ОБ ОДНОЙ ЛИУВИЛЛЕВОЙ ТЕОРЕМЕ НА МНОГООБРАЗИИ

А. А. Григорьян

Риманово многообразие M называется гармонически вырожденным, если всякое положительное решение на M уравнения Лапласа — Бельтрами

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

является константой. Напомним, что в локальных координатах это уравнение записывается так:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$

где g_{ij} — коэффициенты римановой метрики, g^{ij} — элементы матрицы $\| g_{ij} \|^{-1}$, $g = \det \| g_{ij} \|$, $n = \dim M$.

В литературе имеется ряд работ, в которых из некоторых геометрических свойств многообразия выводится его гармоническая вырожденность.

В работе [1] доказано, что полное многообразие гармонически вырождено, если объем геодезического шара радиуса R растет не быстрее, чем R^2 при $R \to \infty$. Интересно, что при $n \geqslant 3$ R^2 нельзя заменить на $R^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

В. В. Минахин [2] доказал гармоническую вырожденность полного многообразия при выполнении следующих двух условий:

1) объем всякого геодезического шара радиуса R заключен между $C^{-1}R^n$ и CR^n (где $C > 0$ — константа);

2) если D_1, D_2 — открытые множества, E — гладкая гиперповерхность, образующие вместе разбиение геодезического шара, то $\mathrm{mes}_{n-1} E \geqslant C^{-1} (\mathrm{mes}_n D_{\min})^{(n-1)/n}$, где $D_{\min}$ — то из множеств D_1, D_2, мера которого меньше.

Пользуясь методом Е. М. Ландиса [3], разработанным для исследования самосопряженных уравнений, можно доказать справедливость лиувиллевой теоремы для более широкого класса многообразий. Всюду ниже M обозначает гладкое, связное, полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$. Будем говорить, что в открытом множестве $\Omega \subset M$ выполняется *изопериметрическое неравенство с функцией* f, если для всяких двух открытых множеств D_1, D_2 и гладкой гиперповерхности E, образующих вместе разбиение геодезического шара из Ω, имеет место соотношение $\mathrm{mes}_{n-1} E \geqslant f(\mathrm{mes}_n D_{\min})$. Например, в $\mathbb{R}^n$ выполняется изопериметрическое неравенство с функцией $f(t) = \mathrm{const} \cdot t^{(n-1)/n}$ (см. [4], а также [3]). На многообразии $T^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n-1$, T — единичная окружность, выполняется изопериметрическое неравенство с функцией

$$f(t) = \begin{cases} At^{(n-1)/n}, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ Bt^{(m-1)/m}, & t \geqslant t_0 \end{cases}$$

(A, B, $t_0 > 0$ зависят от n и m).

Положим

$$f(t) = \begin{cases} C_1 t^{(n-1)/n}, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ C_2 t^{\alpha}, & t \geqslant t_1, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$, C_1, C_2, $t_1 > 0$ — некоторые константы.

При каждом $t \geqslant 0$ определим $F(t)$ по формуле $t = \int_0^{F(t)} \frac{ds}{f(s)}$, т. е.

$$F(t) = \begin{cases} C_3 t^n, & 0 \leqslant t \leqslant t_2, \\ C_4 (t + C_5)^{\beta}, & t \geqslant t_2, \end{cases} \tag{3}$$

где $\beta = (1-\alpha)^{-1}$, C_3, C_4, C_5, t_2 зависят от C_1, C_2, t_1, n, α.

Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в M выполнено изопериметрическое неравенство с функцией (2) и, кроме того, объем всякого геодезического шара радиуса R не превосходит $CF(R)$, где*

F определяется из (3), *а $C > 0$ — произвольная константа. Тогда M гармонически вырождено.*

Заметим, что эта теорема допускает степенной рост объема геодезического шара с любым показателем $\beta \geqslant 1$, разумеется, при условии выполнения соответствующего изопериметрического неравенства. Например, $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию теоремы 1 при $\beta = n$, $\alpha = (n-1)/n$, а $T^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ — при $\beta = m$, $\alpha = (m-1)/m$.

Доказательство теоремы 1 опирается на неравенство типа Харнака, представляющее самостоятельный интерес. Обозначим через Q_R^x геодезический шар радиуса R с центром в точке x.

Теорема 2. *Пусть для открытого множества $\Omega \subset M$ справедливы следующие утверждения:*

а) *в Ω выполняется изопериметрическое неравенство с функцией* (2);

б) *если $Q_R^x \subset \Omega$, то $\mathrm{mes}_n Q_R^x \leqslant CF(R)$, где F определяется по формуле* (3), *$C > 0$ — константа;*

в) *если $Q_{2R}^x \subset \Omega$, $Q_R^y \subset \Omega$, то $\mathrm{mes}_n\, Q_{2R}^x \leqslant C\, \mathrm{mes}_n\, Q_R^y$.*

Тогда, если u — положительное решение (1) *в некотором шаре $Q_{2r}^x \subset \Omega$, то $\sup\limits_{Q_r^x} u \leqslant P \inf\limits_{Q_r^x} u$, где P — константа, зависящая от f и C.*

Чтобы воспользоваться этим неравенством при доказательстве теоремы 1, нужно в условиях теоремы 1 проверить справедливость п. в. для $\Omega = M$. Оказывается, что если в M выполняется изопериметрическое неравенство с функцией f, то объем любого шара радиуса R не меньше $F(R)$ (если M не компактно).

Доказательство неравенства Харнака основано на следующей теореме, обобщающей интегральную теорему о среднем М. Л. Гервера и Е. М. Ландиса [5].

Теорема 3. *Пусть G — ограниченное открытое множество в M, F_1 и F_2 — компакты в G, расстояние между которыми равно $L > 0$. Пусть u — C^2-функция в некоторой окрестности $\overline{G}$. Тогда для каждого $\eta > 0$ существует гладкая гиперповерхность S, разделяющая в G компакты F_1 и F_2, и такая, что*

$$\int\limits_S \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| dS < (1+\eta) \frac{\mathrm{mes}_n\, G}{L^2} \operatorname*{osc}_G u,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная по единичной нормали к S, dS — элемент $(n-1)$-мерной меры на S.

Автор глубоко благодарен Е. М. Ландису за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Y. Cheng, S. T. Yau. Differential equations on Riemannian manifold and their geometric applications.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, **28**:3, p. 333—354.

[2] В. В. Минахин. О теореме Лиувилля и неравенстве Харнака для уравнения Бельтрами на произвольном многообразии.— Функц. анализ, 1980, **14**:2, с. 71—72.

[3] Е. М. Ландис. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М.: Наука, 1971.

[4] W. Mazja. Einbettungssätze für Sobolewsche Räume, Bd. 1.— Leipzig; Teubner, 1979.

[5] М. Л. Гервер, Е. М. Ландис. Одно обобщение теоремы о среднем для функций многих переменных.— ДАН, 1962, **146**:4, с. 761—764.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 12 июня 1981 г.