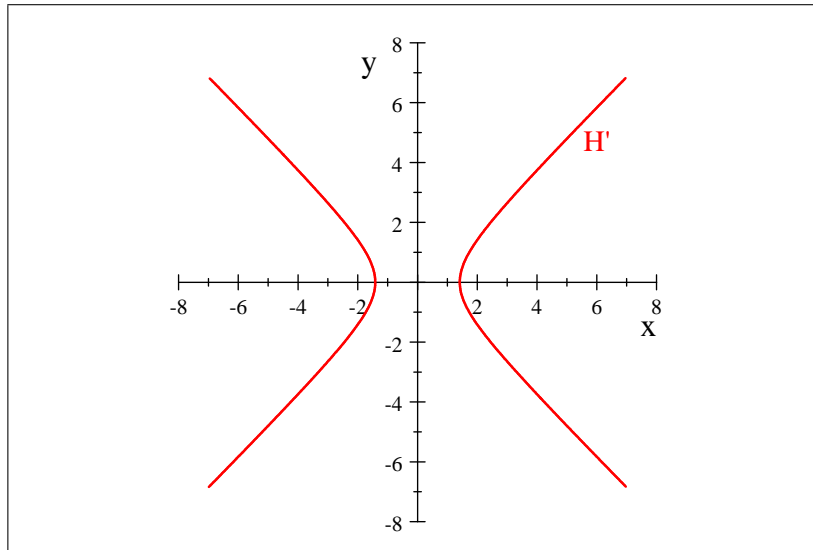
Es gibt zwei Definitionen von *Hyperbel* als eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Definition. Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt *Hyperbel* oder *Normalhyperbel* und wird mit H bezeichnet.



Definition. Die Hyperbel H' ist die Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = 2.$$



Die Beziehung zwischen zwei Versionen von Hyperbel wird im nächsten Satz angegeben.

Satz 3.14 *Es gilt*

$$R_{\frac{\pi}{4}}(H') = H \quad (3.28)$$

und

$$H' = R_{-\frac{\pi}{4}}(H). \quad (3.29)$$

Beweis. Sei $z = x + iy$ ein Punkt auf H' . Setzen wir $w = R_{\frac{\pi}{4}}(z)$ und bemerken, dass

$$w = \frac{x - y}{\sqrt{2}} + i \frac{x + y}{\sqrt{2}} = u + iv,$$

wobei

$$u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

Die Komponenten x, y erfüllen die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 2,$$

d.h.

$$(x - y)(x + y) = 2$$

und somit

$$\frac{x - y}{\sqrt{2}} \frac{x + y}{\sqrt{2}} = 1,$$

was äquivalent zu

$$uv = 1 \quad (3.30)$$

ist, d.h. zu $w \in H$. Somit erhalten wir (3.28). Die Identität (3.29) folgt aus (3.28), da $R_{-\pi/4} = R_{\pi/4}^{-1}$. ■

06.06.17

Betrachten wir jetzt eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (3.31)$$

mit reellen a, b, c, d und $c \neq 0$. Diese Funktion heißt *gebrochen lineare Funktion*. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, da für $x = -d/c$ der Nenner gleich 0 ist. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gehört auch zu dieser Klasse von Funktionen.

Die Funktion (3.31) lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{1}{c} \frac{ax + b}{x + d/c} \\ &= \frac{1}{c} \frac{a(x + d/c) + (b - ad/c)}{x + d/c} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \frac{b - ad/c}{x + d/c} \\ &= \frac{k}{x - x_0} + y_0 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{c} \left(b - \frac{ad}{c} \right) = \frac{bc - ad}{c^2} \\ x_0 &= -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Die Darstellung

$$f(x) = \frac{k}{x - x_0} + y_0 \quad (3.32)$$

heißt die *Normalform* der gebrochen linearen Funktion. Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Satz 3.15 Sei $k > 0$. Dann für die Funktion (3.32) gilt

$$\Gamma_f = T_w \circ D_\lambda(H) \quad (3.33)$$

mit $w = (x_0, y_0)$ und $\lambda = \sqrt{k}$.

Beweis. Die Hyperbel H besteht aus den Punkten $(x, \frac{1}{x})$ wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das Bild $D_\lambda(H)$ besteht aus den Punkten $(\lambda x, \frac{\lambda}{x})$, und das Bild $T_w \circ D_\lambda(H)$ besteht aus den Punkten

$$\left(\lambda x + x_0, \frac{\lambda}{x} + y_0 \right).$$

Setzen wir

$$t = \lambda x + x_0$$

so dass t eine beliebige Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ist. Dann gilt

$$x = \frac{t - x_0}{\lambda}$$

und

$$\frac{\lambda}{(t - x_0)/\lambda} + y_0 = \frac{\lambda^2}{t - x_0} + y_0 = \frac{k}{t - x_0} + y_0 = f(t).$$

Somit besteht $T_w \circ D_\lambda(H)$ aus den Punkten $(t, f(t))$, woraus (3.33) folgt. ■

Beispiel. Zeichnen wir den Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{4x + 2}{2x - 3}$$

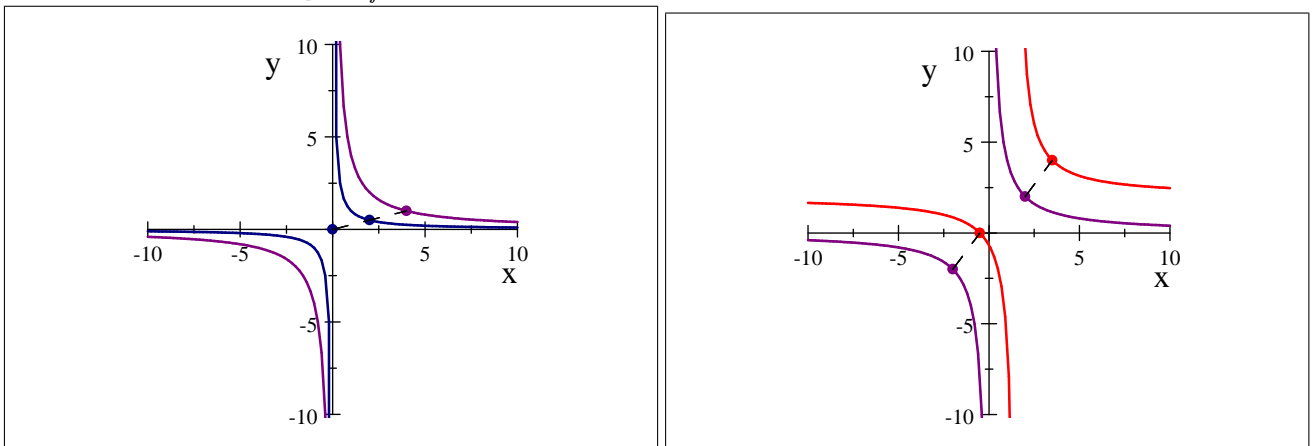
Zuerst bringen wir die Funktion zur Normalform:

$$f(x) = \frac{4x + 1/2}{2x - 3/2} = 2 \frac{(x - 3/2) + 2}{x - 3/2} = \frac{4}{x - 3/2} + 2.$$

Nach dem Satz 3.15 erhalten wir

$$\Gamma_f = T_{(3/2, 2)} \circ D_2(H).$$

Wir zeichnen den Graph Γ_f in zwei Schritten.



Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{k}{x - x_0} + y_0$$

mit $k < 0$. Dann zeichnen man den Graph von f mit Hilfe von der Identität $\Gamma_f = S(\Gamma_g)$ wobei

$$g(x) = -f(x) = \frac{-k}{x - x_0} - y_0.$$

Beispiel. Um den Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

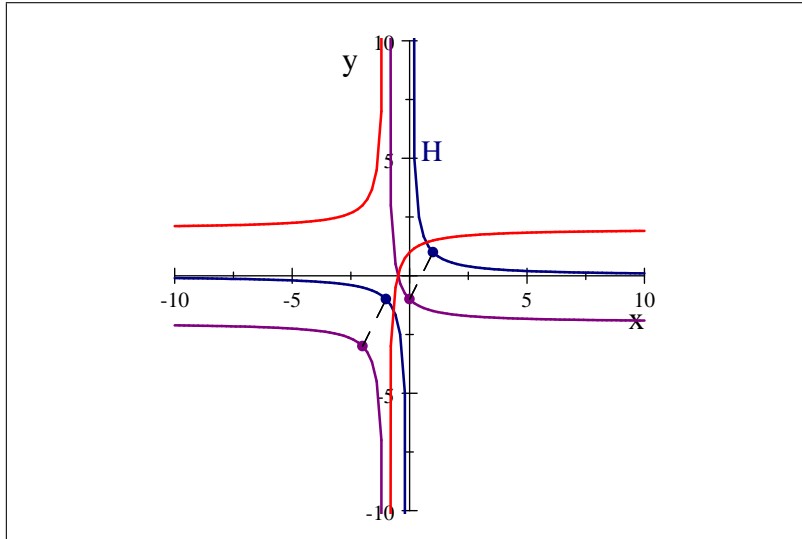
zu zeichnen, bringen wir zunächst die Funktion zur Normalform:

$$f(x) = 2 \frac{x + 1/2}{x + 1} = 2 \frac{(x + 1) - 1/2}{x + 1} = 2 - \frac{1}{x + 1}.$$

Dann zeichnen wir den Graph von

$$g(x) = -f(x) = \frac{1}{x + 1} - 2$$

mit Hilfe von $\Gamma_g = T_{(-1, -2)}(H)$, und danach $\Gamma_f = S(\Gamma_g)$.



3.10.5 Kreis

Den Einheitskreis \mathbb{S} haben wir schon wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1.\}\end{aligned}$$

Die Gleichung von \mathbb{S} ist somit $x^2 + y^2 = 1$. Die Menge \mathbb{S} ist kein Graph von Funktion, aber \mathbb{S} lässt sich als Vereinigung von zwei Graphen darstellen. Definieren wir zwei Funktionen:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

und

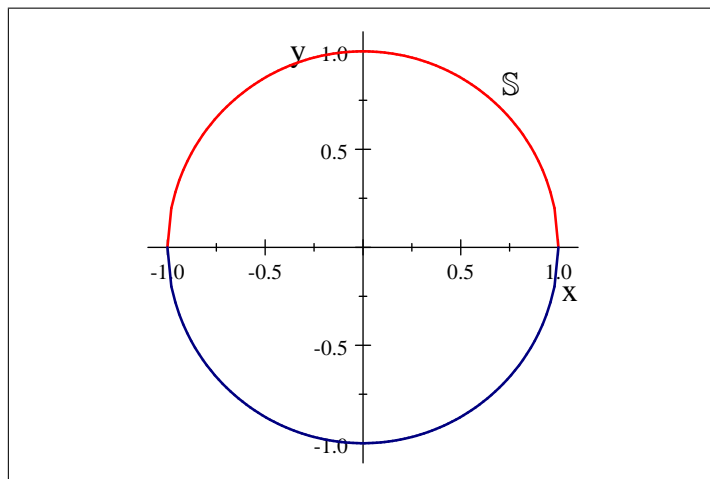
$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist äquivalent zu

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{oder} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

und $x \in [-1, 1]$, woraus folgt dass

$$\mathbb{S} = \Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}.$$



Ein allgemeiner Kreis wird wie folgt definiert.

Definition. Der Kreis von Radius $r > 0$ und mit dem Mittelpunkt $w \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$K_{w,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}.$$

Im Fall $w = 0$ und $r = 1$ erhalten wir den Einheitskreis

$$\mathbb{S} = K_{0,1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Seien $w = x_0 + iy_0$ und $z = x + iy$. Dann ist die Gleichung $|z - w| = r$ äquivalent zu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

die die Normalform der Gleichung des Kreises genannt wird.

Es folgt aus der Definition, dass

$$K_{w,r} = T_w \circ D_r(\mathbb{S}).$$

In der Tat gilt

$$D_r(\mathbb{S}) = \{rz : |z| = 1\}$$

und

$$T_w(D_r(\mathbb{S})) = \{rz + w : |z| = 1\}.$$

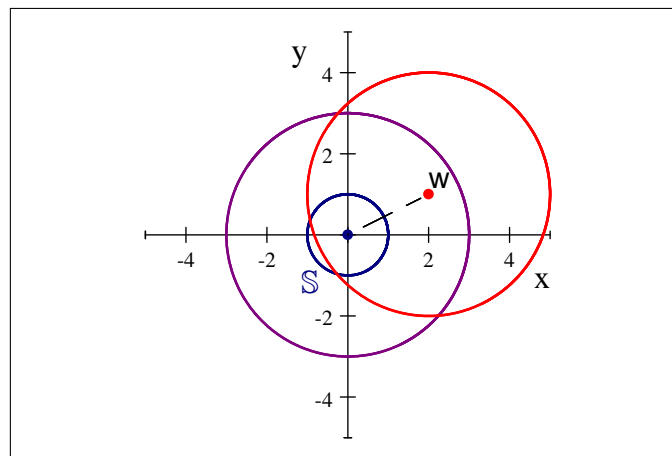
Setzen wir $z' = rz + w$. Dann gilt $z = \frac{1}{r}(z' - w)$, und die Gleichung $|z| = 1$ ist äquivalent zu

$$|z' - w| = r$$

Somit erhalten wir

$$T_w(D_r(\mathbb{S})) = \{z' : |z' - w| = r\} = K_{w,r}.$$

Z.B. hier zeichnen wir den Kreis $K_{(2,1),3}$ in zwei Schritten als $T_{(2,1)} \circ D_3(\mathbb{S})$.



Beispiel. Bestimmen wir die Teilmenge von \mathbb{R}^2 die von der folgenden Gleichung gegeben wird:

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 23 = 0.$$

Umformen wir zunächst die linke Seite mit Hilfe von der quadratischen Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x + 4y - 20 &= (x^2 + 6x) + (y^2 + 4y) - 23 \\ &= ((x + 3)^2 - 9) + ((y + 2)^2 - 4) - 23 \\ &= (x + 3)^2 + (y + 2)^2 - 36. \end{aligned}$$

Somit ist die gegebene Gleichung äquivalent zu

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36,$$

was der Gleichung des Kreises $K_{(-3,-2),6}$ ist.

3.11 Zusammenfassung

3.11.1 Operationen mit komplexen Zahlen

In diesem Kapitel haben wir die komplexe Zahlen eingeführt. Jede komplexe Zahl z hat die Form $x + iy$ mit reellen x, y , wobei x der Realteil von z und y der Imaginärteil von z heißen; man schreibt $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Man addiert und multipliziert die komplexen Zahlen mit Hilfe von gleichen Regeln wie reelle Zahlen und mit einer zusätzlichen Regel

$$i^2 = -1.$$

Z.B.

$$(1 + 2i) + (3 - 4i) = (1 + 3) + (2 - 4)i = 4 - 2i$$

und

$$\begin{aligned} (1 + 2i) \cdot (3 - 4i) &= 3 + 6i - 4i - 8i^2 \\ &= 3 + 2i + 8 \\ &= 11 + 2i. \end{aligned}$$

Man dividiert die komplexen Zahlen mit Hilfe von Konjugation

$$\bar{z} = x - iy$$

wie folgt:

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{-5 + 10i}{3^2 + 4^2} = \frac{-5 + 10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Auch mit Hilfe von Konjugation definiert man den Betrag

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z.B.

$$|3 - 5i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Der Betrag ist multiplikativ wie folgt:

$$|zw| = |z| |w| \quad \text{und} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

und erfüllt die Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Die Potenzen z^n für $n \in \mathbb{Z}$ können mit Hilfe von Multiplikation und Division berechnet werden. Allerdings ist es manchmal leichter den binomischen Lehrsatz. Man muss dafür erinnern, dass

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \text{usw.}$$

Z.B., es gilt

$$\begin{aligned} (2 + i)^4 &= 2^4 + 4 \cdot 2^3 i + 6 \cdot 2^2 i^2 + 4 \cdot 2 i^3 + i^4 \\ &= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 \\ &= -7 + 24i. \end{aligned}$$

09.06.17

3.11.2 Nullstellen von Polynomen

Warum soll man die komplexen Zahlen benutzen? Eine Motivation ist Lösung der Gleichungen. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

mit reellen a, b hat nicht immer reelle Lösung: die Nullstellen sind

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

und sie existieren als reelle Zahlen nur wenn $a^2 - 4b \geq 0$. Ist $a^2 - 4b < 0$, so hat Quadratwurzel $\sqrt{a^2 - 4b}$ die komplexen Werte (z.B. $\sqrt{-1} = \pm i$) und somit hat die quadratische Gleichung *immer* komplexwertige Nullstellen. Darüber hinaus gilt gleiches für beliebige *Polynomgleichung*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sogar mit komplexen Koeffizienten a_k und mit beliebigen Grad $n \in \mathbb{N}$: diese Gleichung hat immer komplexe Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra).

3.11.3 Geometrie der Ebene

Eine andere Motivation für die Theorie von komplexen Zahlen ist die Geometrie der Ebene. Komplexe Zahlen liefern bequeme Methoden um die geometrischen Begriffe einzuführen und die geometrischen Eigenschaften zu beweisen. Zum Beispiel, der Abstand $d(z, w)$ zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{C}$ wurde als $|z - w|$ definiert.

Wir haben den Begriff von Winkel definiert wie folgt: ein Winkel ist ein Element von dem Einheitskreis $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Für jeden Punkt von \mathbb{S} benutzen wir zwei Notationen: α als Winkel und z_α als die entsprechende komplexe Zahl. Die Realteil und Imaginärteil von z heißen Kosinus und Sinus von α , d.h.

$$z_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Die Winkeladdition wird mit Hilfe von komplexer Multiplikation definiert wie folgt: für $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$ definieren wir den Winkel $\alpha + \beta \in \mathbb{S}$ mit

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta.$$

Am Anfang es ist etwas schwierig mit den Winkel zu arbeiten, da wir kein Winkelmaß noch haben. Aber Situation ist ähnlich mit der Theorie von reellen Zahlen. Die Menge \mathbb{R} von reellen Zahlen haben wir axiomatisch definiert als eine Menge mit bestimmten Operationen. Am Anfang hatten wir praktisch keine Notation für die Zahlen. Es gab nur 0 und 1, dann haben wir die Zahlen 2, 3, ..., 9 definiert. Um alle natürliche Zahlen bezeichnen zu können, haben wir die Theorie von q -adischer Darstellung entwickelt. Aber sogar jetzt haben wir noch nicht definiert, was eine Kommazahl ist.

Die Situation mit Winkeln ist analog. Am Anfang der Theorie wurden die Winkel 0 und π definiert wie folgt:

$$z_0 = 1 \quad \text{und} \quad z_\pi = -1.$$

Danach haben wir die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ bestimmt, z.B., $\frac{\pi}{2}$ wurde durch die Eigenschaft

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

bestimmt. In der Tat arbeitet man mit den Winkeln mit Hilfe von komplexer Zahl z_α . Z.B. wir haben

$$\begin{aligned} z_{\frac{\pi}{2}} &= i \\ z_{\frac{\pi}{3}} &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{\frac{\pi}{4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_{\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das Argument (=der Polarwinkel) $\arg z$ von komplexer Zahl $z \neq 0$ wurde als der Winkel α mit

$$z_\alpha = \frac{z}{|z|}$$

definiert. Z.B. für reelle positive Zahl z gilt

$$\frac{z}{|z|} = 1 = z_0$$

und somit $\arg z = 0$. Für reelle negative Zahl z gilt

$$\frac{z}{|z|} = -1 = z_\pi$$

und somit $\arg z = \pi$.

Für $z = 4i$ gilt

$$\frac{z}{|z|} = \frac{4i}{4} = i = z_{\frac{\pi}{2}}$$

und somit $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}$.

Für $z = 3 + 3i$ gilt

$$\frac{z}{|z|} = \frac{3 + 3i}{|3 + 3i|} = \frac{3 + 3i}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} + i \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = z_{\frac{\pi}{4}}$$

so dass $\arg(3 + 3i) = \frac{\pi}{4}$.

Wir haben bewiesen, dass

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \quad \text{und} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w.$$

Mit Hilfe von $\arg z$ definieren wir die Winkel im Dreieck $\{a, b, c\}$ wobei a, b, c verschiedene komplexe Zahlen sind, insbesondere

$$\angle cab = \arg(c - a) - \arg(b - a).$$

Insbesondere gilt

$$\angle z01 = \arg z - \arg 1 = \arg z$$

und

$$\angle w0z = \arg w - \arg z = \arg \frac{w}{z}.$$

Z.B. für $w = 1 + 2i$ und $z = 6 - 3i$ haben wir

$$\angle w0z = \arg \frac{1 + 2i}{6 - 3i} = \arg \frac{(1 + 2i)(6 + 3i)}{6^2 + 3^2} = \arg \frac{15i}{45} = \arg \frac{1}{3}i = \arg i = \frac{\pi}{2}.$$

Jeder Winkel α bestimmt die Rotation der Ebene um Winkel α , die eine Abbildung $R_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$R_\alpha(z) = z_\alpha z$$

ist. Es folgt, dass für $w = R_\alpha(z)$ gilt

$$\angle w0z = \arg \frac{w}{z} = \arg z_\alpha = \alpha$$

und

$$|w| = |z_\alpha z| = |z|.$$

Man kann beweisen, dass

$$R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}.$$

3.12 * Skalar- und Kreuzprodukt

Definition. Das *Skalarprodukt* zweier komplexen Zahlen z und w wird wie folgt definiert:

$$z \bullet w = \operatorname{Re}(\bar{z}w) \quad (3.34)$$

(nicht mit der komplexen Multiplikation $z \cdot w = zw$ zu verwechseln).

Für $z = x + iy$ und $w = u + iw$ erhalten wir aus (3.34), dass

$$\bar{z}w = (x - iy)(u + iv) = (xu + yv) + i(xv - yu), \quad (3.35)$$

woraus folgt

$$z \bullet w = xu + yv.$$

Insbesondere gilt

$$z \bullet z = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Es folgt direkt aus der Definition, dass Skalarprodukt die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $z \bullet w$ ist reell;
2. $z \bullet z \geq 0$; es gilt $z \bullet z > 0$ genau dann, wenn $z \neq 0$ (Positivität);
3. $z \bullet w = w \bullet z$ (Symmetrie);
4. $(z_1 + z_2) \bullet w = z_1 \bullet w + z_2 \bullet w$ (Distributivgesetz);
5. $(\lambda z) \bullet w = \lambda(z \bullet w) = z \bullet (\lambda w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität).

Satz 3.16 Für $z, w \neq 0$ gilt

$$z \bullet w = |z||w| \cos \alpha \quad (3.36)$$

wobei

$$\alpha = \angle w0z = \arg w - \arg z. \quad (3.37)$$

Beweis. Wir haben

$$\alpha = \arg \frac{w}{z}$$

und somit

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \operatorname{Re} \frac{\frac{w}{z}}{\left| \frac{w}{z} \right|} = \operatorname{Re} \left(\frac{w}{z} \frac{|z|}{|w|} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{w}{z} \frac{|z|}{|w|} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}w}{\bar{z}z} \frac{|z|}{|w|} \right) \\ &= \frac{1}{|w||z|} \operatorname{Re}(\bar{z}w) = \frac{z \bullet w}{|z||w|}, \end{aligned}$$

woraus (3.36) folgt. ■

Satz 3.17 (Kosinussatz) *Im Dreieck $\{a, b, c\}$ setzen wir*

$$\mathbf{a} = d(b, c), \quad \mathbf{b} = d(a, c), \quad \mathbf{c} = d(a, b)$$

und

$$\alpha = \angle cab.$$

Dann gilt

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc} \cos \alpha \quad (3.38)$$

Beweis. Setzen wir $z = b - a$ und $w = c - a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= |c - a| = |w|, \\ \mathbf{c} &= |b - a| = |z| \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{a} = |b - c| = |(b - a) - (c - a)| = |z - w|.$$

Auch haben wir

$$\alpha = \arg(c - a) - \arg(b - a) = \arg w - \arg z = \angle w0z.$$

Somit ist (3.38) äquivalent zu

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w| \cos \alpha$$

mit α wie im (3.37).

Mit Hilfe von (3.36) erhalten wir

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= |z|^2 - w\bar{z} - z\bar{w} + |w|^2 \\ &= |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &= |z|^2 - 2z \bullet w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w| \cos \alpha, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Definition. Definieren wir das *Kreuzprodukt* zweier komplexen Zahlen z und w mit

$$z \times w = \operatorname{Im}(\bar{z}w).$$

Es folgt aus (3.35), dass für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gilt

$$z \times w = xv - yu.$$

Insbesondere gilt

$$z \times z = 0.$$

Das Kreuzprodukt hat die folgenden Eigenschaften, die direkt aus der Definition folgen:

1. $z \times w$ ist reell;
2. $z \times w = -w \times z$ (Antisymmetrie);
3. $(z_1 + z_2) \times w = z_1 \times w + z_2 \times w$ (Distributivgesetz);
4. $(\lambda z) \times w = \lambda(z \times w) = z \times (\lambda w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität).

Satz 3.18 Für beliebige komplexe Zahlen $z, w \neq 0$ gilt

$$z \times w = |z| |w| \sin \alpha,$$

wobei

$$\alpha = \angle w0z = \arg w - \arg z.$$

Beweis. Wir haben

$$\alpha = \arg \frac{w}{z}$$

und somit

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \operatorname{Im} \frac{\frac{w}{z}}{\left| \frac{w}{z} \right|} = \operatorname{Im} \left(\frac{w |z|}{z |w|} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{w |z|}{z |w|} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z} w |z|}{\bar{z} z |w|} \right) \\ &= \frac{1}{|w| |z|} \operatorname{Im} (\bar{z} w) = \frac{z \times w}{|z| |w|}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Satz 3.19 Für alle komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 mit

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

gilt

$$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_3 = z_3 \times z_1.$$

Beweis. Da $z_3 = -(z_1 + z_2)$, so erhalten wir

$$z_2 \times z_3 = (-z_2) \times (z_1 + z_2) = -(z_2 \times z_1) - (z_2 \times z_2) = z_1 \times z_2.$$

Analog beweist man, dass $z_3 \times z_1 = z_2 \times z_3$. ■

Satz 3.20 Im beliebigen Dreieck $\{a, b, c\}$ gilt

$$(b - a) \times (c - a) = (c - b) \times (a - b) = (a - c) \times (b - c). \quad (3.39)$$

Beweis. Setzen wir

$$z_1 = b - a, \quad z_2 = a - c, \quad z_3 = c - b.$$

Da

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

so gilt nach dem Satz 3.19

$$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_3 = z_3 \times z_1,$$

d.h.

$$(b - a) \times (a - c) = (a - c) \times (c - b) = (c - b) \times (b - a),$$

woraus (3.39) folgt. ■

Definition. Der *Flächeninhalt* $F(abc)$ des Dreiecks $\{a, b, c\}$ wird wie folgt definiert:

$$F(abc) = \frac{1}{2} (b - a) \times (c - a).$$

Es folgt aus dem Satz 3.20, dass

$$\begin{aligned} F(abc) &= F(bca) = F(cab) \\ &= -F(acb) = -F(cba) = -F(bac). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Insbesondere ist der Flächeninhalt *orientiert*. Bemerken wir auch, dass der Ausdruck $F(abc)$ für *alle* $a, b, c \in \mathbb{C}$ definiert ist, obwohl in der Definition des Dreiecks die Punkte a, b, c verschieden sein soll.

Beispiel. Betrachten wir das Dreieck $\{a, b, c\}$ mit den Ecken

$$a = 2 + i, \quad b = 5 + 2i, \quad c = 3 + 3i.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(abc) &= \frac{1}{2} (b - a) \times (c - a) \\ &= \frac{1}{2} (3 + i) \times (1 + 2i) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{3 + i})(1 + 2i) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(3 - i)(1 + 2i) \\ &= \frac{1}{2} (6 - 1) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$F(acb) = -\frac{5}{2}.$$

Satz 3.21 (Sinussatz) *In jedem Dreieck $\{a, b, c\}$ mit den Seiten*

$$\mathbf{a} = d(b, c), \quad \mathbf{b} = d(a, c), \quad \mathbf{c} = d(a, b)$$

und Winkeln

$$\alpha = \angle cab, \quad \beta = \angle abc, \quad \gamma = \angle bca$$

gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\sin \beta}{\mathbf{b}} = \frac{\sin \gamma}{\mathbf{c}} = \frac{2F(abc)}{\mathbf{abc}}. \quad (3.41)$$

Beweis. Da

$$\alpha = \arg(c - a) - \arg(b - a),$$

so erhalten wir Nach dem Satz 3.18, dass

$$(b - a) \times (c - a) = |b - a| |c - a| \sin \alpha = \mathbf{cb} \sin \alpha.$$

Es folgt, dass

$$2F(abc) = (b - a) \times (c - a) = \mathbf{cb} \sin \alpha$$

woraus folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\mathbf{a}} = \frac{2F(abc)}{\mathbf{abc}}.$$

Analog beweist man zwei andere Identitäten in (3.41). ■

Satz 3.22 *Die Skalar- und Kreuzprodukte werden unter Rotation erhalten. Somit wird der Flächeninhalt des Dreiecks unter Rotation und Translation erhalten.*

Beweis. Sei R_α eine Rotation um Winkel α . Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} R_\alpha(z) \times R_\alpha(w) &= \operatorname{Im} \left(\overline{R_\alpha(z)} R_\alpha(w) \right) = \operatorname{Im} (\overline{z_\alpha} z_\alpha w) \\ &= \operatorname{Im} (z_{-\alpha} \bar{z} z_\alpha w) = \operatorname{Im} (\bar{z} w) = z \times w \end{aligned}$$

und gleiches gilt für das Skalarprodukt.

Der Flächeninhalt $F(abc)$ wird unter Translation erhalten, da $F(abc)$ von $b - a$ und $c - a$ bestimmt wird, und die Differenz zweier komplexen Zahlen unter Translation erhalten ist. Der Flächeninhalt $F(abc)$ wird unter Rotation erhalten, da $F(abc)$ von dem Kreuzprodukt von $b - a$ und $c - a$ bestimmt ist, und das Kreuzprodukt unter Rotation erhalten wird. ■

In den Rest von diesem Abschnitt betrachten wir die Eigenschaft von *Additivität* des Flächeninhaltes.

Lemma 3.23 *Seien a, b, c, d Punkte der Ebene mit*

$$d = ra + sb + tc$$

wobei r, s, t reelle Zahlen mit

$$r + s + t = 1$$

sind. Dann gilt

$$F(abd) = tF(abc).$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} d - a &= ra + sb + tc - (r + s + t)a \\ &= s(b - a) + t(c - a), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
 F(abd) &= \frac{1}{2}(b-a) \times (d-a) \\
 &= \frac{1}{2}(b-a) \times [s(b-a) + t(c-a)] \\
 &= 0 + \frac{1}{2}t(b-a) \times (c-a) \\
 &= tF(abc).
 \end{aligned}$$

■

Satz 3.24 Für vier beliebige Punkte a, b, c, d von der Ebene gilt

$$F(abc) = F(dbc) + F(adc) + F(abd). \quad (3.42)$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall wenn $a = b$. Dann ist (3.42) äquivalent zu

$$0 = F(dac) + F(adc),$$

was gilt nach (3.40). Analog betrachten andere Fälle wenn zwei von den Punkten a, b, c, d gleich sind.

Seien jetzt alle Punkte a, b, c, d verschieden. Betrachten jetzt den Fall, wenn a, b, c auf einer Gerade liegen, insbesondere gilt

$$c \in \text{affine}(a, b).$$

Dann gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit

$$c = (1-t)a + tb.$$

Dann haben wir nach Lemma 3.23 und (3.40)

$$F(abc) = 0$$

$$F(dbc) = (1-t)F(dba) = -(1-t)F(abd)$$

$$F(adc) = tF(adb) = -tF(abd),$$

woraus (3.42) folgt.

Angenommen, dass a, b, c auf einer Gerade nicht liegen, so lässt sich d wir folgt darstellen:

$$d = ra + sb + tc$$

mit reellen r, s, t mit

$$r + s + t = 1.$$

Es folgt nach Lemma 3.23, dass

$$F(abd) = tF(abc).$$

$$F(adc) = sF(abc)$$

$$F(abd) = rF(abc),$$

woraus (3.42) folgt. ■

Mit Hilfe von (3.42) kann man beweisen, dass für alle Punkte a, b, c, a', b', c' der Ebene gilt

$$\begin{aligned} F(abc) &= F(a'bc) + F(ab'c) + F(abc') \\ &\quad - F(ab'c') - F(a'bc') - F(a'b'c) \\ &\quad + F(a'b'c'). \end{aligned}$$

Chapter 4

Folgen und Reihen

Definition. Eine (*unendliche*) *Folge* von reellen Zahlen ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Wert $x(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wird auch mit x_n bezeichnet. Die ganze Folge x wird auch mit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder sogar $\{x_n\}$ bezeichnet. Jedes x_n wird auch als ein *Glied* (oder *Folglied*) der Folge x genannt.

4.1 Grenzwert einer Folge

Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir interessieren uns für das Verhalten der Folgenglieder x_n für die großen Werte von n . Zum Beispiel, in der Folge $\{(-1)^n\}$ wechselt sich 1 mit -1 ab.

Hingegen werden die Glieder in der Folge $\{\frac{1}{n}\}$ immer kleiner und nähern sich der Null für die großen Werte des Index n an. Man sagt, dass die Folge $\{\frac{1}{n}\}$ den *Grenzwert* 0 hat, während $\{(-1)^n\}$ keinen Grenzwert hat.

Definition. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt der *Grenzwert* der Folge $\{x_n\}$ wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$.

Äquivalent, mit Hilfe von den Quantoren, schreibt man diese Bedingung wie folgt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon.} \quad (4.1)$$

Hat die Folge $\{x_n\}$ einen Grenzwert, so heißt die Folge *konvergent*. Man sagt auch: die Folge *konvergiert*.

Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so benutzt man die folgende Schreibweise:

$$x_n \rightarrow a \quad (x_n \text{ konvergiert gegen } a)$$

$$x_n \rightarrow a \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (x_n \text{ konvergiert gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich}).$$

Um den Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ zu bezeichnen, benutzt man die Notation $\lim x_n$, die der *Limes* von x_n heißt. Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so schreibt man auch

$$\lim x_n = a$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Die Konvergenz $x_n \rightarrow a$ kann als eine Annäherung von a mit den Folgenglieder x_n betrachtet werden. Betrachten wir $\varepsilon > 0$ als ein vorgegebener Approximationsfehler. Dann bedeutet die Bedingung (4.1), dass jedes Folgenglied x_n mit genügend großem n eine "gute" Annäherung von a ist, nämlich, mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$. Es ist wichtig zu betonen, dass diese Eigenschaft für beliebig positives ε gelten muss, so dass der Approximationsfehler beliebig klein sein kann.

Die Bedingung (4.1) lässt sich wie folgt umformulieren. Wir sagen, dass eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $A(n)$ für *fast alle* n gilt, falls $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus S$ gilt, wobei $S \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge ist.

Behauptung. Die Bedingung $a = \lim x_n$ ist äquivalent zu:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } |x_n - a| < \varepsilon \text{ für fast alle } n.} \quad (4.2)$$

Beweis. Nach Definition (4.1) gilt $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, d.h.

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{n < N\}.$$

Da die Menge $S = \{n < N\}$ endlich ist, so erhalten wir (4.2).

Umgekehrt, gilt (4.2), so gibt es eine endliche Menge $S \subset \mathbb{N}$ so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \in S^c.$$

Setzen wir $N = \max S + 1$, wobei $\max S$ nach dem Satz 2.7 existiert. Dann für alle $n \geq N$ gilt auch $n \in S^c$ und somit $|x_n - a| < \varepsilon$, woraus (4.1) folgt. ■

Die Bedingung $|x_n - a| < \varepsilon$ ist offensichtlich äquivalent zu

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt die ε -Umgebung von a und wird auch mit $U_\varepsilon(a)$ bezeichnet. Somit erhalten wir noch eine äquivalente Formulierung von dem Begriff des Limes.

Behauptung. Die Bedingung $a = \lim x_n$ ist äquivalent zu:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } x_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n,} \quad (4.3)$$

d.h.

jede Umgebung von a enthält fast alle Folgenglieder x_n .

Bemerkung. Die Definition (4.1) von dem Grenzwert ist einer von den wichtigsten Begriffen in ganzer Mathematik. Der Begriff von Grenzwert wurde intuitiv, ohne genaue Definition, schon von den Begründern von Infinitesimalrechnung Isaac Newton und Wilhelm-Gottfried Leibniz im 17. Jahrhundert benutzt. Man brauchte fast 150 Jahre von weiterer Entwicklung der Analysis um eine rigorose Definition des

Grenzwertes vorzulegen. Diese Definition wurde von Augustin Louis Cauchy in ca. 1821 gegeben.

Beispiel. 1. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. In der Tat, nach dem Archimedischen Prinzip, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$ woraus folgt $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Deshalb für jedes $n \geq N$ gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$, d.h. $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ und somit

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Ebenso beweist man, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{c}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

2. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ derart, dass $x_n = a$ für alle $n \geq n_0$. Man kann auch sagen, dass $x_n = a$ für fast alle n gilt. Dann auch $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ für fast alle n gilt, woraus $x_n \rightarrow a$ folgt.

Definition. Hat eine Folge $\{x_n\}$ keinen Grenzwert, so sagt man, dass die Folge *divergent* ist oder *divergiert*.

Die Bedingung (4.3) lässt sich wie folgt umformulieren: a ist der Grenzwert von $\{x_n\}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{die Menge } \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \text{ ist endlich}. \quad (4.4)$$

Die Negation der Bedingung (4.4) ergibt folgendes: a ist kein Grenzwert von $\{x_n\}$ genau dann, wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{so dass die Menge } \{n : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \text{ unendlich ist}. \quad (4.5)$$

Mit Hilfe von (4.5) kann man Divergenz von Folgen beweisen.

Beispiel. 1. Die Folge $x_n = n$ divergiert, da für jedes $a \in \mathbb{R}$ außerhalb Intervall $U_1(a)$ unendliche Menge von Folgenglieder liegt. Ebenso divergiert die Folge $x_n = cn$ für jedes $c \neq 0$.

2. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert. Der Wert $a = 1$ ist kein Grenzwert, da es außerhalb $U_1(1)$ unendlich viele Glieder mit dem Wert -1 gibt. Analog ist $a = -1$ kein Grenzwert. Sei $a \neq 1$ und $a \neq -1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ weder 1 noch -1 enthält, und somit alle Glieder x_n außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen. Deshalb ist a kein Grenzwert.

4.2 Eigenschaften des Grenzwertes

Für Beweise von Eigenschaften des Limes benutzen wir die folgende Eigenschaft des Begriffes "fast alle n ".

Behauptung. *Gelten zwei von $n \in \mathbb{N}$ abhängigen Aussagen $A(n)$ und $B(n)$ für fast alle n , so gilt $A(n) \wedge B(n)$ auch für fast alle n .*

Beweis. Nach Definition gibt es endliche Mengen $S, T \subset \mathbb{N}$ so dass $A(n)$ für alle $n \in S^c$ gilt und $B(n)$ für alle $n \in T^c$ gilt. Dann gilt $A(n) \wedge B(n)$ für alle

$$n \in S^c \cap T^c = (S \cup T)^c.$$

Nach dem Satz 2.14 ist $S \cup T$ endlich, woraus folgt, dass $A(n) \wedge B(n)$ für fast alle n gilt. ■

Eine Folge $\{x_n\}$ heißt *beschränkt* falls es eine positive Zahl C gibt mit $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $\{x_n\}$ genau dann beschränkt, wenn alle Folgenglieder in einem beschränkten Intervall liegen.

Satz 4.1 (a) Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \leq y_n$ für fast alle n , so gilt

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

Insbesondere die Bedingung $x_n = y_n$ für fast alle n impliziert $\lim x_n = \lim y_n$. Folglich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

(b) (Dreifolgensatz) Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ drei Folgen mit

$$x_n \leq z_n \leq y_n \text{ für fast alle } n.$$

Gilt

$$\lim x_n = \lim y_n =: a,$$

so gilt auch

$$\lim z_n = a.$$

(c) Jede konvergente Folge ist (nach oben und nach unten) beschränkt.

(d) $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow |x_n - a| \rightarrow 0$ (insbesondere $x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow 0$).

Eine Folge heißt *Nullfolge* falls sie gegen 0 konvergiert. So, die Eigenschaft (d) lässt sich wie folgt umformulieren: $x_n \rightarrow a$ gilt genau dann, wenn $\{|x_n - a|\}$ eine Nullfolge ist.

Beweis. (a) Bezeichnen wir $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$. Wir brauchen zu beweisen, dass $a \leq b$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a > b$ und setzen $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Dann gilt für alle $x \in U_\varepsilon(a)$ und $y \in U_\varepsilon(b)$

$$y < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x,$$

d.h. $y < x$. Andererseits, für fast alle n haben wir

$$x_n \in U_\varepsilon(a), \quad y_n \in U_\varepsilon(b) \quad \text{und} \quad x_n \leq y_n,$$

was im Widerspruch zum $y_n < x_n$ steht.

(b) Jede Umgebung $U_\varepsilon(a)$ enthält fast alle x_n und y_n . Liegen die beiden Zahlen x_n, y_n im Intervall $U_\varepsilon(a)$, so gilt auch $[x_n, y_n] \subset U_\varepsilon(a)$ und somit auch $z_n \in U_\varepsilon(a)$, was $z_n \rightarrow a$ ergibt.

(c) Sei $x_n \rightarrow a$. Für jedes $x_n \in U_1(a)$ gilt

$$a - 1 < x_n < a + 1$$

und somit $|x_n| \leq |a| + 1$. Die Menge von Glieder x_n die nicht in $U_1(a)$ liegen ist endlich und somit hat das Maximum M und das Minimum m . Dann gilt für jeden Glied x_n

$$|x_n| \leq C := |M| + |m| + |a| + 1,$$

so dass die Folge $\{x_n\}$ beschränkt ist.

(d) Die Bedingung $x_n \rightarrow a$ bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } |x_n - a| < \varepsilon \text{ für fast alle } n.$$

während $|x_n - a| \rightarrow 0$ bedeutet, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } ||x_n - a| - 0| < \varepsilon \text{ für fast alle } n.$$

Offensichtlich sind die beiden Bedingungen äquivalent. ■

Beachten wir, dass $x_n < y_n$ impliziert $\lim x_n \leq \lim y_n$ aber nicht $\lim x_n < \lim y_n$, was man im Beispiel $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}$ sieht.

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen wir die Konvergenz von $\{x_n\}$ abhängig von dem Wert von a . Betrachten wir verschiedene Fälle.

1. Sei $a > 1$, d.h. $a = 1 + c$ wobei $c > 0$. Nach Bernoullische Ungleichung haben wir

$$a^n = (1 + c)^n \geq 1 + nc.$$

Da die Folge $\{nc\}_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt ist, so ist die Folge $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ auch unbeschränkt und somit divergent.

2. Sei $a < -1$. Da $|x_n| = |a|^n$, so erhalten wir, dass die Folge $\{|x_n|\}$ unbeschränkt ist und somit auch $\{x_n\}$. Folglich ist $\{x_n\}$ divergent.

3. Sei $a = -1$. Die Folge $x_n = (-1)^n$ wurde schon betrachtet, und wir wissen, dass sie divergiert.

4. Sei $a = 1$. Dann $x_n = 1$ und diese Folge konvergiert gegen 1.

5. Sei $a = 0$. Dann $\{x_n\}$ ist auch eine konstante Folge, die gegen 0 konvergiert.

6. Sei $0 < a < 1$. Setzen wir $b = \frac{1}{a} > 1$. Wie oberhalb schreiben wir $b = 1 + c$ mit $c > 0$ und erhalten

$$b^n \geq 1 + nc > nc$$

woraus folgt

$$0 < a^n = \frac{1}{b^n} < \frac{1}{nc}.$$

Da $\frac{1}{nc} \rightarrow 0$, erhalten wir nach Satz 4.1(b), dass $a^n \rightarrow 0$.

7. Sei $-1 < a < 0$. Dann gilt $0 < |a| < 1$ und $|a^n| = |a|^n \rightarrow 0$, woraus folgt $a^n \rightarrow 0$.

Somit ist die Folge $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent genau dann, wenn $-1 < a \leq 1$.

Jetzt beweisen wir einige Rechenregeln für den Grenzwert.

Satz 4.2 Seien $x_n \rightarrow a$ und $y_n \rightarrow b$. Dann gelten

$$x_n + y_n \rightarrow a + b, \quad x_n - y_n \rightarrow a - b, \quad x_n y_n \rightarrow ab.$$

Falls $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$, so gilt auch

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Die Aussagen des Satzes 4.2 lassen sich mit Hilfe von dem Zeichen \lim wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\lim (x_n + y_n) &= \lim x_n + \lim y_n \\ \lim (x_n - y_n) &= \lim x_n - \lim y_n \\ \lim (x_n y_n) &= \lim x_n \lim y_n \\ \lim \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim x_n}{\lim y_n}\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten sinnvoll sind. Für die konstante Folge $y_n = a$ erhalten wir, dass

$$\lim (x_n + a) = \lim x_n + a \quad \text{und} \quad \lim (ax_n) = a \lim x_n.$$

Beweis von Satz 4.2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \varepsilon \tag{4.6}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass für fast alle n

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < 2\varepsilon =: \varepsilon'.$$

Da $\varepsilon' > 0$ beliebig ist, so erhalten wir

$$x_n + y_n \rightarrow a + b.$$

Analog beweist man, dass $x_n - y_n \rightarrow a - b$.

Beweisen wir jetzt, dass $x_n y_n \rightarrow ab$. Da jede konvergente Folge beschränkt ist, so gilt es $|x_n| < c$ für ein $c > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Differenz $x_n y_n - ab$ lässt sich für fast alle n wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n (y_n - b)| + |(x_n - a) b| \\ &\leq c |y_n - b| + |b| |x_n - a| \\ &< (c + |b|) \varepsilon =: \varepsilon' .\end{aligned}$$

Da $\varepsilon' = (c + |b|) \varepsilon$ eine beliebige positive Zahl ist, so erhalten wir $x_n y_n \rightarrow ab$.

Für die letzte Behauptung $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ reicht es zu beweisen, dass $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$, da man danach erhält

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \rightarrow a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Sei $b > 0$ (für $b < 0$ betrachten man die Folge $\{-y_n\}$ mit dem positiven Grenzwert $-b$). Da für fast alle n gilt

$$y_n \in U_{b/2}(b) = \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right),$$

so erhalten wir, dass $y_n > \frac{b}{2}$ für fast alle n . Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für fast alle n

$$|y_n - b| < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass für fast alle n

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|b} < \frac{2\varepsilon}{b^2} =: \varepsilon'.$$

Da ε' eine beliebige positive Zahl ist, so folgt es, dass $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. ■

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert der Folge

$$x_n = \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c} \quad (4.7)$$

wobei $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ und $a' \neq 0$. Wir haben

$$x_n = \frac{n^2 \left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right)}{n^2 \left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2} \right)} = \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}}.$$

Wir wissen schon, dass $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Daraus folgt, dass auch $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $\frac{b}{n} \rightarrow 0$, $\frac{c}{n^2} \rightarrow 0$ usw. Nach dem Satz 4.2 erhalten wir $x_n \rightarrow \frac{a}{a'}$.

Zusätzlich zu den Rechenregeln des Satzes 4.2 gilt folgendes: ist $\{x_n\}$ eine konvergente Folge von nicht-negativen Zahlen, so gilt

$$\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim x_n}$$

(siehe Aufgaben 84, 87).

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert der Folge

$$x_n = \frac{\sqrt{n^4 + n}}{(2n - 1)^2}.$$

Wir haben

$$\sqrt{n^4 + n} = \sqrt{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}$$

und

$$(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \right)$$

so dass

$$x_n = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}}.$$

Da alle Folgen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{4n^2}$ und $\frac{1}{n^3}$ gegen 0 konvergieren, so erhalten wir $x_n \rightarrow \frac{1}{4}$.

4.3 Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$

Umgebung in $\overline{\mathbb{R}}$. Hier definieren wir den Begriff des Limes mit den Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Erinnern wir daran, dass eine reellwertige Folge $\{x_n\}$ den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ hat, wenn

jede Umgebung von a enthält fast alle Folgenglieder x_n .

Um den Grenzwert mit den Werten $a = \pm\infty$ definieren zu können, brauchen wir den Begriff von Umgebungen von $\pm\infty$.

Definition. Für jedes $E \in \mathbb{R}$ definieren wir die Umgebung $U_E(+\infty)$ durch

$$U_E(+\infty) = (E, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x > E\} \cup \{+\infty\}.$$

Analog definieren wir die Umgebung $U_E(-\infty)$ durch

$$U_E(-\infty) = [-\infty, E) = \{x \in \mathbb{R} : x < E\} \cup \{-\infty\}.$$

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ hat den Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$ falls:

$$\text{jede Umgebung von } a \text{ enthält fast alle Folgenglieder } x_n. \quad (4.8)$$

Man schreibt in diesem Fall $x_n \rightarrow a$ oder $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $\lim x_n = a$.

Ist a reell, so stimmt diese Definition mit der früheren Definition des Limes überein. In diesem Fall sagt man, dass x_n gegen a konvergiert. Ist $a = \pm\infty$, so sagt man, dass x_n gegen a *divergiert*. Weiß man nicht ob a endlich oder unendlich ist, so sagt man, dass x_n den Grenzwert a hat.

Divergiert die Folge x_n gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so sagt man, dass die Folge *bestimmt divergiert*. Hat die Folge keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$, so sagt man, dass die Folge *unbestimmt divergiert*.

Beispiel. Die Folge $x_n = n$ divergiert gegen $+\infty$, da für jedes $E \in \mathbb{R}$ und für alle $n > E$ gilt $x_n > E$ und somit $x_n \in U_E(+\infty)$. Analog divergiert die Folge $x_n = -n$ gegen $-\infty$. Mit gleichem Argument beweist man, dass die Folge $x_n = cn$ gegen $+\infty$ divergiert, falls $c > 0$, und gegen $-\infty$ falls $c < 0$.

Die Aussagen (a) und (b) des Satzes 4.1 gelten auch in $\overline{\mathbb{R}}$.

Satz 4.3 Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ die Folgen von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Gilt $x_n \leq y_n$ für fast alle n , so gilt $\lim x_n \leq \lim y_n$, vorausgesetzt, dass $\lim x_n$ und $\lim y_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existieren.

(b) Gelten $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle n und $\lim x_n = \lim y_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$, so gilt auch $\lim z_n = a$.

20.06.17

Beweis. (a) Setzen wir $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ und nehmen das Gegenteil an, dass $a > b$. Dann existieren Umgebungen V von a und W von b mit der folgenden Eigenschaft:

$$\text{für alle } x \in V \text{ und } y \in W \text{ gilt } x > y. \quad (4.9)$$

In der Tat, im Fall von reellen a, b setzen wir $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ und $V = U_\varepsilon(a)$, $W = U_\varepsilon(b)$. Im Fall, wenn b reell ist und $a = +\infty$, setzen wir $W = U_1(b)$ und $V = U_{b+1}(+\infty)$. Analog betrachtet man andere Möglichkeiten.

Andererseits, für fast alle n gelten $x_n \in V$, $y_n \in W$ und $x_n \leq y_n$, was im Widerspruch zum (4.9) steht.

(b) Sei V beliebige Umgebung von a . Dann liegen x_n und y_n in V für fast alle n , woraus folgt, dass $[x_n, y_n] \subset V$ und somit $z_n \in V$. Es folgt, dass $z_n \rightarrow a$. ■

Beispiel. Betrachten wir wieder die Folge $x_n = a^n$ mit $a \in \mathbb{R}$. Wir wissen schon, dass diese Folge konvergiert genau dann, wenn $a \in (-1, 1]$. Zeigen wir, dass im Fall $a > 1$ gilt $a^n \rightarrow +\infty$. Schreiben wir $a = 1 + c$ wobei $c > 0$ und erhalten mit Hilfe von Bernoullischer Ungleichung

$$a^n = (1 + c)^n > cn.$$

Da $cn < a^n < +\infty$ und $cn \rightarrow +\infty$, so folgt es daraus, dass auch $a^n \rightarrow +\infty$.

Im Fall $a \leq -1$ wissen wir schon, dass die Folge $\{a^n\}$ keinen reellen Grenzwert hat. Die Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ sind keine Grenzwerte von $\{a^n\}$, da weder $U_1(+\infty)$ noch $U_1(-\infty)$ fast alle Elemente von $\{a^n\}$ enthält. Somit hat die Folge $\{a^n\}$ keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$, d.h. $\{a^n\}$ divergiert unbestimmt.

Operationen mit $+\infty$ und $-\infty$. Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir Addition mit $+\infty$ wie folgt:

$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & -\infty < a \leq +\infty \\ \text{unbestimmt}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Analog definiert man Addition mit $-\infty$. Die Multiplikation mit $+\infty$ wird wie folgt definiert:

$$(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & 0 < a \leq +\infty \\ -\infty, & -\infty \leq a < 0 \\ \text{unbestimmt}, & a = 0. \end{cases}$$

und analog mit $-\infty$. Division durch ∞ wird wie folgt definiert:

$$\frac{a}{+\infty} = \begin{cases} 0, & a \in \mathbb{R} \\ \text{unbestimmt}, & a = +\infty \text{ or } a = -\infty. \end{cases}$$

Erinnern wir uns, dass auch $\frac{a}{0}$ unbestimmt ist. Somit bleiben die folgenden Operationen unbestimmt:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Alle diese Ausdrücke heißen die *unbestimmte* Ausdrücke.

Satz 4.4 Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen von reellen Zahlen mit $\lim x_n = a$ und $\lim y_n = b$ wobei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten

$$\lim (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim (x_n - y_n) = a - b, \quad \lim (x_n y_n) = ab, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \quad (4.10)$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $a + b$, $a - b$, ab , bzw. $\frac{a}{b}$ bestimmt sind (und $y_n \neq 0$ im letzten Fall).

Beweis. Für reellen a, b war das im Satz 4.2 bewiesen. Für unendliche a bzw. b muss man verschiedene Möglichkeiten betrachten und zeigen, dass in allen Fällen die Identitäten (4.10) mit den Definitionen von Operationen mit $\pm\infty$ übereinstimmen.

Betrachten wir, zum Beispiel, den Fall wenn $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim y_n = +\infty$ und beweisen, dass

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 0 = \frac{a}{+\infty}. \quad (4.11)$$

Die Folge $\{x_n\}$ ist beschränkt, so dass $|x_n| \leq C$ für eine positive Zahl C . Für die Folge $\{y_n\}$ haben wir

$$\forall E > 0 \text{ gilt } y_n > E \text{ für fast alle } n.$$

Daraus folgt, dass

$$\forall E > 0 \text{ gilt } \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{C}{E} \text{ für fast alle } n. \quad (4.12)$$

Da $E > 0$ beliebig ist, so ist $\varepsilon := \frac{C}{E}$ auch beliebig und positiv. In anderen Worten, für jedes $\varepsilon > 0$ setzen wir $E = \frac{C}{\varepsilon}$ und wenden (4.12) an. Wir erhalten

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \text{ für fast alle } n,$$

woraus (4.11) folgt. Analog betrachtet man die anderen Fälle. ■

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert der Folge $x_n = \frac{n^2-n}{n+2}$. Es gilt

$$\frac{n^2-n}{2n+3} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = n \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}}.$$

Da $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ und $2 + \frac{3}{n} \rightarrow 2$, so erhalten wir

$$\lim \frac{n^2-n}{2n+3} = \lim n \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

Falsche Lösung:

$$\lim \frac{n^2-n}{2n+3} = \frac{\lim (n^2-n)}{\lim (2n+3)} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

da $\frac{+\infty}{+\infty}$ unbestimmt ist.

Beispiel. Die Folgen $x_n = n + c$ und $y_n = n$ haben den Grenzwert $+\infty$ aber die Differenz $x_n - y_n = c$ hat den Grenzwert c , was beliebige reelle Zahl ist. Somit lässt der Ausdruck $+\infty - (+\infty)$ nicht eindeutig definiert werden. Zum Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ wird ein Gegenbeispiel von der Folge (4.7) geliefert, und zum $0 \cdot \infty$ siehe ein Gegenbeispiel in Aufgaben.

4.4 Monotone Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von reellen Zahlen heißt *monoton steigend* falls $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, and *monoton fallend* falls $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge heißt *monoton*, falls sie entweder *monoton steigend* oder *monoton fallend* ist.

Beispiel. Die Folge $x_n = n$ ist *monoton steigend*, die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist *monoton fallend*, die konstante Folge $x_n = a$ ist gleichzeitig *monoton steigend* und *fallend*, die Folge $x_n = (-1)^n$ ist nicht *monoton*.

Ist $\{x_n\}$ *monoton steigend*, dann gilt $x_n \geq x_m$ für alle $n \geq m$. Insbesondere gilt $x_n \geq x_1$ so dass x_1 eine untere Schranke ist, und $\{x_n\}$ nach unten beschränkt ist. Ist $\{x_n\}$ *monoton fallend*, so gilt $x_n \leq x_m$ für alle $n \geq m$, und $\{x_n\}$ ist nach oben beschränkt.

Hauptsatz 4.5 (Monotoniekriterium) Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge von reellen Zahlen. Ist $\{x_n\}$ beschränkt, so ist $\{x_n\}$ konvergent. Ist $\{x_n\}$ unbeschränkt, so ist $\{x_n\}$ bestimmt divergent. In den beiden Fällen existiert $\lim x_n$ als Element von $\overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine monoton steigende Folge (der Fall von monoton fallender Folge ist analog). Sei $\{x_n\}$ beschränkt. Bezeichnen wir mit A die Menge von allen Werten x_n , und mit B – die Menge von allen oberen Schranken von A , die nach Voraussetzung nicht leer ist. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert ein c zwischen A und B , d.h.

$$x_n \leq c \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } y \in B.$$

Beweisen wir, dass $x_n \rightarrow c$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Zahl $c - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n\}$. Deshalb existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_N > c - \varepsilon.$$

Da die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend ist, erhalten wir, dass

$$x_n > c - \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

Da nach Definition von c gilt

$$x_n \leq c,$$

so erhalten wir, dass $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ für alle $n \geq N$, woraus $x_n \rightarrow c$ folgt.

Sei jetzt $\{x_n\}$ unbeschränkt. Dann für jedes $E \in \mathbb{R}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > E$. Da die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend ist, so erhalten wir, dass

$$x_n > E \quad \text{für alle } n \geq N,$$

woraus $x_n \rightarrow +\infty$ folgt. ■

Beispiel. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ die wie folgt induktiv definiert ist:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder sind wie folgt:

$$1, \quad 2, \quad \frac{9}{4} = 2,25, \quad \frac{793}{324} \approx 2,447, \quad \frac{532\,689\,481}{203\,747\,076} \approx 2,614, \quad \text{usw.}$$

Diese Folge ist offensichtlich monoton steigend und somit hat einen Grenzwert $x = \lim x_n \in (0, +\infty]$. Es folgt, dass x die folgende Gleichung erfüllt:

$$x = x + \frac{1}{x^2}.$$

Da es keine reelle Zahl gibt, die diese Gleichung erfüllt, so beschließen wir, dass $x = +\infty$.

Beispiel. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ mit

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder sind wie folgt:

$$2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{17}{12} \approx 1,417, \quad \frac{577}{408} \approx 1,414, \quad \text{usw.}$$

Man kann beweisen, dass diese Folge monoton fallend ist (siehe Aufgaben). Da $\{x_n\}$ nach unten von 0 beschränkt ist, so erhalten wir, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergent ist. Der Grenzwert $x = \lim x_n$ erfüllt somit die Gleichung

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right),$$

d.h. $x = \frac{2}{x}$ und somit $x = \sqrt{2}$. Die Antwort ist $\lim x_n = \sqrt{2}$.

Beispiel. Der Wert der unendlichen Folge von Wurzeln

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

wird als $\lim x_n$ definiert, wobei

$$x_1 = \sqrt{1}, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}.$$

Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend und beschränkt ist, woraus die Konvergenz folgt (siehe Aufgaben). Der Grenzwert $\lim x_n$ lässt sich danach explizit berechnen.

4.5 Reihen

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Betrachten wir den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

der heißt eine *Reihe*. Die Summe (der Wert) der Reihe wird wie folgt definiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Partialsomme*

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n,$$

und danach setzen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

Man sagt, dass die Reihe $\sum a_n$ konvergent bzw bestimmt divergent bzw unbestimmt divergent, wenn so die Folge $\{S_N\}$ ist. Ist die Reihe $\sum a_n$ unbestimmt divergent, so ist der Wert von $\sum a_n$ nicht definiert.

Analog definiert man den Wert der Reihe

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass für $m' > m$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m'-1} a_n + \sum_{n=m'}^{\infty} a_n.$$

Nach den Eigenschaften des Limes erhalten wir die folgenden Eigenschaften von Reihen.

Satz 4.6 (a) Für $a_n, b_n, c \in \mathbb{R}$ gelten die Identitäten

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten bestimmt sind.

(b) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

vorausgesetzt, dass die beiden Seiten bestimmt sind.

Beweis. (a) Betrachten wir die Partialsumme

$$S_N = \sum_{n=1}^N (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N b_n = A_N + B_N,$$

wobei A_N und B_N die Partialsummen von $\sum a_n$ bzw $\sum b_n$ sind. Nach dem Satz 4.4 erhalten wir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N + B_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N + \lim_{N \rightarrow \infty} B_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Die zweite Identität wird analog bewiesen.

(b) Die Voraussetzung $a_n \leq b_n$ ergibt $A_N \leq B_N$ und somit $\lim A_N \leq \lim B_N$. ■

Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *nichtnegativ* falls alle Glieder a_k nichtnegative reelle Zahlen sind.

Satz 4.7 Für jede nichtnegative Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist ihre Summe immer bestimmt als Element von $[0, +\infty]$. Folglich bestehen es nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. oder die Reihe bestimmt divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Beweis. Da $a_n \geq 0$, so ist die Folge $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ von Partialsummen monoton steigend und somit $\lim S_N$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ nach den Satz 4.5. Ist $\lim S_N$ endlich, so ist die Reihe konvergent, ist $\lim S_N = +\infty$, so ist die Reihe bestimmt divergent. ■

Beispiel. Betrachten wir die *geometrische* Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Sei $x \neq 1$. Dann ist die Partialsumme gleich

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad (4.13)$$

(siehe Aufgabe 27). Im Fall $x \in (-1, 1)$ erhalten wir $x^{N+1} \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$, woraus folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{1 - x}. \quad (4.14)$$

Im Fall $x > 1$ folgt es aus (4.13), dass

$$S_N = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \rightarrow +\infty \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

so dass $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty$. Im Fall $x = 1$ gilt (4.13) nicht, aber wir haben $S_N = N$ und somit wieder $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \infty$.

Für $x \leq -1$ hat die Folge $\{x^{N+1}\}$ keinen Grenzwert, woraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ unbestimmt divergiert.

Bemerkung. Es folgt aus (4.14), dass für alle $x \in (-1, 1)$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=m}^{\infty} x^n = x^m \sum_{n=m}^{\infty} x^{n-m} = x^m \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^m}{1 - x}. \quad (4.15)$$

Beispiel. Die *harmonische* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

ist bestimmt divergent, während die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergent ist (siehe Aufgaben).

4.6 Zahlensystem: q -adische Brüche

Jetzt definieren wir q -adische Darstellung von den reellen Zahlen. Betrachten wir zunächst eine unendliche Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q -adischen Ziffern (d.h. $a_k \in \{0, \dots, q-1\}$) und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots \quad (4.16)$$

Satz 4.8 Für jede Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q -adischen Ziffern ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ konvergent und ihre Summe liegt in $[0, 1]$.

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ heißt q -adischer Bruch, und die Summe $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ heißt der Wert des Bruches. Die übliche symbolische Abkürzung dieser Identität ist

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_q \quad \text{oder} \quad x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Beweis von Satz 4.8. Da $a_k q^{-k} \geq 0$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} \in [0, +\infty].$$

Wir brauchen nur zu beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} \leq 1.$$

Da $a_n \leq q-1$, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} \leq (q-1) \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}. \quad (4.17)$$

Die Summe in der rechten Seite von (4.17) lässt sich mit Hilfe von (4.14) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} &= q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + \dots \\ &= q^{-1} (1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots) \\ &= q^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} q^{-l} = q^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^l \\ &= \frac{1}{q} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q-1}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = \frac{1}{q-1}. \quad (4.18)$$

Somit erhalten wir aus (4.17) und (4.18)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} \leq (q-1) \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = (q-1) \frac{1}{q-1} = 1. \quad (4.19)$$

Wir beschließen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ konvergent ist und ihre Summe in $[0, 1]$ liegt. ■

Beispiel. Es folgt aus (4.18), dass

$$(0, 111\dots)_q = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = \frac{1}{q-1}, \quad (4.20)$$

und, für beliebige q -adische Ziffer a ,

$$(0, aaa\dots)_q = \sum_{k=1}^{\infty} a q^{-k} = \frac{a}{q-1}. \quad (4.21)$$

Insbesondere im Dezimalsystem erhalten wir

$$\begin{aligned} 0, 111\dots &= \frac{1}{9}, \\ 0, 333\dots &= \frac{1}{3}, \\ 0, 999\dots &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel. Bestimmen wir den Wert des q -adischen Bruches

$$(0, 121212\dots)_q$$

wobei $q > 2$ und das Muster 12 periodisch wiederholt wird. Wir haben

$$\begin{aligned} (0, 121212\dots)_q &= q^{-1} + 2q^{-2} + q^{-3} + 2q^{-4} + q^{-5} + 2q^{-6} + \dots \\ &= (q^{-1} + 2q^{-2}) (1 + q^{-2} + q^{-4} + \dots) \\ &= \frac{q^{-1} + 2q^{-2}}{1 - q^{-2}} = \frac{q + 2}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel, im Dezimalsystem

$$0, 121212\dots = \frac{12}{99}.$$

Der nächste Satz ist die Umkehrung von dem Satz 4.8.

Satz 4.9 Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in [0, 1)$ gibt es einen q -adischen Bruch mit dem Wert x .

Beweis. Wir bestimmen die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ von q -adischen Ziffern so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k q^{-k} \leq x < \sum_{k=1}^n a_k q^{-k} + q^{-n}. \quad (4.22)$$

Da $q^{-n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so wird es aus (4.22) folgen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = x,$$

was zu beweisen war.

Konstruktion von a_n erfolgt per Induktion nach n . Induktionsanfang für $n = 1$. Die Ungleichung (4.22) für $n = 1$ ist

$$a_1 q^{-1} \leq x < a_1 q^{-1} + q^{-1}, \quad (4.23)$$

was äquivalent zu

$$a_1 \leq qx < a_1 + 1. \quad (4.24)$$

Da a_1 eine ganze Zahl ist, so ist (4.24) äquivalent zu

$$a_1 = [qx],$$

wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer ist. Da $0 \leq x < 1$, so erhalten wir $0 \leq qx < q$ und somit $0 \leq a_1 < q$. Deshalb ist a_1 eine q -adische Ziffer.

Induktionsschritt von $< n$ nach n . Seien a_k für alle $k < n$ schon bestimmt. Wir müssen beweisen, dass es eine Ziffer a_n mit (4.22) gibt. Setzen wir

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} a_k q^{-k}$$

(wobei alle a_k mit $k \leq n-1$ schon bestimmt sind) und umschreiben (4.22) wie folgt:

$$y + a_n q^{-n} \leq x < y + a_n q^{-n} + q^{-n}.$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent zu

$$a_n \leq q^n (x - y) < a_n + 1,$$

woraus folgt

$$a_n = [q^n (x - y)].$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass a_n eine q -adische Ziffer ist. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir

$$y \leq x < y + q^{-(n-1)},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - y < q^{-n+1}, \\ 0 &\leq q^n (x - y) < q, \\ 0 &\leq [q^n (x - y)] < q. \end{aligned}$$

Somit ist a_n eine q -adische Ziffer. ■

Mit Hilfe von Sätzen 2.16 und 4.9 kann jedes $x \in \mathbb{R}_+$ im q -adischen Zahlensystem dargestellt werden, wie folgt. In der Tat kann jedes $x \geq 0$ eindeutig in der Form

$$x = a + b$$

zerlegt werden, wobei $a = [x] \in \mathbb{Z}_+$ der Ganzzahlanteil von x ist und $b = x - a \in [0, 1)$ der *Bruchteil* von x .

Ist $a = 0$, so gilt $x \in [0, 1)$ und die q -adische Darstellung von x wird von Satz 4.9 gegeben. Sei $a > 0$. Nach Satz 2.16 hat a die q -adische Darstellung

$$a = \sum_{k=0}^n a_k q^k = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_q .$$

Nach Satz 4.9 hat b die Darstellung als ein q -adischer Bruch

$$b = \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l} = (0, b_1 b_2 b_3 \dots)_q .$$

Deshalb erhalten wir die Identität

$$x = \sum_{k=0}^n a_k q^k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l},$$

die symbolisch abgekürzt wird wie folgt

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)_q .$$

Der Ausdruck

$$(a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 b_3 \dots)_q$$

(wobei a_k und b_l die q -adischen Ziffern sind) heißt eine *q -adische Zahl*. Somit erhalten wir folgendes.

Korollar 4.10 *Jede q -adische Zahl hat einen Wert in \mathbb{R}_+ . Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ existiert eine q -adische Zahl mit dem Wert x .*

Mit Hilfe von der q -adischen Darstellung der reellen Zahlen können die arithmetischen Operationen mit Zahlen durchgeführt werden, wie schriftliche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Bemerkung. Der Satz 4.9 enthält keine Eindeutigkeitsaussage, da dies nicht immer gilt. Zum Beispiel, nach (4.21) gilt

$$(0, aaa \dots)_q = 1,$$

wobei 1 auch die q -adische Darstellung $1 = (1)_q$ hat. Ein q -adischer Bruch $(0, b_1 b_2 \dots)_q$ heißt *echt* falls

$$\text{die Menge } \{k \in \mathbb{N} : b_k < q - 1\} \text{ unendlich ist.} \quad (4.25)$$

Man kann beweisen, dass es für jedes $x \in [0, 1)$ genau einen q -adischen echten Bruch mit dem Wert x gibt.

4.7 * Existenz und Eindeutigkeit von \mathbb{R} (Skizze)

Die Menge \mathbb{R} von reellen Zahlen wurde von uns axiomatisch eingeführt. Natürlich entsteht die Frage, ob eine Menge \mathbb{R} existiert, die alle Axiomen erfüllt, und ob sie eindeutig bestimmt ist. Die Existenz von \mathbb{R} kann nur in den Rahmen von anderen axiomatischen Theorien bewiesen werden, zum Beispiel in den Rahmen der Theorie von natürlichen Zahlen (siehe Abschnitt 2.8).

Angenommen, dass die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{Z} schon bekannt sind, so gibt es verschiedene Möglichkeiten die ganze Menge \mathbb{R} aufzubauen. Eine Möglichkeit ist das q -adische Zahlensystem zu benutzen (zum Beispiel, mit $q = 2$) um \mathbb{R}_+ als die Menge von q -adischen Zahlen (Folgen)

$$(a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 \dots)_q$$

zu definieren, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und a_k, b_l die q -adischen Ziffern sind. Man muß sowohl die Operationen $+$ und \cdot als auch die Relation \leq mit Hilfe von q -adischen Darstellungen definieren und die Gültigkeit von allen Axiomen von reellen Zahlen beweisen.

Zur Eindeutigkeit von \mathbb{R} soll man folgendes bemerken. Es gibt verschiedene Mengen, die die Axiome von \mathbb{R} erfüllen. Alle solchen Mengen heißen die *Modelle* von \mathbb{R} . Zum Beispiel, für verschiedene Werte von q erhält man verschiedene Modelle von \mathbb{R} als q -adische Zahlen.

Die Eindeutigkeit von \mathbb{R} gilt im folgenden Sinn. Gegeben seien zwei Modellen \mathbb{R}' und \mathbb{R}'' von \mathbb{R} , dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}''$ mit Eigenschaften:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
3. $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Daraus folgt, dass auch $\varphi(0') = 0''$, $\varphi(1') = 1''$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Eine Abbildung φ mit diesen Eigenschaften heißt *Isomorphismus*, und die Modellen \mathbb{R}' und \mathbb{R}'' , für die ein Isomorphismus existiert, heißen *isomorph*. Somit sind je zwei beliebigen Modellen von reellen Zahlen isomorph.

Wir müssen unbedingt betonen, dass der Beweis der Existenz von Isomorphismus das Vollständigkeitsaxiom benötigt. Zum Beispiel, \mathbb{Q} erfüllt alle andere Axiome von reellen Zahlen, aber \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind nicht isomorph.

4.8 Cauchy-Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*) falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \text{ gilt } |x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (4.26)$$

Die Bedeutung (4.26) heißt die *Cauchy-Bedingung*. Kurz bezeichnet man die Bedingung (4.26) wie folgt:

$$x_n - x_m \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty.$$

Hauptsatz 4.11 (Cauchy-Kriterium von Konvergenz) *Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen konvergiert genau dann, wenn $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.*

Soll man die Konvergenz einer Folge $\{x_n\}$ beweisen, ohne den Grenzwert zu kennen, so hat die Cauchy-Bedingung einen Vorteil, da sie den Wert des Grenzwertes nicht explizit benutzt.

Beispiel. Definieren wir die Folge $\{x_n\}$ induktiv wie folgt:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - x_n^2). \quad (4.27)$$

Wir beweisen, dass diese Folge konvergiert und bestimmen der Grenzwert. Berechnung von den ersten Folgengliedern ergibt

$$x_2 = \frac{4}{3} \approx 1,333, \quad x_3 = \frac{20}{27} \approx 0,740, \quad x_4 = \frac{2516}{2187} \approx 1,150, \quad x_5 = \frac{12\,801\,620}{14\,348\,907} \approx 0,892$$

usw. So, dieser Folge ist nicht monoton. Wir beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Zuerst zeigen wir, dass $0 \leq x_n \leq \frac{4}{3}$. Induktionsanfang für $n = 1$ ist trivial. Gilt $0 \leq x_n \leq \frac{4}{3}$, so gilt $0 \leq x_n^2 \leq \frac{16}{9}$ und somit

$$\frac{1}{3}(4 - x_n^2) \leq \frac{4}{3} \text{ und } \frac{1}{3}(4 - x_n^2) \geq \frac{1}{3}\left(4 - \frac{16}{9}\right) > 0,$$

so dass $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{4}{3}$. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{3}(4 - x_n^2) - \frac{1}{3}(4 - x_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{3}(x_{n-1}^2 - x_n^2) \\ &= \frac{1}{3}(x_{n-1} + x_n)(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Da

$$|x_{n-1} + x_n| \leq 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3},$$

so gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{8}{9}|x_n - x_{n-1}|. \quad (4.28)$$

Wir werden beweisen, dass (4.28) impliziert, dass die Folge $\{x_n\}$ Cauchy und somit 30.06.17 konvergent ist. Sei $x = \lim x_n$. Es folgt aus (4.27), dass

$$x = \frac{1}{3}(4 - x^2)$$

d.h.

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

woraus folgt $x = -4$ oder $x = 1$. Da $x \geq 0$, so erhalten wir $x = 1$, d.h. $\lim x_n = 1$.

Jetzt beweisen wir die folgende Behauptung, die die Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ ergibt.

Behauptung. Gilt für eine Folge $\{x_n\}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}| \quad (4.29)$$

für ein $\lambda \in (0, 1)$ und für alle $n \geq 2$, so ist die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

In der Tat erhalten wir aus (4.29) per Induktion nach n , dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n-1} |x_2 - x_1| = c\lambda^n,$$

wobei $c = \lambda^{-1} |x_2 - x_1|$. Daraus folgt, dass für alle $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \\ &\leq c \sum_{k=n}^{\infty} \lambda^k = c\lambda^n \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l = \frac{c\lambda^n}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Da $0 < \lambda < 1$ und somit $\lambda^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so erhalten wir, dass $|x_m - x_n| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Deshalb ist die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Nach dem Cauchy-Kriterium ist $\{x_n\}$ konvergent.

Beweis des Satzes 4.11. Konvergenz \implies Cauchy-Bedingung. Sei $x_n \rightarrow a$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \text{ gilt } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass für alle $n, m \geq N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < 2\varepsilon.$$

Da 2ε beliebig positiv ist, erhalten wir, dass $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt.

Cauchy-Bedingung \implies Konvergenz. Nach Definition einer Cauchy-Folge gilt: für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_k \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n, m \geq N_k$ gilt

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{k}.$$

Insbesondere enthält das Intervall

$$J_k := \left[x_{N_k} - \frac{1}{k}, x_{N_k} + \frac{1}{k} \right]$$

fast alle Folgenglieder von $\{x_n\}$. Setzen wir

$$S_k = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_k.$$

In anderen Wörtern, die Menge S_k ist induktiv definiert wie folgt:

$$S_1 = J_1, \quad S_{k+1} = S_k \cap J_{k+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Wir behaupten, dass S_k ein abgeschlossenes Intervall ist und S_k fast alle Folgenglieder $\{x_k\}$ enthält. Für $k = 1$ ist es klar da $S_1 = J_1$. Für Induktionsschritt von k nach $k+1$ bemerken wir, dass J_{k+1} und auch S_k fast alle Folgenglieder enthalten, woraus folgt, dass gleiches für $S_{k+1} = S_k \cap J_{k+1}$ gilt. Der Schnitt $S_k \cap J_{k+1}$ zweier abgeschlossenen Intervalle ist nicht leer und somit auch abgeschlossenes Intervall (siehe auch die Aufgabe 30).

Bezeichnen wir $S_k = [a_k, b_k]$. Hier ist eine Zusammenfassung von den Eigenschaften von $[a_k, b_k]$:

1. $[a_k, b_k]$ enthält fast alle Folgenglieder von $\{x_n\}$;
2. $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ (da $S_{k+1} \subset S_k$);
3. $b_k - a_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ (da $S_k \subset J_k$ und somit $b_k - a_k \leq \frac{2}{k}$)

Nach der 2. Eigenschaft gilt

$$a_{k+1} \leq a_k \leq b_k \leq b_{k+1},$$

woraus folgt, dass die Folge $\{a_k\}$ monotone steigend ist und $\{b_k\}$ – monoton fallend. Es folgt auch, dass

$$a_1 \leq a_k \leq b_k \leq b_1,$$

so dass die beiden Folgen beschränkt sind. Nach dem Satz 4.5 ist $\{a_k\}$ konvergent. Sei

$$x = \lim a_k.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim b_k = \lim (a_k + (b_k - a_k)) = \lim a_k + \lim (b_k - a_k) = x.$$

Nach definition des Grenzwertes, für jedes $\varepsilon > 0$ enthält das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ die Zahlen a_k und b_k für fast alle k . Fixieren wir ein solches k . Da $[a_k, b_k]$ fast alle Folgenglieder von $\{x_n\}$ enthält und $[a_k, b_k] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, so erhalten wir, dass das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ fast alle Folgenglieder von $\{x_n\}$ enthält, woraus folgt $\lim x_n = x$. Somit ist die Folge $\{x_n\}$ konvergent. ■

Bemerkung. Jede Folge von Intervallen $\{[a_k, b_k]\}$ mit $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ heißt *Intervallschachtelung*. Mit dem obigen Argument kann man beweisen, dass die beiden Folgen $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ immer konvergieren (siehe die Aufgabe 97). Darüber hinaus folgt es, dass $x := \lim a_k$ in allen Intervallen $[a_k, b_k]$ enthalten ist, so dass der Durchschnitt von allen Intervallen nicht leer ist. Gilt zusätzlich $b_k - a_k \rightarrow 0$, so erhalten wir $\lim b_k = \lim a_k$.

Die Eigenschaft, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist, wird manchmal als ein Axiom statt Vollständigkeitsaxioms benutzt.

Beispiel. Betrachten wir den unendlichen Kettenbruch:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (4.30)$$

deren Wert wie folgt definiert ist. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ setzen wir

$$x_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1}}}$$

wobei die rechte Seite ein endlicher Kettenbruch ist, der n mal das Zeichen ‘+’ enthält. Alternativ lässt sich die Folge $\{x_n\}$ induktiv definieren wie folgt:

$$x_0 = \frac{1}{1} \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Insbesondere haben wir

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{3}{5},$$

usw. Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt und somit konvergent ist (siehe Aufgaben). Der Grenzwert $x = \lim x_n$ heißt der Wert des Kettenbruches (4.30). Man kann x explizit bestimmen.

4.9 Grenzwert komplexwertiger Folgen

Definition. Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ falls $|z_n - a| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man schreibt: $\lim z_n = a$ oder $z_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

Definition. Eine komplexwertige Folge $\{z_n\}$ heißt Cauchy-Folge falls $|z_n - z_m| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$.

Offensichtlich stimmen diese Definitionen mit den entsprechenden Definitionen für reellwertige Folgen überein.

Satz 4.12 Sei $\{z_n\}$ eine komplexwertige Folge.

(a) Die Konvergenz $z_n \rightarrow a$ mit einem $a \in \mathbb{C}$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} a$.

(b) Die Folge $\{z_n\}$ ist Cauchy-Folge genau dann, wenn $\{\operatorname{Re} z_n\}$ und $\{\operatorname{Im} z_n\}$ Cauchy-Folgen sind.

(c) Die Folge $\{z_n\}$ ist konvergent genau dann, wenn $\{z_n\}$ Cauchy-Folge ist.

Beweis. (a) Seien $z_n = x_n + iy_n$ und $a = x + iy$ wobei $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$. Dann

$$z_n - a = (x_n - x) + i(y_n - y)$$

und

$$|z_n - a|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2,$$

woraus folgt, dass

$$|z_n - a|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n - x|^2 \rightarrow 0 \text{ und } |y_n - y|^2 \rightarrow 0$$

Bemerken wir, dass für jede Folge $\{r_n\}$ von reellen Zahlen

$$r_n^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow r_n \rightarrow 0$$

(siehe Aufgaben). Somit erhalten wir, dass

$$|z_n - a| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n - x| \rightarrow 0 \text{ und } |y_n - y| \rightarrow 0$$

was zu beweisen war. Teil (b) wird analog bewiesen.

(c) Nach (a), (b) und Satz 4.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} \{z_n\} \text{ konvergiert} &\iff \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ konvergieren} \\ &\iff \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ sind Cauchy-Folgen} \\ &\iff \{z_n\} \text{ ist Cauchy-Folge.} \end{aligned}$$

■

Satz 4.13 (Rechenregeln) *Seien $\{z_n\}$ und $\{w_n\}$ zwei komplexwertige konvergente Folgen mit $z_n \rightarrow a$ und $w_n \rightarrow b$. Dann gelten*

$$z_n + w_n \rightarrow a + b, \quad z_n - w_n \rightarrow a - b, \quad z_n w_n \rightarrow ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

wobei im letzten Teil vorausgesetzt ist, dass $w_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

Beweis. Beweis erfolgt mit Hilfe von den Sätzen 4.2 und 4.12. Seien $z_n = x_n + iy_n$ und $w_n = u_n + iv_n$ mit $x_n, y_n, u_n, v_n \in \mathbb{R}$. Setzen wir auch $a = x + iy$ und $b = u + iv$. Dann gelten nach dem Satz 4.12

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y, \quad u_n \rightarrow u, \quad v_n \rightarrow v,$$

woraus folgt nach dem Satz 4.2

$$z_n + w_n = (x_n + u_n) + i(y_n + v_n) \rightarrow (x + u) + i(y + v) = a + b$$

und analog $z_n - w_n \rightarrow a - b$. Für das Produkt gilt

$$\begin{aligned} z_n w_n &= (x_n u_n - y_n v_n) + i(x_n v_n + y_n u_n) \\ &\rightarrow (xu - yv) + i(xv + yu) = ab. \end{aligned}$$

Für das Inverse gilt

$$\frac{1}{w_n} = \frac{\overline{w_n}}{|w_n|^2} = \frac{u_n - iv_n}{u_n^2 + v_n^2} \rightarrow \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{1}{b}$$

und für den Quotient gilt

$$\frac{z_n}{w_n} = z_n \cdot \frac{1}{w_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

■

Bemerkung. Gilt $z_n \rightarrow a$, so gilt es auch $\overline{z_n} \rightarrow \overline{a}$ da $|\overline{z_n} - \overline{a}| = |\overline{z_n - a}| = |z_n - a| \rightarrow 0$.

4.10 Konvergenz komplexwertiger Reihen

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ konvergent ist. Der Summe (der Wert) der konvergenten Reihe wird wie folgt definiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Nach dem Satz 4.12 ist die Reihe $\sum a_k$ konvergent genau dann, wenn die beiden reellwertigen Reihen $\sum \operatorname{Re} a_k$ und $\sum \operatorname{Im} a_k$ konvergieren, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k. \quad (4.31)$$

Für komplexwertige Reihen gelten die Rechenregeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad c \in \mathbb{C},$$

vorausgesetzt, dass die Reihen in den rechten Seiten konvergent sind. Beweis folgt aus dem Satz 4.13. Es folgt aus (4.31), dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} = \overline{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)}.$$

Satz 4.14 (a) (Restreihe-Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent genau dann, wenn $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent ist, für jedes $m \in \mathbb{N}$.

(b) (Triviale Kriterium) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim a_k = 0$.

Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ heißt die *Restreihe* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Die Folge $\{a_k\}$ heißt *Nullfolge* falls $\lim a_k = 0$. Dann (b) ergibt folgendes: ist die Folge $\{a_k\}$ keine Nullfolge, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. (a) Betrachten wir die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und $T_n = \sum_{k=m}^n a_k$ mit $n > m$. Dann gilt

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{m-1} a_k =: C,$$

wobei die Konstante C unabhängig von n ist. Daraus folgt, dass S_n konvergiert genau dann, wenn T_n es tut.

(b) Für die Partialsummen gilt

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n.$$

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^n a_k$ konvergent, so ist die Folge $\{S_n\}$ konvergent. Dann konvergiert auf $\{S_{n-1}\}$ gegen gleichen Grenzwert, woraus folgt

$$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0.$$

■

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $x \in \mathbb{C}$. Genauso wie im reellen Fall ist diese Reihe für $|x| < 1$ konvergent, da

$$S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \frac{1}{1 - x} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

weil $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \rightarrow 0$. Zeigen wir, dass die geometrische Reihe für $|x| \geq 1$ divergent ist. In der Tat ist in diesem Fall die Folge $\{x^k\}$ keine Nullfolge, da $|x^k| = |x|^k \geq 1$, woraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ divergiert.

4.11 Majorantenkriterium und absolute Konvergenz

Satz 4.15 (Majorantenkriterium) *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexwertige Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine nicht-negative konvergente Reihe. Gilt*

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (4.32)$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \quad (4.33)$$

Gilt die Bedingung (4.32), so heißt die Reihe $\sum b_k$ die *Majorante* von $\sum a_k$. Man sagt auch, dass $\sum a_k$ von $\sum b_k$ majorisiert wird.

Beweis. Bezeichnen wir $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dann gilt es für alle Indizen $n > m$

$$|A_n - A_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = B_n - B_m. \quad (4.34)$$

Die Folge $\{B_n\}$ konvergiert und somit ist eine Cauchy-Folge, d.h. $B_n - B_m \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Daraus folgt, dass auch $|A_n - A_m| \rightarrow 0$. Somit ist $\{A_n\}$ eine Cauchy-Folge, und die Reihe $\sum a_k$ konvergiert. Die Ungleichung (4.33) folgt aus $|A_n| \leq B_n$, die analog zu (4.34) bewiesen wird. ■

Beispiel. Betrachten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$ wobei $\{c_k\}$ eine beliebige beschränkte Folge von komplexen Zahlen (zum Beispiel, $c_k = i^k$ oder $c_k = (-1)^k$). Wir behaupten, dass diese Reihe absolut konvergiert. Sei C eine obere Schranke von $\{|c_k|\}$, d.h. $|c_k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da

$$\left| \frac{c_k}{k^2} \right| \leq \frac{C}{k^2}$$

und die Reihe $\sum \frac{C}{k^2} = C \sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist (siehe Aufgabe 100), so erhalten wir nach Satz 4.15 dass $\sum \frac{c_k}{k^2}$ auch konvergent ist.

07.07.17

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Korollar 4.16 *Ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, so ist sie konvergent. Es gilt auch*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad (4.35)$$

Beweis. Setzen wir $b_k = |a_k|$. Die nicht-negative Folge $\sum b_k$ konvergiert nach Voraussetzung und ist Majorante von $\sum a_k$. Nach Satz 4.15 ist $\sum a_k$ konvergent und (4.35) gilt. ■

4.12 Bedingte Konvergenz

Es gibt die Reihen, die konvergent aber nicht absolut konvergent sind. Sie heißen *bedingt konvergent*. Zum Beispiel, die Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist bedingt konvergent. Für den Beweis brauchen wir den folgenden Satz.

Satz 4.17 (Leibniz-Kriterium) *Sei $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen reellen Zahlen mit $c_k \rightarrow 0$. Dann ist die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \dots \quad (4.36)$$

konvergent und die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k c_k$ erfüllen die Ungleichungen

$$S_{2m-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \leq S_{2m} \quad (4.37)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerken wir, dass im Fall $c_k \not\rightarrow 0$ die Reihe (4.36) nach dem Trivialekriterium divergent ist.

Beweis. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a_m = S_{2m-1} \quad \text{und} \quad b_m = S_{2m},$$

z.B.

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 = -c_1 \\ b_1 &= S_2 = -c_1 + c_2 \\ a_2 &= S_3 = -c_1 + c_2 - c_3 \\ b_2 &= S_4 = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 \end{aligned}$$

usw. Beweisen wir, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_m \leq a_{m+1} \leq b_{m+1} \leq b_m. \quad (4.38)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} b_m &= S_{2m} \\ &= S_{2m-1} + (-1)^{2m} c_{2m} \\ &= S_{2m-1} + c_{2m} \\ &\geq S_{2m-1} = a_m, \end{aligned}$$

und somit auch $b_{m+1} \geq a_{m+1}$. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= S_{2m+1} \\ &= S_{2m} + (-1)^{2m+1} c_{2m+1} \\ &= S_{2m-1} + (-1)^{2m} c_{2m} + (-1)^{2m+1} c_{2m+1} \\ &= S_{2m-1} + c_{2m} - c_{2m+1} \\ &\geq S_{2m-1} = a_m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= S_{2m+2} \\ &= S_{2m+1} + (-1)^{2m+2} c_{2m+2} \\ &= S_{2m} + (-1)^{2m+1} c_{2m+1} + (-1)^{2m+2} c_{2m+2} \\ &= S_{2m} - c_{2m+1} + c_{2m+2} \\ &\leq S_{2m} = b_m. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen (4.38) bedeuten, dass die Folge $\{[a_m, b_m]\}$ eine Intervallschachtelung ist. Dann existieren

$$a = \lim a_m \quad \text{und} \quad b = \lim b_m.$$

Da $b_m - a_m = c_{2m} \rightarrow 0$, so folgt es, dass $a = b$. Es folgt aus (4.38)

$$a_m \leq a \leq b_m. \quad (4.39)$$

Da $\lim S_{2m} = a = \lim S_{2m+1}$, so folgt es, dass auch $\lim S_n = a$. Insbesondere ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ konvergent. Die Ungleichung (4.37) ist äquivalent zu (4.39). ■

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, da die Folge $\{\frac{1}{n}\}$ monoton fallend ist und $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Andererseits ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (siehe Aufgabe 101), so dass die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt ist.

4.13 * Kommutativ und Assoziativgesetze für die Reihen

Für die absolut konvergenten Reihen gelten die Kommutativ- und Assoziativgesetze, die wir ohne Beweis angeben.

Behauptung. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Reihe, die aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Vertauschung und Gruppierung der Glieder erhalten wird. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ auch absolut konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Für die bedingt konvergenten Reihen gilt im Gegenteil folgendes.

Behauptung. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann für jedes $c \in \mathbb{R}$ es gibt eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, die aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Vertauschung der Glieder erhalten wird und so dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = c$.

Zum Beispiel, man kann die Glieder in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ so vertauschen, dass die vertauschte Reihe gegen $+\infty$ divergiert.

4.14 Quotientenkriterium

Satz 4.18 (Quotientenkriterium, d'Alembert-Kriterium) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine komplexwertige Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n . Gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. Setzen wir $r = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Sei zunächst $r < 1$. Fixieren wir ein $\lambda \in (r, 1)$ (z.B. $\lambda = \frac{1+r}{2}$) und setzen $\varepsilon = \lambda - r > 0$. Nach Definition des Grenzwertes existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \quad \forall n \geq N.$$

Es folgt, dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \lambda \quad \forall n \geq N$$

und somit

$$|a_{n+1}| \leq \lambda |a_n| \quad \forall n \geq N. \quad (4.40)$$

Per Induktion erhalten wir, dass

$$|a_n| \leq \lambda^{n-N} |a_N| \quad \forall n \geq N.$$

Da $0 < \lambda < 1$, so erhalten wir

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq |a_N| \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^{n-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = |a_N| \frac{1}{1-\lambda} < \infty,$$

d.h. die Restreihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Sei jetzt $r > 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt, dass für alle $n \geq N$

$$|a_{n+1}| > |a_n|,$$

so dass $a_n \rightarrow 0$ unmöglich ist. Nach dem Trivialkriterium ist die Reihe $\sum a_n$ divergent. ■

Chapter 5

Exponentialfunktion

5.1 Exponentialreihe und die Zahl e

Definition. Sei $x \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots\end{aligned}$$

heißt die *Exponentialreihe*.

Behauptung. Die *Exponentialreihe* konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{C}$.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Konvergenz offensichtlich. Sei $x \neq 0$. Setzen wir $a_n = \frac{x^n}{n!}$ und erhalten

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

und die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium des Satzes 4.18. ■

Definition. Die Summe der Exponentialreihe heißt die *Exponentialfunktion* von $x \in \mathbb{C}$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \quad (5.1)$$

Ist x reell, dann ist $\exp(x)$ auch reell, was man aus (5.1) sieht. Die Zahl $\exp(1)$ heißt die *e-Zahl* und wird auch mit e bezeichnet, so dass

$$\boxed{e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots}$$

Man erhält Annäherungen von e indem man die Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

für großen Werten von N berechnet. Zum Beispiel, es gilt

$$S_N = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = \frac{9864101}{3628800} = 2.718281801\dots$$

In der Tat gilt

$$e = 2,718281828459045\dots$$

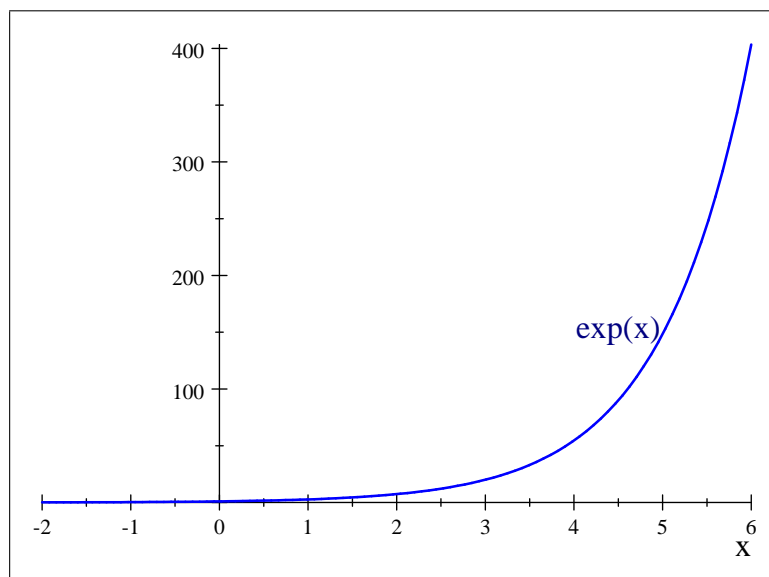
Bemerken auch, dass $\exp(0) = 1$. Numerische Berechnung mit Hilfe von (5.1) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} \exp(2) &= 7,38905609893065\dots \\ \exp(3) &= 20,0855369231877\dots \\ \exp(4) &= 54,5981500331442\dots \\ \exp(5) &= 148,413159102577\dots \\ \exp(6) &= 403,428793492735\dots \end{aligned}$$

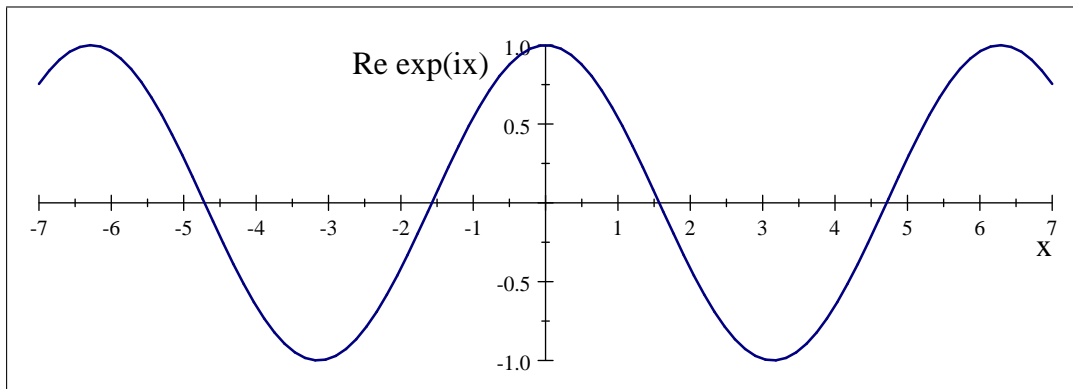
usw. Es folgt aus (5.1), dass die Funktion $\exp(x)$ für $x > 0$ positiv und monoton steigend ist. Später beweisen wir, dass diese Eigenschaften auch für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Zum Beispiel, es gilt

$$\begin{aligned} \exp(-1) &= 0,367879441171442\dots \\ \exp(-2) &= 0,135335283236613\dots \\ \exp(-3) &= 0,004978706836786\dots \end{aligned}$$

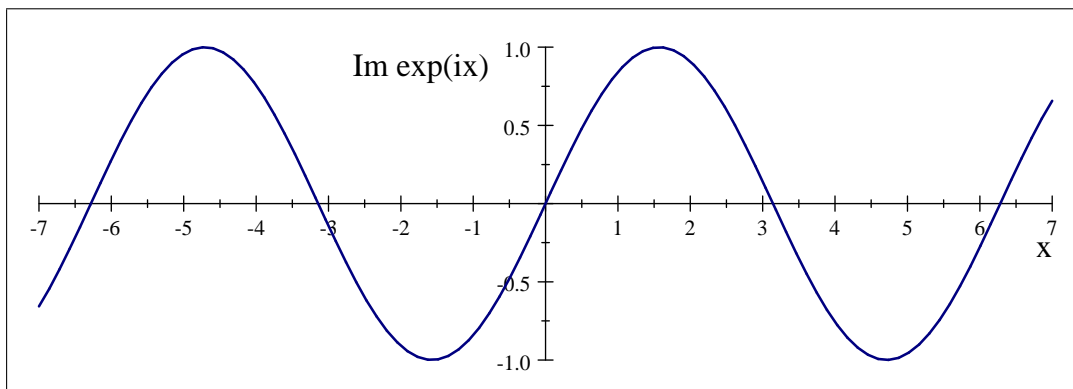
usw. Der Graph der Funktion $f(x) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ sieht wie folgt aus:



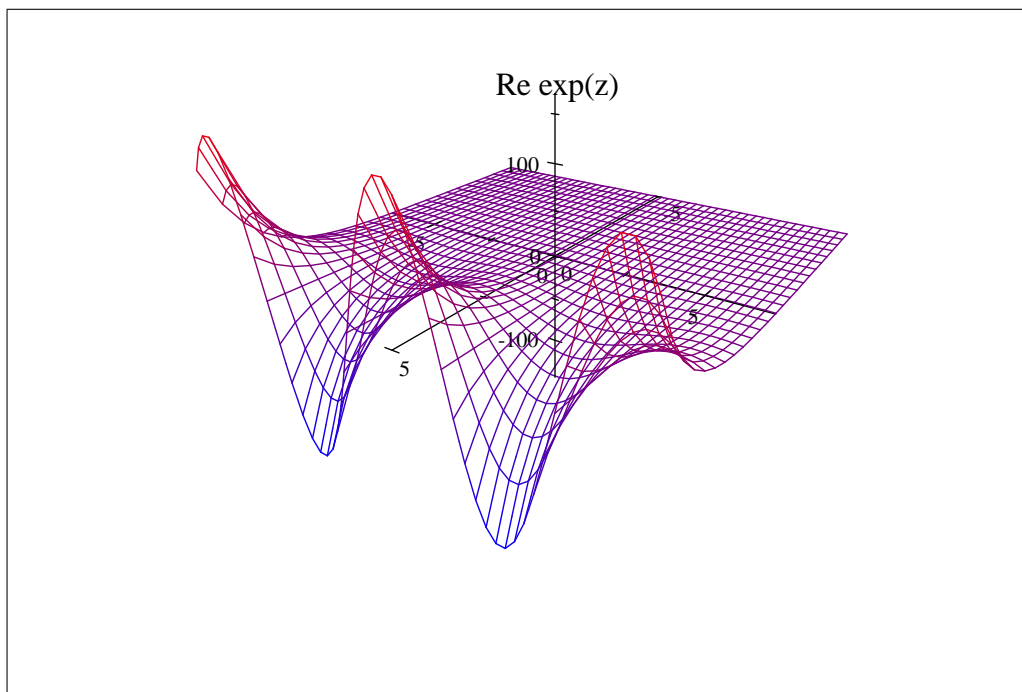
Betrachten wir jetzt die Funktion $f(x) = \exp(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$, so dass das Argument der Exponentialfunktion imaginär ist. Der Graph des Realteiles $\operatorname{Re} \exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph des Imaginärteiles $\operatorname{Im} \exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph der Funktion $\operatorname{Re} \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ ist wie folgt:



5.2 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz 5.1 (Äquivalente Definition der Exponentialfunktion) Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (5.2)$$

Insbesondere erhalten wir die folgende äquivalente Definition von der Zahl e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Beweis. Setzen wir

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und

$$z_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Da $z_n \rightarrow \exp(x)$, so reicht es zu beweisen, dass

$$z_n - y_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach dem Satz 2.18 haben wir

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.3)$$

woraus folgt, dass

$$z_n - y_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

Bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \\ &= (n-k)! (n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^k (n-k)!} &= \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}^{n \text{ Glieder}}}{n^k (n-k)!} = \frac{\overbrace{(n-k)!}^{n-k \text{ Glieder}} \overbrace{(n-k+1) \dots (n-1) n}^{k \text{ Glieder}}}{n^k (n-k)!} \\ &= \frac{\overbrace{(n-k+1) \dots (n-1) n}^{k \text{ Glieder}}}{n^k} \leq 1. \end{aligned}$$

Für alle $n > N \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |z_n - y_n| &\leq \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^N \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^n \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^N \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die zweite Summe in (5.4) ist die Restreihe der Exponentialreihe und somit konvergiert gegen 0 für $N \rightarrow \infty$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Da für jedes $k = 0, \dots, N$ gilt

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{(n-k+1) \dots (n-1) n}{n^k} = \frac{n-k+1}{n} \frac{n-k+2}{n} \dots \frac{n}{n} \rightarrow 1$$

für $n \rightarrow \infty$, so erhalten wir, dass die erste Summe in (5.4) gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Insbesondere ist die erste Summe von ε beschränkt für alle genügend große n . Es folgt, dass die ganze Summe in (5.4) und somit $|z_n - y_n|$ von 2ε beschränkt für alle genügend große n ist, woraus $|z_n - y_n| \rightarrow 0$ folgt. ■

Satz 5.2 (Haupteigenschaft der Exponentialfunktion) *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Identität*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y). \quad (5.5)$$

Beweis. Wir benutzen die offensichtliche Folgerung aus (5.3): für $|x| < 1$ gilt

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}. \quad (5.6)$$

Auch benutzen wir die folgende Identität:

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab = (1+a+b) \left(1 + \frac{ab}{1+a+b}\right). \quad (5.7)$$

Nach dem Satz 5.1 haben wir

$$\exp(x) \exp(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Bemerken wir, dass nach (5.7)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n &= \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) \right]^n \\ &= \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{n+x+y}\right)^n. \end{aligned}$$

Da $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow \exp(x)$, $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \rightarrow \exp(y)$ und

$$\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \rightarrow \exp(x+y) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

so reicht es zu beweisen, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{n+x+y}\right)^n \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

Bemerken wir, dass für $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{xy}{n+x+y} \right| \rightarrow 0.$$

Nach (5.6) erhalten wir, für $n \rightarrow \infty$,

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{n+x+y} \right)^n - 1 \right| \leq \frac{\left| \frac{xy}{n+x+y} \right|}{1 - \left| \frac{xy}{n+x+y} \right|} \rightarrow 0,$$

woraus (5.8) folgt. ■

Satz 5.3 (a) Für jedes $x \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x) \neq 0$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x)$ reell und positiv.

(c) Für alle reelle $x > y$ gilt $\exp(x) > \exp(y)$ (d.h. die Funktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend)

(d) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$ wobei $e = \exp(1)$.

Beweis. (a) Die Identität (5.5) ergibt für $y = -x$,

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = 1, \quad (5.9)$$

woraus $\exp(x) \neq 0$ folgt.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ dann gilt $\exp(x) \in \mathbb{R}$ weil nach Definition

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (5.10)$$

Für $x = 0$ gilt $\exp(0) = 1 > 0$. Für $x > 0$ gilt nach (5.10)

$$\exp(x) > 1 > 0,$$

da alle Glieder in (5.10) positiv sind. Ist $x < 0$ dann ist $-x > 0$ und somit $\exp(-x) > 0$, was zusammen mit (5.9) ergibt

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

(c) Nach (5.9) und (5.5) erhalten wir

$$\frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x) \exp(-y) = \exp(x-y) > 1,$$

da $x - y > 0$.

(d) Zunächst beweisen wir die Identität

$$\exp(k) = e^k \quad (5.11)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ gilt (5.11) nach Definition von e . Induktionsschritt: gilt (5.11) für ein $k \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir nach (5.5)

$$\exp(k+1) = \exp(k) \exp(1) = e^k e = e^{k+1}.$$

Für $k = 0$ haben wir $\exp(0) = 1 = e^0$. Für negative $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir nach (5.9)

$$\exp(k) = \frac{1}{\exp(-k)} = \frac{1}{e^{-k}} = e^k.$$

■

Die Identität (5.11) motiviert die folgende Definition der Potenz e^x für alle komplexe Zahlen x :

$$e^x := \exp(x).$$

Mit dieser Notation gilt $e^{x+y} = e^x e^y$. Zum Beispiel haben wir $e^{1/2} = \sqrt{e}$ da $e^{1/2} e^{1/2} = e^{1/2+1/2} = e$ und somit erfüllt $e^{1/2}$ die Definition von \sqrt{e} .

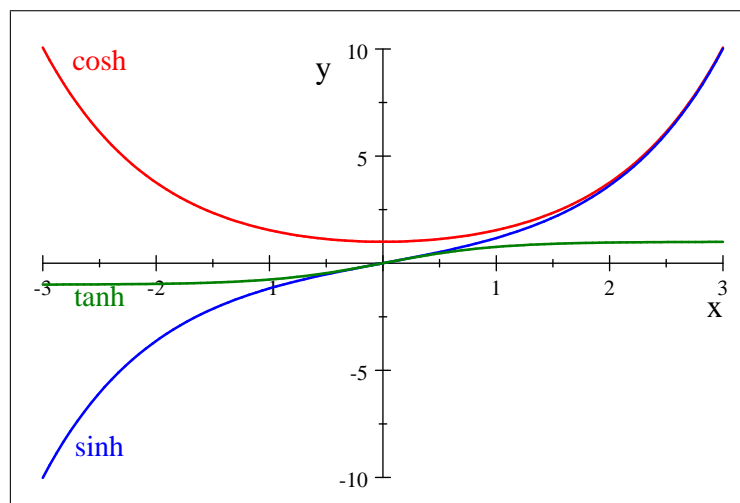
Später definieren wir die Potenzfunktion a^x für alle reelle $a > 0$ and alle $x \in \mathbb{C}$.

5.3 Hyperbelfunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* Kosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus usw. werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), & \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\cosh x$ ist offensichtlich gerade, d.h. $\cosh(-x) = \cosh x$, und $\sinh x$ ist ungerade, d.h. $\sinh(-x) = -\sinh x$. Die Graphen von $\cosh x$, $\sinh x$ und $\tanh x$ für $x \in \mathbb{R}$ sehen wie unterhalb aus:



Weitere Eigenschaften sind in Aufgaben.

5.4 Trigonometrische Funktionen

Definition. Für jedes $x \in \mathbb{C}$ definieren wir $\cos x$ und $\sin x$ durch

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}, \quad (5.12)$$

wobei i die imaginäre Einheit ist. Setzen wir auch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

in den Bereichen, wo die Quotienten wohldefiniert sind.

Bemerken wir, dass sogar für reelle x benutzt die Definition (5.12) von $\sin x$ und $\cos x$ die Werte von $\exp(z)$ im komplexen Bereich.

Es folgt direkt nach (5.12), dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}. \quad (5.13)$$

Diese Identität heißt *Eulerformel*.

Es folgt aus (5.12), dass $\cos x$ eine gerade Funktion ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

und $\sin x$ eine ungerade Funktion ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Satz 5.4 Für alle $x \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten:

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} \quad (5.14)$$

und

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,} \quad (5.15)$$

wobei die beiden Reihen absolut konvergent sind.

Beweis erfolgt nach Einsetzen von der Exponentialreihe in (5.12) (siehe Aufgabe 112). Es folgt aus (5.15) und (5.14), dass $\sin x$ und $\cos x$ reell sind für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Identitäten (5.14) und (5.15) lassen sich für numerische Berechnung von $\cos x$ bzw $\sin x$ anwenden. Zum Beispiel,

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} = 0,540\dots$$

und

$$\sin \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^5}{5!} = 0,479\dots$$

Satz 5.5 (a) Es gilt für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1.} \quad (5.16)$$

(b) Es gelten für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Beweis. (a) Nach (5.13) haben wir

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

und

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

woraus folgt nach dem Satz 5.2

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos(-x) + i \sin(-x)) \\ &= e^{ix} e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Beweis von (b) folgt auch aus dem Satz 5.2 (siehe Aufgabe 112). ■

Beziehung zum Begriff von Winkel. Fixieren wir ein $x \in \mathbb{R}$. Dann sind $\cos x$ und $\sin x$ reell, und wir erhalten aus (5.13) dass

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix},$$

und aus (5.16) dass $|e^{ix}| = 1$. Somit bestimmt e^{ix} einen Winkel α , so dass

$$e^{ix} = z_\alpha. \quad (5.18)$$

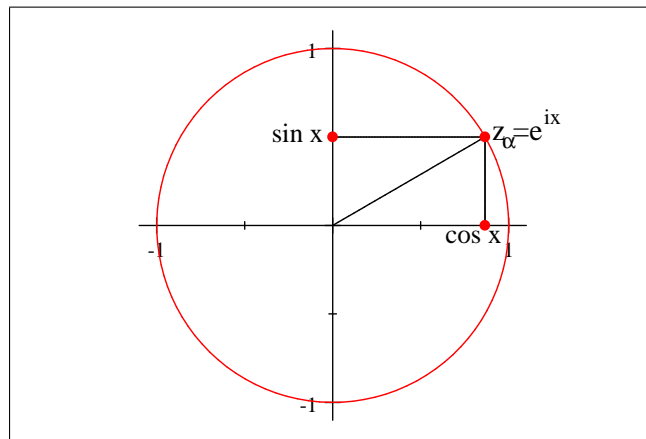
Es folgt, dass

$$\cos \alpha = \operatorname{Re} z_\alpha = \operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$$

und

$$\sin \alpha = \operatorname{Im} z_\alpha = \operatorname{Im} e^{ix} = \sin x.$$

Somit stimmen die Winkelfunktionen \cos und \sin mit den trigonometrischen Funktionen überein.



Die Zahl $z_\alpha = e^{ix}$

Definition. Ist (5.18) erfüllt, so wird x das *Bogenmaß* des Winkels α genannt. Man sagt auch, dass das Bogenmaß von α gleich x *Radian*t ist.

Sei y noch eine reelle Zahl, und sei β der Winkel mit dem Bogenmaß y , d.h. $e^{iy} = z_\beta$. Dann gilt

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta = e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)},$$

so dass das Bogenmaß von $\alpha + \beta$ ist $x + y$. Somit ist die Addition von Winkeln und Addition von ihren Bogenmaßen übereinstimmen.

Allerdings kennen wir noch nicht, ob jeder Winkel das Bogenmaß hat. Das wird später bewiesen.

Chapter 6

Funktionen einer reellen Variablen

In diesem Kapitel studieren wir die reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen, d.h. die Funktionen $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ wobei der Definitionsbereich J eine Teilmenge von \mathbb{R} ist. Wir kennen schon viele Beispiele von solchen Funktionen.

1. Lineare Funktion $f(x) = ax + c$.
2. Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit dem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ oder sogar $n \in \mathbb{Z}$.
4. Ein Polynom

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

vom beliebigen Grad $n \in \mathbb{N}$ und mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$.

5. Gebrochen lineare Funktion $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ und allgemeinere *rationale* Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei P und Q zwei Polynome sind.

6. Quadratwurzel $f(x) = \sqrt{x}$.
7. Die n -te Wurzel¹ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit dem Exponenten $n \in \mathbb{N}$.
8. Exponentialfunktion $f(x) = e^x$.
9. Trigonometrische Funktionen $\cos x$ und $\sin x$.
10. Hyperbelfunktionen $\cosh x$ und $\sinh x$.

Unser Ziel ist die Bedingungen für Existenz der inversen Funktion zu erhalten. So werden wir in der Lage sein, die *logarithmische* Funktion und die *inversen trigonometrischen* Funktionen einzuführen.

¹Die Existenz und Eindeutigkeit von $\sqrt[n]{x}$ für $x \geq 0$ lassen sich genau so beweisen, wie die Existenz und Eindeutigkeit von \sqrt{x} .

6.1 Stetige Funktionen

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig* an der Stelle $a \in J$ falls für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in J$ und $x_n \rightarrow a$ gilt

$$f(x_n) \rightarrow f(a). \quad (6.1)$$

Sonst heißt f *unstetig* an a .

Ist f stetig an jedem Punkt $a \in J$, so heißt f stetig auf J .

Äquivalent, f ist stetig auf J falls für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ aus J mit $\lim x_n \in J$ gilt

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n),$$

d.h. f und \lim sind vertauschbar.

Beispiel. Es ist offensichtlich, dass die Funktionen $f(x) = \text{const}$ und $f(x) = x$ stetig auf \mathbb{R} sind.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist unstetig an $x = 0$, da für die Folge $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ gilt $f(x_n) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0)$.

Sind f und g zwei Funktionen auf einem Intervall J , so werden die Funktionen $f + g$, $f - g$, fg , f/g auf J wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

wobei im Fall von Division $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ vorausgesetzt wird.

Satz 6.1 Seien f, g zwei reellwertige Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Sind f und g stetig an der Stelle $a \in J$, so sind auch die Funktionen $f + g$, fg , f/g stetig an a (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).

Sind f, g stetig auf J , so sind $f + g$, $f - g$, fg , f/g auch stetig auf J (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Folge aus J mit $x_n \rightarrow a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim((f + g)(x_n)) &= \lim(f(x_n) + g(x_n)) \\ &= \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(a) + g(a) = (f + g)(a), \end{aligned}$$

woraus die Stetigkeit von $f + g$ an a folgt. Analog beweist man die Stetigkeit von $f - g$, fg und f/g . ■

Beispiel. Da die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \text{const}$ stetig auf \mathbb{R} sind, so folgt es, dass jede Funktion $h(x) = cx^n$ stetig auf \mathbb{R} ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass jedes *Polynom*

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

stetig auf \mathbb{R} ist, wobei $c_k \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir eine rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei P und Q zwei Polynome sind. Dann ist f definiert und stetig in jedem Intervall wo $\{Q \neq 0\}$.

Beispiel. Beweisen wir, dass die Funktion e^x stetig auf \mathbb{R} ist. Zunächst zeigen wir, dass $\exp(x)$ an $x = 0$ stetig ist, d.h.

$$e^{x_n} \rightarrow 1 \quad \text{für jede Folge } x_n \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Wir haben für jedes $x \in (-1, 1)$

$$|e^x - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

Da $x_n \rightarrow 0$ ergibt

$$\frac{|x_n|}{1 - |x_n|} \rightarrow 0,$$

so erhalten wir

$$|e^{x_n} - 1| \rightarrow 0$$

und somit (6.2).

Beweisen wir jetzt, dass e^x stetig an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ ist. In der Tat erhalten wir für jede Folge $x_n \rightarrow a$

$$e^{x_n} = e^{x_n - a + a} = e^a e^{x_n - a} \rightarrow e^a$$

da $x_n - a \rightarrow 0$ und somit $e^{x_n - a} \rightarrow 1$.

Beispiel. Beweisen wir, dass die trigonometrischen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ stetig auf \mathbb{R} sind. Bemerken wir zunächst, dass die Eigenschaft (6.2) auch für komplexwertige Folgen $\{x_n\}$ gilt, mit dem gleichen Beweis. Auch wie oberhalb erhalten wir, dass für jede komplexwertige Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{x_n} \rightarrow e^a.$$

Sei jetzt $\{x_n\}$ eine reellwertige Folge mit $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$. So erhalten wir $ix_n \rightarrow ia$ und somit

$$\cos x_n = \frac{e^{ix_n} + e^{-ix_n}}{2} \rightarrow \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \cos a$$

und

$$\sin x_n = \frac{e^{ix_n} - e^{-ix_n}}{2i} \rightarrow \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \sin a.$$

Somit sind $\cos x$ und $\sin x$ stetig.

6.2 Stetigkeit von Komposition

Satz 6.2 Seien A, B zwei Intervalle und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Ist f stetig an $a \in A$ und g stetig an $b = f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig an a .

Ist f stetig auf A und g auf B , so ist $g \circ f$ stetig auf A .

Offensichtlich ist die Komposition $g \circ f(x) = g(f(x))$ wohldefiniert auf A ist, da $f(x) \in B$.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Folge aus A mit $x_n \rightarrow a$. Wir brauchen zu beweisen, dass

$$g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)).$$

In der Tat gilt nach der Stetigkeit von f

$$f(x_n) \rightarrow f(a),$$

woraus folgt nach der Stetigkeit von g

$$g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)),$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. Für jede rationale Funktion $f(x)$ ist die Funktion $e^{f(x)} = \exp \circ f$ stetig im Definitionsbereich von $f(x)$.

18.07.17

6.3 Zwischenwertsatz

Hauptsatz 6.3 (Zwischenwertsatz) Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem geschlossenen Intervall $[a, b]$. Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so existiert $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis. Definieren wir per Induktion nach k eine Folge von Intervallen $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a \leq a_k \leq b_k \leq b$ und mit den Eigenschaften:

1. $f(a_k) \leq 0$, $f(b_k) \geq 0$;
2. $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$;
3. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$;

Induktionsanfang: $[a_1, b_1] = [a, b]$. Induktionsschritt von k nach $k+1$. Ist $[a_k, b_k]$ schon bekannt, so betrachten wir $c = \frac{a_k + b_k}{2}$. Gilt $f(c) \leq 0$, so setzen wir $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c, b_k]$, gilt $f(c) > 0$ so setzen wir $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c]$.

Es folgt aus der 3. Eigenschaft, dass

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Wie im Beweis des Satzes 4.11 erhalten wir, dass die Folgen $\{a_k\}, \{b_k\}$ konvergent sind und

$$\lim a_k = \lim b_k =: x.$$

Nach der Stetigkeit der Funktion f gelten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k).$$

Da $f(a_k) \leq 0$ und $f(b_k) \geq 0$, es folgt, da $f(x) \leq 0$ und $f(x) \geq 0$, somit $f(x) = 0$.

■

Beispiel. Sei $P(x)$ ein Polynom von Grad n mit reellen Koeffizienten, d.h.

$$P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n,$$

where $c_k \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Bemerken wir, dass für $x = k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{P(k)}{k^n} = 1 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \dots + \frac{c_n}{k^n} \rightarrow 1 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

und gleiches gilt für $x = -k$, d.h.

$$\frac{P(-k)}{(-k)^n} \rightarrow 1 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Sei n ungerade. Dann gilt $(-k)^n < 0$ und somit auch $P(-k) < 0$ für große Werte von k . Da $k^n > 0$ so gilt auch $P(k) > 0$ für große Werte von k . Es folgt, dass es ein k gibt mit

$$P(-k) < 0 \quad \text{und} \quad P(k) > 0.$$

Nach dem Satz 6.3 existiert $x \in (-k, k)$ mit $P(x) = 0$. Somit hat jedes Polynom mit dem ungeraden Grad immer eine reelle Nullstelle.

Definition. Für jede nicht leere Menge $S \subset \mathbb{R}$ definieren wir das *Supremum* von S wie folgt. Ist S nach oben beschränkt, so ist $\sup S$ die kleinste obere Schranke von S , die nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert (siehe die Aufgabe 40). Ist S nach oben unbeschränkt, so setzen wir $\sup S = +\infty$. Analog definiert man das *Infimum* von S : ist S nach unten beschränkt, so ist $\inf S$ die größte untere Schranke von S , und sonst $\inf S = -\infty$.

Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge A . Dann bezeichnen wir

$$\sup_A f := \sup f(A)$$

and

$$\inf_A f := \inf f(A),$$

wobei $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ das Bild von A ist.

Korollar 6.4 Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann ist das Bild $f(I)$ auch ein Intervall, und die Grenzen von $f(I)$ sind $m = \inf_I f$ und $M = \sup_I f$.

Man kann kurz sagen: stetiges Bild eines Intervalles ist auch ein Intervall.

Beweis. Nach Definition haben wir

$$f(I) \subset [m, M].$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$f(I) \supset (m, M),$$

d.h.

$$m < t < M \quad \Rightarrow \quad t \in f(I).$$

Nach Definition von $M = \sup f(I)$, die Zahl t ist keine obere Schranke von $f(I)$, so dass gibt es ein $b \in I$ mit $t < f(b)$. Analog ist t keine untere Schranke von $f(I)$, so dass es gibt $a \in I$ mit $t > f(a)$. Also erhalten wir

$$f(a) < t < f(b).$$

Sei $a < b$ (der Fall $a > b$ ist analog). Betrachten wir auf dem Intervall $[a, b] \subset I$ die Funktion

$$g(x) = f(x) - t$$

die erfüllt

$$g(a) = f(a) - t < 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - t > 0.$$

Nach Satz 6.3 existiert $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$ woraus $f(x) = t$ und somit $t \in f(I)$ folgt. ■

Beispiel. Beweisen wir, dass

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty). \quad (6.3)$$

Da Da nach Satz 5.3 gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $e^n > n$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\sup \exp(\mathbb{R}) = +\infty \quad \text{and} \quad \inf \exp(\mathbb{R}) = 0.$$

Nach Korollar 6.4 ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall mit den Grenzen 0 und $+\infty$, woraus (6.3) folgt.

6.4 * Extremwertsatz

Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge A . Bezeichnen wir

$$\max_A f = \max f(A) \quad \text{und} \quad \min_A f = \min f(A),$$

vorausgesetzt, dass $\max f(A)$ bzw $\min f(A)$ existiert.

Hauptsatz 6.5 (Extremwertsatz oder Satz vom Minimum und Maximum) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall I . Dann existieren die beiden Werten $\max_I f$ und $\min_I f$.*

Beweis. Setzen wir $M = \sup_I f$. Wir werden beweisen, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = M$, woraus folgen wird, dass $M = \max_I f$ (insbesondere $M \in \mathbb{R}$).

Wählen wir beliebig eine Folge $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ von reellen Zahlen mit

$$M_n < M_{n+1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M.$$

Z.B. für $M \in \mathbb{R}$ setzen wir $M_n = M - \frac{1}{n}$, für $M = +\infty$ setzen wir $M_n = n$. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist M_n keine obere Schranke von $f(I)$, so gibt es ein $x_n \in I$ mit

$$f(x_n) > M_n.$$

Definieren wir per Induktion nach k eine Folge von Intervallen $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k, b_k \in I$ und mit den Eigenschaften:

1. jedes Intervall $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder von $\{x_n\}$;
2. $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$;
3. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für Induktionsanfang setzen wir $[a_1, b_1] = I$, so dass $[a_1, b_1]$ alle Folgenglieder $\{x_n\}$ enthält. Sei $[a_k, b_k]$ schon definiert. Nach Induktionsvoraussetzung enthält $[a_k, b_k]$ unendlich viele Folgenglieder von $\{x_n\}$. Setzen wir $c = \frac{a_k + b_k}{2}$ und bemerken, dass mindestens ein von zwei Intervallen $[a_k, c]$, $[c, b_k]$ unendlich viele Elemente der Folge $\{x_n\}$ enthält. Bezeichnen wir dieses Intervall mit $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, so dass

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$$

und

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2},$$

da $c - a_k = b_k - c = \frac{b_k - a_k}{2}$.

Die Folgen $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ sind konvergent und haben den gleichen Grenzwert:

$$x := \lim a_k = \lim b_k \in [a, b].$$

(siehe die Beweise der Sätze 4.11 und 6.3). Beweisen wir, dass $f(x) = M$, was implizieren wird, dass $M = \max_I f$.

Jedes Intervall $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$; wählen wir ein $x_n \in [a_k, b_k]$ mit $n > k$ und bezeichnen es mit y_k . Dann gilt

$$f(y_k) = f(x_n) > M_n > M_k.$$

Da auch $f(y_k) \leq M$ und $M_k \rightarrow M$, so folgt es nach den Dreifolgensatz, dass

$$\lim f(y_k) = M.$$

Andererseits, da $a_k \leq y_k \leq b_k$, so erhalten wir, dass

$$\lim y_k = x.$$

Nach der Stetigkeit von f gilt

$$\lim f(y_k) = f(x),$$

woraus $f(x) = M$ folgt.

Analog beweist man die Existenz von $\min_I f$. ■

Korollar 6.6 Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall I . Dann ist das Bild $f(I)$ auch ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Darüber hinaus gilt

$$f(I) = \left[\min_I f, \max_I f \right].$$

Kurz: stetiges Bild von kompaktem Intervall ist kompaktes Intervall.

Beweis. Nach Korollar 6.4 ist $f(I)$ ein Intervall mit den Grenzen A und B , wobei

$$A = \inf_I f \quad \text{und} \quad B = \sup_I f.$$

Nach Satz 6.5 haben wir $A, B \in f(I)$ und

$$A = \min_I f \quad \text{und} \quad B = \max_I f,$$

woraus $f(I) = [A, B]$ folgt. ■

6.5 Die Zahl π

21.07.17

Hier beweisen wir einige Eigenschaften von Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$. Da

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \tag{6.4}$$

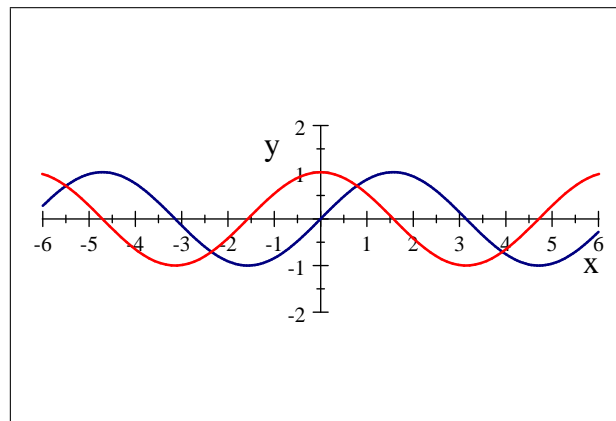
so folgt es, dass $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$. Nach dem Satz 5.4 gelten die Identitäten

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Insbesondere erhalten wir, dass

$$\cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad \sin 0 = 0.$$

Wir benutzen auch die Stetigkeit von $\cos x$ und $\sin x$.



Die Graphen von Funktionen $\cos x$ (rot) und $\sin x$ (blau)

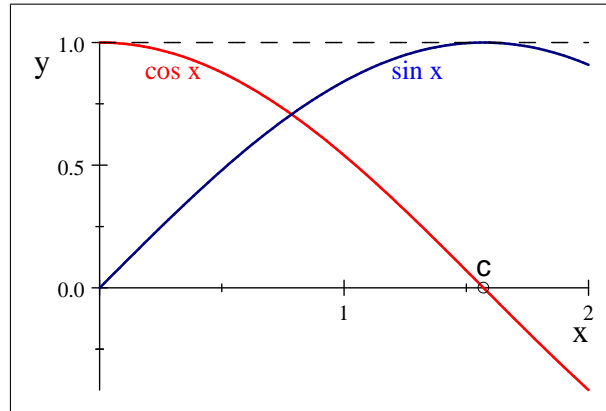
Man sieht aus den Graphen, dass die Funktionen $\sin x$ and $\cos x$ *periodisch* sind, was nicht offensichtlich aus den Definitionen. Wir beweisen die Periodizität von $\sin x$ und $\cos x$ unterhalb.

Satz 6.7 (a) Es gilt $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, 2)$.

(b) Es existiert genau ein $c \in (0, 2)$ mit $\cos c = 0$. Es gilt $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, c)$.

Insbesondere ist c die kleinste positive Zahl mit $\cos c = 0$. Es folgt aus dem Satz 6.7, dass $\sin c > 0$, was zusammen mit (6.4) ergibt $\sin c = 1$. Es folgt auch aus dem Satz 6.7 und (6.4), dass für alle $x \in (0, c)$ gilt

$$0 < \sin x < 1, \quad 0 < \cos x < 1.$$



Die Graphen von Funktionen $\cos x$ (rot) und $\sin x$ (blau) auf dem Intervall $[0, 2]$

Beweis. (a) Wir haben

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = b_0 - b_1 + b_2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k,$$

wobei $b_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Für $x \in (0, 2)$ und jedes $n \geq 0$ haben wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{4}{(2n+2)(2n+3)} < 1,$$

woraus folgt, dass die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend ist.

Betrachten wir die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$. Nach dem Satz 4.17 gilt

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \geq S_{2m+1} \text{ für alle } m \geq 0.$$

Insbesondere gilt für $x \in (0, 2)$

$$\sin x \geq S_1 = x - \frac{x^3}{6} = x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > x \left(1 - \frac{4}{6}\right) > 0,$$

was zu beweisen war.

(b) Zeigen wir, dass $\cos 2 < 0$. Wir haben

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} - \dots = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k,$$

wobei $a_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. Die Folge $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ist monoton fallend da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^2}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1.$$

Sei $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Nach dem Satz 4.17 gilt es für jedes $m \in \mathbb{N}$,

$$\cos 2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq S_{2m}.$$

Insbesondere gilt

$$\cos 2 \leq S_2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0,$$

woraus $\cos 2 < 0$ folgt. Da $\cos 0 > 0$, so erhalten wir nach dem Satz 6.3, dass $\cos c = 0$ für ein $c \in (0, 2)$.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit von c . Gibt es zwei Zahlen $c_1, c_2 \in (0, 2)$ mit $\cos c_1 = \cos c_2 = 0$, so nehmen wir an $c_1 > c_2$ und erhalten

$$\sin(c_1 - c_2) = \sin c_1 \cos c_2 - \cos c_1 \sin c_2 = 0.$$

Allerdings gilt $c_1 - c_2 \in (0, 2)$ und somit nach (a) auch $\sin(c_1 - c_2) > 0$. Dieser Widerspruch beweist, dass $c_1 = c_2$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\cos x > 0$ für $0 < x < c$. Wir wissen schon, dass $\cos x = 0$ nicht möglich ist. Gilt $\cos x < 0$ für ein $x \in (0, c)$ so erhalten wir nach Satz 6.3 die Existenz von einem $y \in (0, x)$ mit $\cos y = 0$ was nicht möglich ist. Daher gilt $\cos x > 0$, was zu beweisen war. ■

Definition. Definieren wir die Zahl π mit $\pi := 2c$ wobei c die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist, die nach dem Satz 6.7 existiert.

Es folgt aus Satz 6.7, dass $0 < \pi < 4$. Man kann beweisen, dass $c > \frac{3}{2}$ und somit $\pi > 3$. Numerische Berechnung ergibt

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

Derzeitig ist π mit über 10^{13} Dezimalstellen berechnet worden. Die Zahl π ist irrational. Eine gute Annäherung von π ist die rationale Zahl $\frac{355}{113} = 3,1415929\dots$

Satz 6.8 (a) *Es gelten die Identitäten*

$$\boxed{e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1.} \quad (6.5)$$

(b) *Die Funktion e^z ist $2\pi i$ periodisch auf \mathbb{C} , d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$*

$$\boxed{e^{z+2\pi i} = e^z.} \quad (6.6)$$

(c) *Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind 2π periodisch, d.h. für alle $x \in \mathbb{C}$*

$$\boxed{\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{und} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x.}$$

Beweis. (a) Benutzen wir die Bezeichnung $c = \pi/2$ wie in Satz 6.7. Da $\cos c = 0$ und somit nach (5.16) $\sin c = 1$, erhalten wir nach der Eulerformel

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{ci} = \cos c + i \sin c = i.$$

Es folgt, dass

$$e^{\pi i} = e^{ci} e^{ci} = i \cdot i = -1,$$

und

$$e^{2\pi i} = e^{\pi i} e^{\pi i} = (-1)^2 = 1. \quad (6.7)$$

(b) Mit Hilfe von (6.7) und der Haupteigenschaft der Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

(c) Mit Hilfe von (5.12) und (6.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \frac{1}{2i} (e^{ix+2\pi i} - e^{-ix-2\pi i}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x, \end{aligned}$$

und das gleiche Argument funktioniert für $\cos x$. ■

Die Identität $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ist äquivalent zu

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Dann erhalten wir aus (5.17)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Es folgt aus $e^{\pi i} = -1$, dass

$$\cos \pi = -1 \quad \text{und} \quad \sin \pi = 0$$

und somit aus (5.17)

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \text{und} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Andere Identitäten für trigonometrischen Funktionen lassen sich analog beweisen.

6.6 * Numerische Berechnung von π

Man kann die erste positive Nullstelle c von $\cos x$ (und somit die Zahl π) numerisch mit Hilfe von einem Taschenrechner mit Funktion \cos berechnen. Sieben Schritte des Verfahrens im Beweis des Satzes 6.3 ergeben die folgende Intervallschachtelung.

| k | a_k | $\frac{a_k+b_k}{2}$ | b_k |
|-----|--|---|---|
| 1 | 0 $\cos 0 = 1 > 0$ | 1,5 $\cos 1,5 > 0$ | 2 $\cos 2 \approx -0,41 < 0$ |
| 2 | 1,5 $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$ | 1,75 $\cos 1,75 \approx -0,178 < 0$ | 2 $\cos 2 \approx -0,41 < 0$ |
| 3 | 1,5 $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$ | 1,625 $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$ | 1,75 $\cos 1,75 \approx -0,178 < 0$ |
| 4 | 1,5 $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$ | 1,5625 $\cos 1,5625 \approx 0,0082 > 0$ | 1,625 $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$ |
| 5 | 1,5625 $\cos 1,5625 \approx 0,0082 > 0$ | 1,59375 $\cos 1,59375 \approx -0,0229 < 0$ | 1,625 $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$ |
| 6 | 1,5625 $\cos 1,5625 \approx 0,0082 > 0$ | 1,578125 $\cos 1,578125 \approx -0,0073 < 0$ | 1,59375 $\cos 1,59375 \approx -0,0229 < 0$ |
| 7 | 1,5625 $\cos 1,5625 \approx 0,0082 > 0$ | 1,5703125 $\cos 1,5703125 \approx 0,00048 > 0$ | 1,578125 $\cos 1,578125 \approx -0,0073 < 0$ |

Somit $c \approx 1,57$ und $\pi \approx 3,14$.

6.7 Monotone Funktionen

Definition. Eine reellwertige Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I heißt *monoton steigend*, falls $x \leq y$ ergibt $f(x) \leq f(y)$. Die Funktion heißt *streng monoton steigend*, falls $x < y$ ergibt $f(x) < f(y)$. Analog definiert man die *monoton fallende* Funktionen.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist streng monoton steigend auf \mathbb{R} nach dem Satz 5.3.

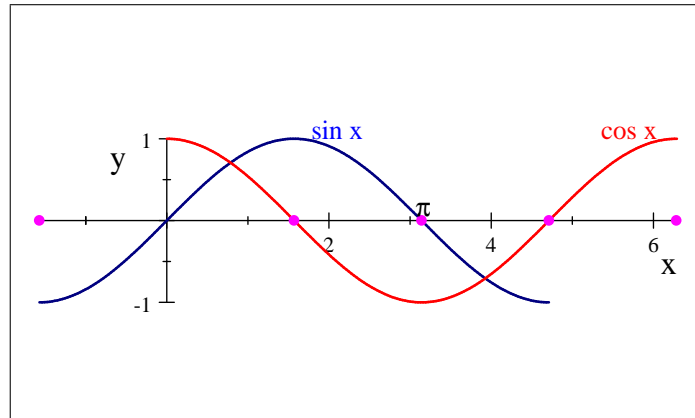
Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$, was man per Induktion nach n beweist.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^n$ mit $n \in -\mathbb{N}$ ist streng monoton fallend auf $(0, +\infty)$, was aus $x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ folgt.

Satz 6.9 (a) Die Funktion $\sin x$ ist streng monoton steigend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Die Funktion $\cos x$ ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$.

Es folgt aus $\sin(\pi - x) = \sin x$, dass $\sin x$ streng monoton fallend auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ist, und aus $\cos(2\pi - x) = \cos x$, dass $\cos x$ streng monoton steigend auf $[\pi, 2\pi]$ ist.



$\sin x$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (blau) und $\cos x$ auf $[0, 2\pi]$ (rot)

Beweis. (a) Wir haben $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$ und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Da für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt $0 < \sin x < 1$ und für $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ gilt $-1 < \sin x < 0$ und $\sin x = -\sin(-x)$, so reicht es zu beweisen, dass $\sin x$ streng monoton steigend auf $(0, \frac{\pi}{2})$ ist, d.h. $\sin x > \sin y$ für alle $x > y$ aus dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Setzen wir $y = x - t$ wobei $0 < t < x$. Wir haben

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= \sin x - \sin(x - t) \\ &= \sin x - (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \\ &= \sin x (1 - \cos t) + \cos x \sin t > 0, \end{aligned}$$

da alle Zahlen $\sin x$, $1 - \cos t$, $\cos x$, $\sin t$ positiv sind.

(b) Diese Aussage folgt aus (a) und aus der Identität $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. In der Tat haben wir

$$x \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Für beliebige $x < y$ aus $[0, \pi]$ gilt $\frac{\pi}{2} - x > \frac{\pi}{2} - y$ und somit

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y.$$

Somit ist $\cos x$ auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend. ■

6.8 Inverse Funktion

Nach Satz 1.2, eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ zwischen zweien beliebigen Mengen A und B hat eine Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ genau dann, wenn f bijektiv ist. In diesem Fall gelten die Identitäten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

und

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

Es folgt, dass

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Sind A, B Teilmengen von \mathbb{R} , dann heißt f^{-1} auch die *Umkehrfunktion* oder die *inverse Funktion*.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, die durch $f(x) = x^2$ definiert ist. Da die Bedingung $y = x^2$ für nicht-negative x und y äquivalent zu $x = \sqrt{y}$ ist, wir sehen, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, die Bedingung $y = \frac{1}{x}$ ist äquivalent zu $x = \frac{1}{y}$. Deshalb f^{-1} existiert und ist gleich f .

Satz 6.10 (Satz von der inversen Funktion) *Sei f eine stetige, streng monotone steigende (bzw fallende) Funktion auf einem Intervall I . Dann ist die Bildmenge $J = f(I)$ ein Intervall und die inverse Funktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ existiert, ist stetig und streng monoton steigend (bzw fallend).*

Beispiel. Die Funktion $y = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist stetig, streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$ und ihre Bildmenge ist $[0, +\infty)$. Deshalb existiert die inverse Funktion auf $[0, +\infty)$ und ist stetig. Diese Funktion wird mit $x = \sqrt[n]{y}$ bezeichnet. Diese Funktion ist streng monoton steigend und stetig auf $[0, +\infty)$.

Beweis von Satz 6.10. Da f stetig ist, so ist $J = f(I)$ ein Intervall nach dem Korollar 6.4. Sei f streng monoton steigend. Dann ist f eine Bijektion von I nach J , und somit existiert die inverse Funktion nach dem Satz 1.2.

Beweisen wir, dass f^{-1} auch streng monotone steigend ist. Für beliebige $y_1 < y_2$ aus J , beweisen wir, dass

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Gilt $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ dann erhalten wir nach der Monotonie von f , dass

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2,$$

was im Widerspruch zum $y_1 < y_2$ steht.

Beweisen wir, dass f^{-1} stetig ist, d.h. für jedes $b \in J$ und für jede Folge $\{y_n\}$ aus J gilt

$$y_n \rightarrow b \Rightarrow f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(b).$$

Setzen wir $x_n = f^{-1}(y_n)$ und $a = f^{-1}(b)$. Wir müssen beweisen, dass in jeder Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ von a fast alle Glieder der Folge $\{x_n\}$ liegen. Da

$$f(a - \varepsilon) < f(a) < f(a + \varepsilon),$$

und $y_n \rightarrow f(a)$, so erhalten wir, dass für fast alle n

$$f(a - \varepsilon) < y_n < f(a + \varepsilon).$$

Da f^{-1} streng monoton steigend ist, so folgt es daraus, dass für fast alle n

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

was zu beweisen war. ■

6.9 Logarithmische Funktion

Die Exponentialfunktion e^x ist streng monoton steigend auf \mathbb{R} und die Bildmenge von e^x ist $(0, +\infty)$. Deshalb hat e^x die inverse Funktion auf $(0, +\infty)$, die auch stetig und monoton steigend ist.

Definition. Die inverse Funktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit \ln bezeichnet.

Somit für jedes $y > 0$ ist $\ln y$ durch die Identität

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

definiert. Nach Satz 6.10 ist die Funktion $y \mapsto \ln y$ streng monoton steigend und stetig auf $(0, +\infty)$. Die Bildmenge von \ln ist \mathbb{R} .

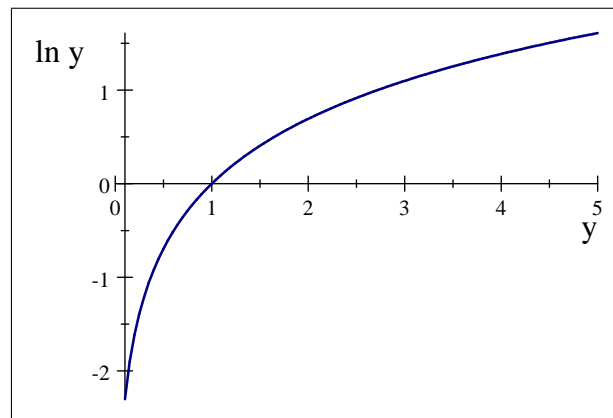
Da die Exponentialfunktion und Logarithmus invers sind, so erhalten wir, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln e^x = x$$

und für alle $y > 0$ gilt

$$e^{\ln y} = y.$$

Es folgt, dass $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$.



Der Graph der Funktion $y \mapsto \ln y$

Die Funktion \ln erfüllt für alle $a, b > 0$ die Identität

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

da

$$ab = e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}.$$

Fixieren wir ein $a > 0$. Natürlicher Logarithmus lässt uns die Potenzen a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ (und sogar $x \in \mathbb{C}$) definieren wie folgt:

$$a^x := e^{x \ln a}. \quad (6.8)$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis a .

Die Funktion a^x hat die folgenden Eigenschaften:

1. $a^1 = a$ da $e^{\ln a} = a$, und $a^0 = 1$ da $e^0 = 1$.

2. $a^{x+y} = a^x a^y$ da

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}.$$

3. Für $n \in \mathbb{Z}$ stimmt die neue Definition (6.8) von a^n mit der früheren induktiven Definition (2.7) von a^n überein, was man genauso beweist, wie den Satz 5.3(d).

4. Für $x \in \mathbb{R}$ ist a^x reell und positive, und die Funktion $x \mapsto a^x$ ist stetig auf \mathbb{R} als Komposition zweier stetigen Funktionen.

5. $\ln a^x = x \ln a$.

6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a^x)^y = a^{xy}. \quad (6.9)$$

da

$$(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{y(x \ln a)} = e^{(xy) \ln a} = a^{xy}.$$

Es folgt aus (6.9), dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

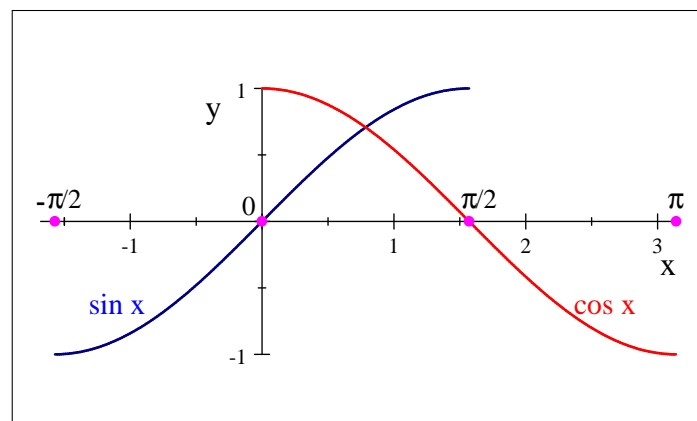
$$(a^{1/n})^n = a,$$

d.h. die Zahl $x = a^{1/n}$ erfüllt die Gleichung $x^n = a$. Da die einzige positive Lösung von dieser Gleichung ist $x = \sqrt[n]{a}$, so erhalten wir die Identität

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

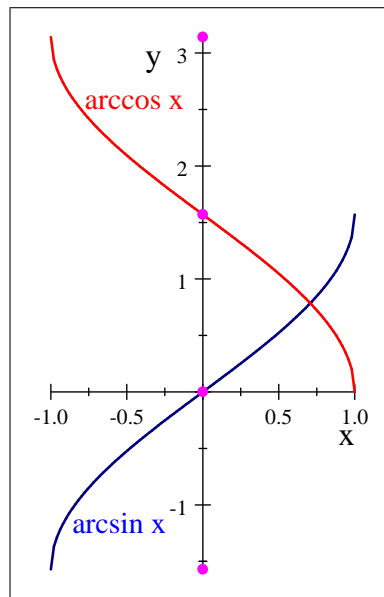
6.10 Inverse trigonometrische Funktionen

Betrachten wir die Funktion $f(x) = \cos x$ auf dem Intervall $I = [0, \pi]$. Diese Funktion ist stetig und streng monoton fallend, so dass die inverse Funktion f^{-1} existiert mit dem Definitionsbereich $J = f(I) = [-1, 1]$ und der Bildmenge $[0, \pi]$. Die Funktion f^{-1} heißt *Arkuskosinus* und wird mit \arccos bezeichnet. Der Definitionsbereich von \arccos ist das Intervall $[-1, 1]$ und die Bildmenge ist $[0, \pi]$,



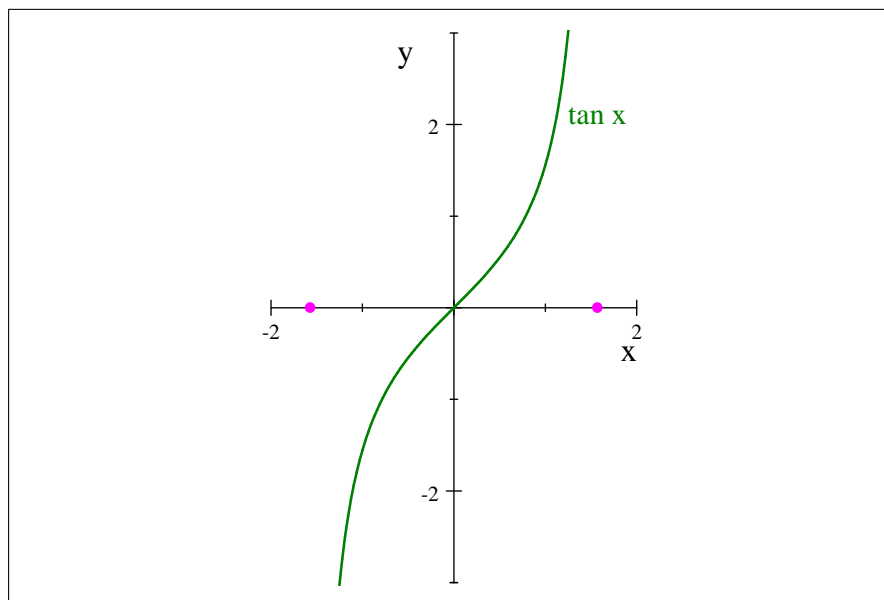
Funktionen $\cos x$ auf $[0, \pi]$ (rot) und $\sin x$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (blau).

Analog betrachten wir $f(x) = \sin x$ auf $I = [-\pi/2, \pi/2]$. Da $f(x)$ auf diesem Intervall streng monoton steigend ist und $J = f(I) = [-1, 1]$, so existiert die inverse Funktion f^{-1} mit dem Definitionsbereich $[-1, 1]$. Die inverse Funktion von \sin wird mit \arcsin bezeichnet und heißt *Arkussinus*. Der Definitionsbereich von \arcsin ist das Intervall $[-1, 1]$ und die Bildmenge ist $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

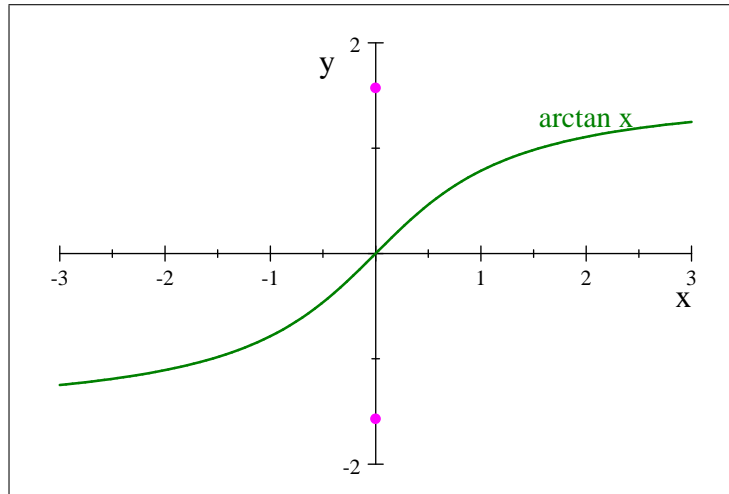


Funktionen arcsin (blau) und arccos (rot)

Man kann beweisen, dass die Funktion $f(x) = \tan x$ im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton steigend ist und das Bild von \tan gleich $(-\infty, +\infty)$ ist.



Die inverse Funktion f^{-1} heißt *Arkustangens* und wird mit \arctan bezeichnet. Der Definitionsbereich von \arctan ist $(-\infty, +\infty)$ und die Bildmenge ist $(-\pi/2, \pi/2)$.



6.11 * Bogenmaß

Jedes $x \in \mathbb{R}$ bestimmt einen Winkel α mit $z_\alpha = e^{ix}$. Der Wert x heißt das Bogenmaß des Winkels α . Zum Beispiel, für $x = 0$ haben wir

$$e^{0i} = 1 = z_0 = 0$$

so dass das Bogenmaß des Winkels 0 die Zahl 0 ist. Für $x = \pi$ gilt

$$e^{\pi i} = -1 = z_\pi,$$

so dass das Bogenmaß des Winkels π die Zahl π ist. Für $x = \pi/2$ gilt

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i = z_{\frac{\pi}{2}},$$

so dass das Bogenmaß des Winkels $\pi/2$ die Zahl $\pi/2$ ist.

Allerdings gibt es zwei Probleme mit dem Begriff von Bogenmaß.

1. Warum gibt es für jeden Winkel α das Bogenmaß?
2. Das Bogenmaß ist nicht eindeutig bestimmt: ist x das Bogenmaß des Winkels α , so ist auch $x + 2\pi k$ das Bogenmaß von α für jedes $k \in \mathbb{Z}$, da

$$e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix} e^{2\pi k i} = e^{ix} = z_\alpha.$$

Hier lösen wir diese Probleme.

Satz 6.11 (a) Für jeden Winkel α gibt es das Bogenmaß $x \in [0, 2\pi)$ von α .

(b) Für jeden Winkel α ist das Bogenmaß $x \in [0, 2\pi)$ von α eindeutig bestimmt. Ist $y \in \mathbb{R}$ auch das Bogenmaß von α , so gilt $y = x + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (a) Sei α ein Winkel und sei $z_\alpha = a + ib$ d.h. $a = \cos \alpha$ und $b = \sin \alpha$. Ein $x \in \mathbb{R}$ ist das Bogenmaß von α falls $e^{ix} = z_\alpha$, d.h.

$$\cos x + i \sin x = a + ib,$$

was äquivalent zu

$$\cos x = a \quad \text{und} \quad \sin x = b. \tag{6.10}$$

Die Zahlen a und b erfüllen die Bedingung

$$a^2 + b^2 = 1. \quad (6.11)$$

Wir beweisen, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit (6.11) gibt es eine Lösung $x \in [0, 2\pi)$ von (6.10). Sei zunächst $b \geq 0$. In diesem Fall hat (6.10) die Lösung

$$x = \arccos a \in [0, \pi].$$

In der Tat gilt $\cos x = a$ nach Definition von \arccos . Da $x \in [0, \pi]$, so gilt $\sin x \geq 0$, woraus folgt

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - a^2} = b.$$

Sei $b < 0$. In diesem Fall schreiben wir (6.10) um wir folgt:

$$\cos(-x) = a, \quad \sin(-x) = -b. \quad (6.12)$$

Da $-b \geq 0$, so hat (6.12) eine Lösung

$$-x = \arccos a$$

d.h.

$$x = -\arccos a \in [-\pi, 0].$$

Dann erhalten wir auch die andere Lösung

$$x = 2\pi - \arccos a \in [\pi, 2\pi].$$

In der Tat gilt $x \in [\pi, 2\pi)$ da im Fall $x = 2\pi$ gilt $\sin x = 0$ wobei $b < 0$. Somit haben wir in allen Fällen eine Lösung $x \in [0, 2\pi)$ von (6.10) gefunden.

(b) Sei $y \in [0, 2\pi)$ auch das Bogenmaß von α , d.h.

$$\cos x = \cos y, \quad \sin x = \sin y.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x \geq y$. Setzen wir $t = x - y$ und bemerken, dass $t \in [0, 2\pi)$ und

$$\cos t = \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos^2 x + \sin^2 y = 1,$$

woraus folgt $t = 0$, da $\cos t$ den Wert 1 im Intervall $[0, 2\pi)$ nur an der Stelle $t = 0$ annimmt. Es folgt $x = y$ so dass das Bogenmaß in $[0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt ist.

Sei y jetzt das Bogenmaß von α aus \mathbb{R} . Für $k = \lfloor \frac{y}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{y}{2\pi} \leq k < \frac{y}{2\pi} + 1,$$

woraus folgt

$$y - 2\pi k \in [0, 2\pi).$$

Da $y - 2\pi k$ auch das Bogenmaß von α ist und in $[0, 2\pi)$ liegt, so erhalten wir $y - 2\pi k = x$, was zu beweisen war. ■

Ist das Bogenmaß von α gleich x Radiant, so definiert man das Gradmaß G von α wie folgt:

$$G = 180 \frac{x}{\pi} \approx 57,29 \cdot x.$$

Insbesondere ist das Gradmaß des Winkels π gleich 180° .

6.12 * Nullstellen von Polynomen

Hauptsatz 6.12 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ von Grad $n \geq 1$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Wir beweisen, dass die reellwertige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ eine Minimumstelle in \mathbb{C} besitzt und der Wert des Minimums gleich 0 ist, woraus die Existenz einer Nullstelle folgt. Bemerken wir zunächst, dass

$$|P(z)| \rightarrow \infty \text{ für } |z| \rightarrow \infty,$$

da

$$P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

ergibt

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-2}| - \dots - |a_0| \\ &= |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\sim |a_nz|^n \text{ für } |z| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und $|a_nz^n| \rightarrow \infty$ für $|z| \rightarrow \infty$. Wählen wir $R > 0$ so groß, dass $|P(z)| > |a_0|$ für alle $|z| > R$, und betrachten eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$K := \overline{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Da die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ offensichtlich stetig ist, so nimmt die Funktion $|P(z)|$ den minimalen Wert in K an einer Stelle $z_0 \in K$ an. Dann gilt

$$|P(z_0)| \leq |P(0)| = |a_0| < |P(z)| \text{ für alle } z \notin K.$$

Somit ist z_0 die Minimumstelle von $|P(z)|$ nicht nur in K sondern auch in \mathbb{C} .

Zeigen wir, dass $|P(z_0)| = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ (sonst schreiben wir $P(z)$ um als ein Polynom von $(z - z_0)$ und dann $z - z_0$ in z umbenennen). Nehmen wir das Gegenteil an, dass $P(0) \neq 0$, d.h. $a_0 \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a_0 = 1$, d.h.

$$P(z) = 1 + a_1z + \dots + a_nz^n.$$

Zeigen wir die Existenz von einem $z \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| < |P(0)| = 1$, was im Widerspruch zur Minimalität von $|P(0)|$ stehen wird. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ der minimale Index mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(z) = 1 + a_kz^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots + a_nz^n.$$

Jetzt wählen wir $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so dass a_kz^k eine negative reelle Zahl ist, d.h.

$$\arg(a_kz^k) = \pi. \tag{6.13}$$

Da

$$\arg(a_k z^k) = \arg a_k + k \arg z,$$

so wird (6.13) erfüllt, vorausgesetzt

$$\arg z = \frac{\pi - \arg a_k}{k}. \quad (6.14)$$

Jetzt wählen wir $|z|$ so klein (aber nicht Null), dass

$$|a_k z^k| < 1 \quad \text{und} \quad |a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n| < \frac{1}{2} |a_k z^k|, \quad (6.15)$$

was möglich ist, dass

$$\frac{|a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n|}{|a_k z^k|} = \frac{|a_{k+1} z + \dots + a_n z^{n-k}|}{|a_k|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \rightarrow 0.$$

Für z wie in (6.14) und (6.15) gilt

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq |1 + a_k z^k| + |a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n| \\ &\leq |1 + a_k z^k| + \frac{1}{2} |a_k z^k| \quad (\text{da } a_k z^k \text{ negativ ist}) \\ &= 1 + a_k z^k - \frac{1}{2} a_k z^k \\ &= 1 + \frac{1}{2} a_k z^k \\ &< 1, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Sei P ein Polynom von Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ verschiedene komplexe Nullstellen von P . Der Fundamentalsatz der Algebra impliziert die folgende Faktorisierung

$$P(z) = c(z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_l)^{m_l} = c \prod_k (z - \lambda_k)^{m_k}, \quad (6.16)$$

wobei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $m_k \in \mathbb{N}$ (siehe Aufgaben). Die Zahl m_k heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle λ_k . Es gilt auch

$$m_1 + \dots + m_l = n.$$

Sei jetzt $P(z)$ ein Polynom mit reellwertigen Koeffizienten. Dann für jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit Vielfachheit m ist auch die komplexe Konjugierte $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von P , und zwar mit gleicher Vielfachheit m . Insbesondere lassen sich die Faktoren $(z - \lambda)^m$ und $(z - \bar{\lambda})^m$ in (6.16) gruppieren wie folgt:

$$((z - \lambda)(z - \bar{\lambda}))^m = (z^2 + pz + q)^m,$$

wobei $p = -(\lambda + \bar{\lambda})$ und $q = \lambda\bar{\lambda}$ reell sind. Somit erhalten wir aus (6.16) die folgende reellwertige Faktorisierung

$$P(z) = c \prod_i (z - r_i)^{k_i} \prod_j (z^2 + p_j z + q_j)^{m_j},$$

wobei r_i alle reelle Nullstellen von P sind und jeder Faktor $z^2 + p_j z + q_j$ zum Paar $\lambda, \bar{\lambda}$ von konjugierten komplexwertigen Nullstellen von P entspricht.