Maß- und Integrationstheorie

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

WS 2021/2022

Contents

Chapter 1

Konstruktion von Maß

13.10.21 **Vorlesung 1**

1.1 Begriff von Maß

Wir bezeichnen immer mit M eine beliebige Menge, wenn nicht anders angegeben. Sie heißt die *Grundmenge*. Ein Mengensystem in M ist eine Mengen von Teilmengen von M d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

Definition. Sei S ein Mengensystem in M mit $\emptyset \in S$. Eine Funktion $\mu : S \to [0, +\infty]$ heißt *endlich additiv* wenn für alle endlichen Folgen $\{A_k\}_{k=1}^n$ von disjunkten Mengen aus S gilt

$$A := \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in S \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{1.1}$$

Gilt (1.1) auch für $n = \infty$ (d.h. für Folgen $\{A_k\}_{k=1}^\infty$) so heißt μ *σ-additiv.*

Die Funktion μ heißt ein *endlich additives Maß* (bzw *σ-additives Maß*), wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und μ endlich additiv ist (bzw σ-additiv).

Bemerken wir, dass endlich additives Maß nicht unbedingt σ-additiv ist (siehe Aufgabe 6 für ein Beispiel dazu).

Die Länge von Intervallen in $\mathbb{R}$. Sei I ein Intervall mit den Grenzen $a \le b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. I ist eines von Intervallen (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$. Die Länge $\ell(I)$ wird wie folgt definiert:

$$\ell(I) = b - a.$$

Diese Definition gilt auch für unbeschränktes Intervall I, d.h. wenn $a = -\infty$ oder $b = +\infty$, und ergibt $\ell(I) = \infty$.

Lemma 1.1 *Die Länge von Intervallen ist endlich additiv.*

Später beweisen wir, dass die Länge auch σ-additiv ist.

Beweis. Für müssen folgendes beweisen: ist ein Intervall I eine disjunkte Vereinigung einer endlichen Folge $\{I_k\}_{k=1}^n$ von Intervallen, d.h.

$$I = \bigsqcup_{k=1}^{n} I_k$$

so gilt die Identität

$$\ell(I) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k).$$

Induktion nach n. Induktionsanfang: für $n = 1$ ist alles trivial. Induktionsschritt von $n-1$ to n. Seien a und b die Grenzen von I. Eines von Intervallen I_k hat die Grenze b, sei es I_n. Sei c die linke Grenze von I_n. Dann ist die Differenz $I \setminus I_n$ ein Intervall mit den Grenzen a und c. Andererseits gilt

$$I \setminus I_n = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} I_k.$$

Nach der Induktionsbehauptung gilt es

$$\ell(I \setminus I_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k).$$

Da

$$\ell(I) = b - a = (b - c) + (c - a) = \ell(I_n) + \ell(I \setminus I_n),$$

so folgt es, dass

$$\ell(I) = \ell(I_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k),$$

was zu beweisen war. ■

1.2 Ring, Algebra, Halbring

Sofern haben wir ein Maß mit einem beliebigen Definitionsbereich $S \subset \mathcal{P}(M)$ definiert. Aber es ist immer wünschenwert, dass der Definitionsbereich S abgeschlossen bezüglich der Mengenoperationen ist.

Ring.

Definition. Ein Mengensystem S in M heißt *Ring* (oder *Mengenring*) wenn

- S enthält $\emptyset$;
- $A, B \in S \implies A \cup B \in S$
- $A, B \in S \Rightarrow A \setminus B \in S$.

Es folgt, dass auch der Durchschnitt $A \cap B$ in S liegt, da

$$A \cap B = B \setminus (B \setminus A) \in S.$$

Somit ist ein Ring S abgeschlossen bezüglich Operationen $\cap, \cup, \setminus$ mit endlichen Folgen von Elementen von S.

Beispiel. Triviale Beispiele von Ringen sind: $S = \{\emptyset\}$, $S = \{\emptyset, M\}$, $S = \mathcal{P}(M)$. Noch ein Beispiel: das Mengensystem

$$S = \{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ ist endlich}\} \tag{1.2}$$

ist ein Ring. Das Mengensystem von allen Intervallen auf $\mathbb{R}$ ist *kein* Ring, da die Vereinigung zweier Intervallen nicht unbedingt ein Intervall ist.

Die abzählbaren Vereinigung und Durchschnitt werden in den folgenden Definitionen umgefasst.

Definition. Ein Ring S heißt *σ-Ring* wenn alle abzählbaren Vereinigungen von Elementen von S auch in S liegen; d.h.

$$A_k \in S \text{ für alle } k = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S. \tag{1.3}$$

Daraus folgt, dass auch abzählbare Durchschnitte $\bigcap_k A_k$ in S liegen. Um das zu beweisen, betrachten wir die Vereinigung $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$ als eine Grundmenge. Da alle A_k und somit auch A in B liegen, so erhalten wir nach der Formel von De Morgan

$$A^c = \left(\bigcap_k A_k\right)^c = \bigcup_k A_k^c = \bigcup_k (B \setminus A_k) \in S$$

woraus folgt dass $A = B \setminus A^c \in S$.

Somit ist σ-Ring abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitte.

Beispiel. Triviale Beispiele von σ-Ringen sind: $S = \{\emptyset\}$, $S = \{\emptyset, M\}$, $S = \mathcal{P}(M)$. Der Ring (1.2) ist kein σ-Ring, da die abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen $\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...$ unendlich ist.

Algebra.

Definition. Ein Ring S heißt *Algebra* (oder *Mengenalgebra*) wenn $M \in S$. Ein σ-Ring S heißt *σ-Algebra* wenn $M \in S$.

Eine Algebra S ist somit abgeschlossen bezüglich der Mengenoperationen $\cap, \cup, \setminus$ mit endlichen Folgen von Elementen von S, und auch bezüglich der Operation von Komplement da

$$A \in S \ \Rightarrow A^c := M \setminus A \in S.$$

Eine äquivalente Definition von Algebra (bzw. σ-Algebra) ist wie folgt.

Definition. Ein Mengensystem S in M heißt Algebra, wenn

- S enthält $\emptyset$;
- $A, B \in S \implies A \cup B \in S$;
- $A \in S \implies A^c \in S$.

Eine Algebra S heißt σ-Algebra, wenn alle abzählbaren Vereinigungen von Elementen von S auch in S liegen.

In der Tat, ist S eine Algebra im Sinn von zweiter Definition, so gilt für alle $A, B \in S$

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in S \quad \text{und} \quad A \setminus B = A \cap B^c \in S.$$

Offensichtlich enthält S auch M da $M = \emptyset^c$. Somit ist die zweite Definition äquivalent zur ersten Definition von Algebra.

Beispiel. Die Mengensysteme $S = \{\emptyset, M\}$ und $S = \mathcal{P}(M)$ sind σ-Algebren, während $S = \{\emptyset\}$ ist nicht. Der Ring

$$S = \{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ ist endlich}\} \tag{1.4}$$

aus (1.2) ist offensichtlich keine Algebra. Betrachten wir anstelle von (1.4) das folgende Mengensystem:

$$S = \{A \subset \mathbb{Z} : \text{entweder } A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich.}\}$$

Dann ist S eine Algebra aber nicht σ-Algebra. Offensichtlich $A \in S$ ergibt $A^c \in S$ und $\emptyset \in S$. Auch $A, B \in S$ ergibt $A \cup B \in S$ da im Fall von endlichen A, B auch $A \cup B$ endlich ist, und im Fall von endlichen A^c (oder B^c) es folgt aus

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c,$$

dass $(A \cup B)^c$ auch endlich ist und somit $A \cup B \in S$. Andererseits die abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen $\{1\}, \{3\}, \{5\}, ...$ ist unendlich, und ihres Komplement ist auch unendlich. Somit ist S keine σ-Algebra.

Halbring.

Definition. Ein Mengensystem S in M heißt ein *Halbring* wenn

- S enthält $\emptyset$;
- $A, B \in S \implies A \cap B \in S$;
- $A, B \in S \implies A \setminus B$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Elementen von S.

Jeder Ring ist offensichtlich ein Halbring.

Beispiel. Das Mengensystem von allen Intervallen in $\mathbb{R}$ ist ein Halbring. Offensichtlich der Durchschnitt zweier Intervalle ist ein Intervall, und die Differenz zweier Intervalle ist entweder ein Intervall oder eine disjunkte Vereinigung zweier Intervalle. Auch das Mengensystem von allen rechts offenen Intervallen der Form $[a, b)$ ist ein Halbring.

Das Mengensystem von allen Rechtecken der Form $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ ist auch ein Halbring (wobei I und J Intervalle sind), was später bewiesen wird.

Symmetrische Differenz. Betrachten wir noch eine Mengenoperation.

Definition. Die *symmetrische Differenz* zweier Mengen $A, B \subset M$ ist die Menge

$$A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

(Das Symbol $\vartriangle$ ist der griechische Buchstabe "Delta").

Eine äquivalente Beschreibung von $A \vartriangle B$: ein Element $x \in M$ liegt in $A \vartriangle B$ genau dann, wenn x genau in einer der Mengen A, B liegt; d.h. entweder $x \in A$ und $x \notin B$ oder $x \notin A$ und $x \in B$.

Lemma 1.2 *Die symmetrische Differenz hat die folgenden Eigenschaften.*

(a) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$

(b) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$

(c) $(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$

(d) $A \vartriangle \emptyset = A$ *und* $A \vartriangle A = \emptyset$.

(e) *Für alle Mengen* $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset M$,

$$(A_1 * A_2) \vartriangle (B_1 * B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2) , \tag{1.5}$$

wobei $*$ *jede von den Operationen* $\cup$, $\cap$, $\setminus$ *bezeichnet.*

Beweis. Die Identitäten (a) und (d) sind offensichtlich. Für die Beweise von (b) und (e) siehe die Aufgaben 16 (b) bzw 10. Die Identität (c) ist Distributivgesetz für $\cap$ über $\vartriangle$, und es folgt aus den ähnlichen Distibutivgesetzen für $\cap$ über $\cup$ und $\setminus$. ■

Die Eigenschaften (a)-(d) ergeben folgendes: ein Mengenring S ist auch ein kommutativer Ring im algebraischen Sinn mit "Addition" $\vartriangle$ und "Multiplikation" $\cap$. Das "Nullelement" ist $\emptyset$, und das "Negative" von A ist A. Die "Multiplikation" hat das "Einheitselement" M da $A \cap M = A$.

1.3 Erweiterung eines Maßes von Halbring auf Ring

Behauptung. *Ist* $\{S_\alpha\}$ *eine nicht-leere Familie von Ringen (bzw* σ*-Ringen), so ist* $S := \bigcap_\alpha S_\alpha$ *auch ein Ring (bzw* σ*-Ring). Hier* α *ist ein Index, der ein Element einer beliebigen Indexmenge ist.*

Warnung. Der Durchschnitt $\bigcap_\alpha S_\alpha$ ist eine Operation über Teilmengen von $\mathcal{P}(M)$ und soll mit Operationen über Teilmengen von M nicht verwechselt werden.

Beweis. Sei $*$ eine von Operationen $\cup, \setminus$ for Teilmengen von M. Es ist gegeben, dass jedes S_α abgeschlossen bezüglich $*$ ist. Daraus folgt, dass auch S abgeschlossen bezüglich $*$ ist, da für alle α

$$A, B \in S \Rightarrow A, B \in S_\alpha \Rightarrow A * B \in S_\alpha \Rightarrow A * B \in S.$$

Auch $\emptyset \in S$ da $\emptyset \in S_\alpha$ für alle α. Somit erfüllt S die Definition von Ring. ■

Definition. Für jedes Mengensystem S in M bezeichnen wir mit $\rho(S)$ den Durchschnitt von allen Ringen, die S umfassen.

Für jedes Mengensystem S gibt es immer einen Ring, der S umfasst, z.B. den Ring $\mathcal{P}(M)$. Deshalb ist $\rho(S)$ wohldefiniert, und nach der obigen Behauptung ist $\rho(S)$ ein Ring. Offensichtlich ist $\rho(S)$ der kleinste Ring, der S umfasst. Das Mengensystem S heißt der *Erzeuger* von $\rho(S)$, und $\rho(S)$ heißt der *erzeugte* Ring von S.

Der nächste Satz beschreibt den Ring $\rho(S)$ wenn S ein Halbring ist.

Satz 1.3 *Ist S ein Halbring, so besteht der Ring $\rho(S)$ aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von den Elementen von S.*

Beispiel. Betrachten wir das Mengensystem $S = \{A, B\}$ das aus zwei Teilmengen A, B von M besteht. Wir behaupten, dass

$$\rho(S) = \{\emptyset,\ A,\ B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \vartriangle B,\ A \cup B\} =: R. \tag{1.6}$$

Offensichtlich gilt $R \subset \rho(S)$ da alle Elemente von R aus A und B durch Mengenoperationen erhalten werden und somit in $\rho(A)$ liegen. Beweisen wir die Inklusion $\rho(S) \subset R$. Dafür reicht es zu beweisen, dass R ein Ring ist, da nach Definition $\rho(S)$ Teilmenge von jedem Ring ist, der S umfasst. Man kann direkt nach der Definition von Ring überprüfen, dass R ein Ring ist, aber dieser Argument ziemlich umständlich ist. Stattdessen betrachten wir noch ein Mengensystem

$$S' = \{\emptyset,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\},$$

dessen Elemente disjunkt sind. Dann ist S' ein Halbring (Aufgabe 1). Nach dem Satz 1.3, $\rho(S')$ besteht aus (endlichen disjunkten) Vereinigungen von Elementen von S'. Man kann leicht sehen, dass alle Vereinigungen von Elementen von S' genau R ergeben:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \setminus B) &= A \\ (A \cap B) \cup (B \setminus A) &= B \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= A \vartriangle B \\ (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= A \cup B. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\rho(S') = R$, woraus folgt, dass R ein Ring ist, was zu beweisen war.

Beweis von dem Satz 1.3. Bezeichnen wir mit R das Mengensystem von endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen von S, d.h.

$$R = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k : A_k \in S,\ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.7}$$

Wir müssen beweisen, dass $R = \rho(S)$. Offensichtlich gilt $R \subset \rho(S)$ da $\rho(S)$ alle Elementen $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ aus (1.7) als ein Ring enthält. Um die Inklusion $\rho(S) \subset R$ zu beweisen, so reicht es zu zeigen, dass R ein Ring ist: da $S \subset R$ so gilt dann $\rho(S) \subset R$ nach der Definition von $\rho(S)$.

Dass R ein Ring ist beweisen wir in einigen Schritten. Sind A und B Elemente von R, so gilt

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{und} \quad B = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$$

mit $A_k, B_l \in S$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Schritt 1. Für alle disjunkte $A, B \in R$ gilt $A \sqcup B \in R$, da $A \sqcup B$ eine disjunkte Vereinigung von allen A_k und B_l ist.

Schritt 2. Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cap B \in R$, da

$$A \cap B = \bigsqcup_{k,l} (A_k \cap B_l)$$

und $A_k \cap B_l \in S$ nach Definition von Halbring.

15.10.21 Vorlesung 2

Schritt 3. Für alle $A, B \in R$ gilt $A \setminus B \in R$. Wir haben

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k} (A_k \setminus B),$$

und es reicht zu zeigen, dass $A_k \setminus B \in R$ (und dann Schritt 1). Dann gilt

$$A_k \setminus B = A_k \setminus \bigsqcup_{l} B_l = \bigcap_{l} (A_k \setminus B_l).$$

Nach Schritt 2, es reicht zu zeigen, dass $A_k \setminus B_l \in R$. Da $A_k, B_l \in S$ und S ein Halbring ist, so ist $A_k \setminus B_l$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Elementen von S, woraus $A_k \setminus B_l \in R$ folgt.

Schritt 4. Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cup B \in R$. Wir haben die Identität

$$A \cup B = (A \setminus B) \bigsqcup (B \setminus A) \bigsqcup (A \cap B),$$

wo alle Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ in R nach den Schritten 2 und 3 liegen. Nach Schritt 1 beschließen wir, dass ihre disjunkte Vereinigung auch in R liegt.

Nach den Schritten 3 und 4 erhalten wir, dass R ein Ring ist, was zu beweisen war. ■

Satz 1.4 *Seien S ein Halbring und μ ein endlich additives Maß auf S.*

- (a) *Es gibt genau ein endlich additives Maß ν auf dem Ring $\rho(S)$, das eine Erweiterung von μ ist (d.h. $\nu|_S = \mu$).*
- (b) *Ist μ σ-additiv so ist ν auch σ-additiv.*

Folglich, für jedes σ-additives Maß μ auf einem Halbring S gibt es eine eindeutige Erweiterung ν auf den Ring $\rho(S)$ die auch σ-additives Maß ist. In Anwendungen benutzt man für das Maß ν die gleiche Notation μ.

Beispiel. Sei S der Halbring von allen Intervallen in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz 1.3 besteht der Ring $R = \rho(S)$ aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von Intervallen. Die Länge ℓ auf S ist endliches Maß und somit sie lässt sich auf R erweitern. Es is offensichtlich, dass für jede Menge $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} I_k$ aus R (wobei $I_k \in S$) gilt $\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$.

Beweis. (a) Nach dem Satz 1.3, der Ring $R = \rho(S)$ besteht aus den Mengen

$$A = \bigsqcup_k A_k \tag{1.8}$$

wobei $A_k \in S$ und die Vereinigung endlich ist. Die Erweiterung ν von μ auf R ist eindeutig, da es für jede Menge A aus (1.8) gilt

$$\nu(A) = \sum_k \nu(A_k) = \sum_k \mu(A_k).$$

Um die Existenz einer Erweiterung von μ zu beweisen, definieren wir $\nu(A)$ für jedes A aus (1.8) mit

$$\nu(A) = \sum_k \mu(A_k). \tag{1.9}$$

Zunächst zeigen wir, dass ν damit wohldefiniert ist, d.h. der Wert von $\nu(A)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung $A = \bigsqcup_k A_k$. ist. Gibt es eine andere endliche Zerlegung $A = \bigsqcup_l B_l$ mit $B_l \in S$, so gilt für jedes k

$$A_k = A_k \cap A = \bigsqcup_l (A_k \cap B_l).$$

Da $A_k \cap B_l \in S$ und μ endlich additiv auf S ist, so erhalten wir

$$\mu(A_k) = \sum_l \mu(A_k \cap B_l).$$

Addieren alle $\mu(A_k)$ ergibt

$$\sum_k \mu(A_k) = \sum_k \sum_l \mu(A_k \cap B_l).$$

Analog haben wir

$$\sum_l \mu(B_l) = \sum_l \sum_k (A_k \cap B_l),$$

woraus folgt $\sum_k \mu(A_k) = \sum_l \mu(B_l)$.

Jetzt beweisen wir, dass die Funktion ν auf R endlich additiv ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass für beliebige zwei disjunkten Mengen A, B aus R gilt

$$\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

(und die gleiche Eigenschaft für disjunkte Vereinigung von n Mengen folgt per Induktion nach n). Seien

$$A = \bigsqcup_k A_k \quad \text{und} \quad B = \bigsqcup_l B_l,$$

mit $A_k, B_l \in S$. Dann ist $A \sqcup B$ die disjunkte Vereinigung von allen Mengen A_k and B_l, woraus folgt

$$\nu(A \sqcup B) = \sum_k \mu(A_k) + \sum_l \mu(B_l) = \nu(A) + \nu(B).$$

(*b*) Sei $A=\bigsqcup_{l=1}^{\infty}B_l$ wobei $A,B_l\in R$. We müssen beweisen, dass für das Maß ν aus (*a*) gilt

$$\nu(A)=\sum_{l=1}^{\infty}\nu(B_l). \tag{1.10}$$

Es gelten die Zerlegungen $A=\bigsqcup_k A_k$ und $B_l=\bigsqcup_m B_{lm}$ wobei $\{A_k\}_k$ und $\{B_{lm}\}_m$ die endliche Folgen von Elementen von S sind. Nach Definition on ν haben wir

$$\nu(A)=\sum_k\mu(A_k)\quad\text{und}\quad\nu(B_l)=\sum_m\mu(B_{lm}). \tag{1.11}$$

Setzen wir

$$C_{klm}=A_k\cap B_{lm}$$

und bemerken, dass $C_{klm}\in S$. Wir haben

$$A_k=A_k\cap A=A_k\cap\bigsqcup_{l,m}B_{lm}=\bigsqcup_{l,m}(A_k\cap B_{lm})=\bigsqcup_{l,m}C_{klm}$$

und

$$B_{lm}=B_{lm}\cap A=B_{lm}\cap\bigsqcup_k A_k=\bigsqcup_k(A_k\cap B_{lm})=\bigsqcup_k C_{klm}.$$

Da μ σ-additiv auf S ist, so erhalten wir

$$\mu(A_k)=\sum_{l,m}\mu(C_{klm})$$

und

$$\mu(B_{lm})=\sum_k\mu(C_{klm}).$$

Diese Identitäten zusammen mit (1.11) ergeben

$$\nu(A)=\sum_k\mu(A_k)=\sum_{k,l,m}\mu(C_{klm})$$

und

$$\sum_l\nu(B_l)=\sum_l\sum_m\mu(B_{lm})=\sum_{l,m,k}\mu(C_{klm}),$$

woraus (1.10) folgt. ■

1.4 Subadditivität

Beweisen von σ-Additivität gegebener Funktion ist häufig eine schwierige Aufgabe, aber ohne σ-Additivität funktioniert die Theorie von Lebesgue-Integration nicht. Betrachten wir den Begriff von σ-Subadditivität, der häufig hilft die σ-Additivität zu beweisen.

Definition. Eine Funktion $\mu:S\to[0,+\infty]$ heißt *endlich subadditiv* wenn für alle endlichen Folgen $\{A_k\}_{k=1}^n$ von Mengen aus S gilt

$$A:=\bigcup_{k=1}^n A_k\in S\ \Rightarrow\ \mu(A)\le\sum_{k=1}^n\mu(A_k). \tag{1.12}$$

Gilt diese Eigenschaft auch für $n = \infty$ (d.h. für Folgen $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$) so heißt μ *σ-subadditiv.*

Lemma 1.5 *Seien S ein Halbring und $\mu : S \to [0, +\infty]$ eine Funktion auf S mit $\mu(\emptyset) = 0$.*

(a) Ist μ endlich additiv so ist μ endlich subadditiv. Ist μ σ-additiv so ist μ σ-subadditiv.

(b) Ist μ endlich additiv und σ-subadditiv so ist μ σ-additiv.

Beweis. In den beiden Punkten (a) und (b) ist μ ein endlich additives Maß. Nach den Satz 1.4, μ lässt sich auf den Ring $R = \rho(S)$ erweitern, so dass die Erweiterung wieder ein endlich additives Maß ist. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass μ auf dem Ring R definiert ist.

(a) Seien A_k und A die Mengen aus (1.12) wobei n endlich oder ∞ ist. Betrachten wir die folgenden Mengen

$$C_1 = A_1,\ C_2 = A_2 \setminus A_1, ...,\ C_k = A_k \setminus A_{k-1} \setminus .... \setminus A_1,\ ...$$

Offensichtlich gilt $C_k \in R$ und

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Da μ additiv auf R ist (endlich additiv wenn $n \in \mathbb{N}$ und σ-additiv wenn $n = \infty$), so gilt

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k). \tag{1.13}$$

Da $C_k \subset A_k$, so haben wir nach Aufgabe 2 dass $\mu(C_k) \leq \mu(A_k)$. Somit folgt (1.12) aus (1.13).

(b) Wir müssen beweisen, dass für Mengen A und A_k aus R,

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \ \Rightarrow\ \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.14}$$

Da μ σ-subadditiv ist, so haben wir

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.15}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A \supset \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Da $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in R$, so erhalten wir nach der endlichen Additivität von μ auf R, dass

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

was zusammen mit (1.15) ergibt (1.14). ∎

1.5 Die Länge ist σ-additiv

Mit Hilfe von dem Lemma 1.5 beweisen wir, dass die Länge ℓ σ-additiv ist.

Sei S das Mengensystem von allen Intervallen in $\mathbb{R}$. Wir wissen, dass S ein Halbring ist. Sei $R = \rho(S)$ der von S erzeugte Ring, der aus den disjunkten Vereinigungen von Intervallen besteht (Satz 1.3). Nach dem Satz 1.4, die Länge ℓ lässt sich eindeutig auf R als endlich additives Maß erweitern.

Satz 1.6 *Die Länge ℓ ist ein σ-additives Maß auf dem Ring $R = \rho(S)$.*

Beweis. Da $\ell(\emptyset) = \ell([0,0)) = 0$, so müssen wir nur die σ-Additivität von ℓ beweisen. Nach dem Satz 1.4 reicht es zu beweisen, dass ℓ auf S σ-additiv ist. Da ℓ nach dem Lemma 1.1 endlich additiv ist, so reicht es nach dem Lemma 1.5 zu beweisen, dass ℓ auf S σ-subadditiv ist. Seien A, $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ Intervalle aus S. Wir müssen folgendes beweisen: gilt

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S \tag{1.16}$$

so gilt auch

$$\ell(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(A_k) \tag{1.17}$$

(der Fall $n < \infty$ folgt aus dem Fall $n = \infty$, da man zur endlichen Folge $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ unendlich viele leere Intervalle zusetzen kann).

Ist ein Intervall von A_k unbeschränkt, dann gilt $\ell(A_k) = \infty$ und (1.17) ist offensichtlich erfüllt. Jetzt nehmen wir an, dass alle Intervalle A_k beschränkt sind. Für ein $\varepsilon > 0$ und für jedes k wählen wir ein offenes Intervall $J_k \supset A_k$ such that

$$\ell(J_k) \leq \ell(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Sei I ein beschränktes abgeschlossenes Teilintervall von A. Da I mit der Folge $\{J_k\}$ von offenen Intervallen überdeckt ist, so erhalten wir nach dem Satz von Heine-Borel (Überdeckungssatz), dass es eine endliche Teilüberdeckung $\{J_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ von I gibt, d.h.

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_{k_i}$$

Nach Lemma 1.5 ist ℓ endlich subadditiv, so dass

$$\ell(I) \leq \ell\left(\bigcup_{k=1}^{n} J_{k_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell(J_{k_i}).$$

Es folgt, dass

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ell(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(A_k) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(A_k).$$

Da $\ell(A) = \sup_I \ell(I)$, so erhalten wir (1.17). ∎

Beispiel. Es gibt endlich additive Maße, die nicht σ-additiv sind. Betrachten wir auf der Menge $M = \mathbb{Q}$ das Mengensystem

$$S = \{I \cap \mathbb{Q} : I \text{ ist ein Intervall in } \mathbb{R}\},$$

und definieren die Funktion $\mu : S \to [0, \infty]$ mit $\mu(I \cap \mathbb{Q}) = \ell(I)$. Dann ist μ endlich additives Mass, aber nicht σ-additiv (siehe Aufgabe 6).

1.6 Äußeres Maß

Ab diesem Abschnitt bedeutet das Wort "Maß" immer "σ-additives Maß".

Ein natürlicher Definitionsbereich eines Maßes ist ein σ-Ring, der bezüglich abzählbarer Vereinigungen und Schnitte abgeschlossen ist. Wir wissen schon, dass ein Maß sich von Halbring auf einen Ring erweitern lässt. Jetzt erweitern wir weiter ein Maß von Ring auf einen σ-Ring. Dafür benutzen wir den Begriff von *äußerem Maß.*

Sei R ein Ring auf M und $\mu : R \to [0, +\infty]$ ein Maß.

Definition. Für jede Teilmenge $A \subset M$ definieren wir das *äußere Maß* $\mu^*(A)$ mit

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in R \text{ und } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}. \tag{1.18}$$

D.h. wir betrachten alle Überdeckungen von A mit den Folgen $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Elementen von R und definieren $\mu^*(A)$ als das Infimum von allen Summen $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ über allen solchen Überdeckungen. Existiert solche Überdeckung nicht, so gilt nach Definition $\mu^*(A) = +\infty$.

Wir betonen, dass das äußere Maß kein Maß sein soll. Bemerken wir auch, dass $\mu^*(A)$ für *alle* Teilmengen $A \subset M$ definiert ist und von μ und R bestimmt ist. Wir werden das äußere Maß μ^* benutzen, um eine Erweiterung von μ auf einen σ-Ring zu erstellen. Zunächst beweisen wir einige Eigenschaften von μ^*.

Lemma 1.7

(a) *(Monotonie) Für alle Teilmengen $A \subset B \subset M$ gilt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.*

(b) *Für alle $A \in R$ gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Beweis. (a) Sei $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Überdeckung von B mit Elementen von R. Dann ist $\{A_k\}$ auch eine Überdeckung von A, und nach (1.18) gilt

$$\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Daraus folgt, dass

$$\mu^*(A) \le \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} = \mu^*(B).$$

(*b*) Sei $A \in R$. Die Folge $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} = \{A, \emptyset, \emptyset, ...\}$ ist eine Überdeckung von A mit Elementen von R, woraus folgt

$$\mu^*(A) \le \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + ... = \mu(A). \tag{1.19}$$

Andererseits, für jede Überdeckung $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ von A mit Elementen von R erhalten wir nach der σ-Subadditivität von μ, dass

$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

woraus $\mu(A) \le \mu^*(A)$ folgt. Vergleichen mit (1.19) ergibt $\mu^*(A) = \mu(A)$. ∎

20.10.21 Vorlesung 3

Lemma 1.8 *Das äußere Maß μ^* ist σ-subadditiv auf $\mathcal{P}(M)$.*

Beweis. Wie müssen folgendes beweisen: für alle Teilmengen A_k von M und für

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \tag{1.20}$$

gilt

$$\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \tag{1.21}$$

Gilt $\mu^*(A_k) = \infty$ für ein A_k, so gilt offensichtlich auch (1.21). Sei $\mu^*(A_k) < \infty$ für alle k. Nach der Definition von μ^*, für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes A_k gibt es eine Folge $\{A_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ von Elementen von R mit

$$A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn} \tag{1.22}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{kn}) \le \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.23}$$

Nach (1.20) und (1.22) haben wir

$$A \subset \bigcup_{k,n=1}^{\infty} A_{kn}.$$

Da alle A_{kn} in R liegen, so erhalten wir nach Definition von $\mu^*(A)$ und (1.23), dass

$$\mu^*(A) \le \sum_{k,n=1}^{\infty} \mu(A_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{kn}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir daraus (1.21). ∎

Lemma 1.9 *Für alle Mengen $A, B \subset M$ gilt*

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B). \tag{1.24}$$

Beweis. Da

$$A \subset B \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A \vartriangle B),$$

so folgt (1.24) aus der Monotonie und Subadditivität von μ^* (Lemmas 1.7 und 1.8):

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B \cup (A \vartriangle B)) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

■

1.7 Erweiterung von endlichem Maß

Definition. Ein Maß μ auf ein Mengensystem S heißt *endlich* wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in S$.

Sei R eine Algebra und μ ein endliches Maß auf R. Die Endlichkeit vom μ ist n diesem Fall äquivalent zur Bedingung $\mu(M) < \infty$, da $M \in R$.

Beispiel. Sei M ein beschränktes Intervall. Sei S der Halbring von allen Teilintervallen von M. Dann $R = \rho(S)$ ist eine Algebra da $M \in R$, und die Länge ℓ mit dem Definitionsbereich R ist ein endliches Maß.

Beispiel. Ein Maß μ auf einer Algebra R heißt ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* wenn $\mu(M) = 1$. Offensichtlich ist μ in diesem Fall ein endliches Maß.

Hier beschreiben wir ein Verfahren für Erweiterung eines endlichen Maßes μ von einer Algebra auf eine σ-Algebra. Wir benutzen das äußeres Maß μ^*, das in (1.18) definiert wurde.

Definition. Eine Menge $A \subset M$ heißt *messbar* (bezüglich R und μ) wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $B \in R$ mit

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon. \tag{1.25}$$

D.h., die Menge A ist messbar genau dann, wenn A mit den Mengen aus R beliebig gut approximiert werden kann (im Sinn von (1.25)).

Hauptsatz 1.10 (Erweiterungssatz von Carathéodory I) *Sei R eine Algebra und μ ein endliches Maß auf R. Sei $\mathcal{T}$ das Mengensystem von allen messbaren Teilmengen von M. Es gilt folgendes.*

(a) *$\mathcal{T}$ ist eine σ-Algebra, die R umfasst.*

(b) *Die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{T}$ ist ein Maß, das eine Erweiterung von μ ist (d.h. $\mu^*|_{\mathcal{T}}$ ist ein Maß und $\mu^*|_R = \mu$)*

(c) *Seien Σ eine σ-Algebra mit $R \subset \Sigma \subset \mathcal{T}$ und ν ein Maß auf Σ, das μ erweitert. Dann gilt $\nu = \mu^*$ auf Σ. (d.h. $\nu|_R = \mu \Rightarrow \nu = \mu^*|_\Sigma$).*

Somit lässt sich das Mass μ auf σ-Algebra $\mathcal{T}$ erweitern, und diese Erweiterung ist eindeutig bestimmt, und zwar nicht nur auf $\mathcal{T}$ sondern auch auf jeder σ-Algebra $\Sigma \subset \mathcal{T}$.

Definition. Für jedes Mengensystem S in M bezeichnen wir mit $\sigma(S)$ den Durchschnitt von allen σ-Ringen, die S umfassen. Das Mengensystem S heißt der *Erzeuger* von $\sigma(S)$, und $\sigma(S)$ heißt der von S erzeugte σ-Ring.

Offensichtlich ist $\sigma(S)$ der kleinster σ-Ring, der S umfasst. Ist S eine Algebra, so ist $\sigma(S)$ eine σ-Algebra.

Definition. Die σ-Algebra $\mathcal{T}$ aus dem Satz 1.10 wird mit $\overline{\sigma}(R,\mu)$ (oder $\overline{\sigma}(R)$) bezeichnet.

Es gilt nach Definition, dass

$$R \subset \sigma(R) \subset \overline{\sigma}(R).$$

Es folgt nach dem Satz 1.10, dass μ sich auf $\sigma(R)$ eindeutig erweitern lässt. Die Erweiterung von μ auf $\sigma(R)$ oder $\overline{\sigma}(R)$ wird häufig auch mit μ bezeichnet.

Beispiel. Sei M ein beschränktes Intervall. Bezeichnen wir mit S das Mengensystem von allen Teilintervallen von M, und setzen $R = \rho(S)$, d.h. R besteht aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Teilintervallen von M (cf. Satz 1.4). Dann ist R eine Algebra, und die Länge ℓ ist ein endliches Maß auf R. Nach dem Satz 1.10 lässt ℓ sich zum Maß auf $\overline{\sigma}(R)$ erweitern. Dieses Maß heißt das *Lebesgue-Maß* auf M und wird mit λ bezeichnet. Die σ-Algebra $\overline{\sigma}(R)$ heißt die *Lebesgue-σ-Algebra* auf M, und die Elemente davon heißen *Lebesgue-messbare Mengen*. Die σ-Algebra $\sigma(R)$ (d.h. die kleinste σ-Algebra die alle Teilintervalle von M umfasst) heißt die *Borel-σ-Algebra* auf M, und die Elemente davon heißen *Borel-messbare Mengen* oder einfach Borel-Mengen.

Versuchen wir die Borel-σ-Algebra $\sigma(R)$ zu beschreiben. Man kann vermuten, dass $\sigma(R)$ aus den abzählbaren Vereinigungen von Intervallen besteht, aber das ist nicht der Fall wie man aus dem folgenden Beispiel sieht. Betrachten wir die *Cantor-Menge*

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

wobei $\{C_n\}$ eine monoton fallende Folge von Teilmengen von $[0,1]$ ist, die induktiv wie folgt definiert werden:

1. $C_1 = [0,1]$

2. C_2 erhält man von C_1 indem man aus C_1 das offene mittlere Drittel entfernt, d.h.

$$C_2 = [0,1] \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \sqcup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right];$$

3. C_3 erhält man von C_2 indem man aus jedem Intervall von C_2 das offene mittlere Drittel entfernt, d.h.

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 \setminus \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \setminus \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \\ &= \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \sqcup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}\right] \sqcup \left[\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}\right] \sqcup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

usw.

Offensichtlich liegt C in $\sigma(R)$ da alle C_n in R liegen. Man kann auch die folgenden Eigenschaften von C beweisen (siehe Aufgaben 20, 21).

(i) C fasst kein offenes Intervall um (außer $\emptyset$).

(ii) C ist überabzählbar.

Daraus folgt, dass die Cantor-Menge keine Vereinigung von Intervallen ist.

Es gibt keine einfache explizite Beschreibung von $\sigma(R)$. In meisten Anwendungen braucht man allerdings keine explizite Beschreibung von $\sigma(R)$ – es reicht nur zu wissen, dass $\sigma(R)$ reichend groß ist: $\sigma(R)$ fasst alle Intervalle um und ist abgeschlossen bezüglich der abzählbaren Vereinigungen und Schnitte.

Es gibt allerdings ein induktives Verfahren für Erstellen $\sigma(R)$ aus R. Bezeichnen wir mit R_σ das Mengensystem von allen abzählbaren Vereinigungen von Elementen von R, so dass $R \subset R_\sigma \subset \sigma(R)$. Bezeichnen mit $R_{\sigma\delta}$ das Mengensystem von allen abzählbaren Durchschnitten von Elementen von R_σ, so dass

$$R \subset R_\sigma \subset R_{\sigma\delta} \subset \sigma(R).$$

Dann definiert man analog $R_{\sigma\delta\sigma}$, $R_{\sigma\delta\sigma\delta}$, usw. Damit erhalten wir eine monoton steigende Folge von Mengensystemen, die alle Teilmengen von $\sigma(R)$ sind. Man könnte hoffen, dass die Vereinigung von allen $R_\sigma, R_{\sigma\delta}, R_{\sigma\delta\sigma}, ...$ gleich $\sigma(R)$ ist, aber das ist auch nicht der Fall. Um ganzes $\sigma(R)$ zu erhalten, muss man dieses Verfahren *überabzählbar* oft benutzen und zwar mit Hilfe von transfiniter Induktion. Das ist allerdings außerhalb des Rahmens von diesem Vorlesungskurs.

Beweis von Satz 1.10. Wir betrachten ein endliches Maß μ auf einer σ-Algebra R und das entsprechende äußere Maß μ^*. Die Gleichheit $\mu^*|_R = \mu$ wurde in Lemma 1.7 bewiesen. Die anderen Aussagen werden in einer Reihe von vier Behauptungen bewiesen. Wie früher, $\mathcal{T}$ ist das Mengensystem von allen messbaren Teilmengen von M, d.h.

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \in R \text{ mit } \mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Behauptung 1. *$\mathcal{T}$ ist eine Algebra, die R umfasst.*

Jedes $A \in R$ ist messbar da

$$\mu^*(A \vartriangle A) = \mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0,$$

wobei $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset)$ nach $\emptyset \in R$ gilt. Somit gilt die Inklusion $R \subset \mathcal{T}$. Insbesondere $\emptyset$ und M liegen in $\mathcal{T}$. Eine Folgerung davon ist, dass $\mu^*(A) < \infty$ für alle $A \subset M$, da

$$\mu^*(A) \le \mu^*(M) = \mu(M) < \infty.$$

Jetzt beweisen wir, dass $\mathcal{T}$ ein Ring ist, d.h. für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ gilt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{T}$ und $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{T}$. Nach der Definition der Messbarkeit für jedes $\varepsilon > 0$ existieren die Mengen $B_1, B_2 \in R$ mit

$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon \ \text{ und } \ \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{1.26}$$

Bezeichnen wir

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{und} \quad B = B_1 \cup B_2.$$

Dann $B \in R$ und es gilt nach Lemma 1.2

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2).$$

Da μ^* monoton und subadditiv ist (Lemmas 1.7 und 1.8), so erhalten wir

$$\mu^*(A \vartriangle B) \leq \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon, \tag{1.27}$$

woraus die Messbarkeit von $A = A_1 \cup A_2$ folgt.

Genauso beweist man die Messbarkeit von $A_1 \setminus A_2$.

Behauptung 2. *μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{T}$ d.h. $\mu^*|_{\mathcal{T}}$ ist ein Maß.*

In den Argumenten unterhalb benutzen wir häufig Lemma 1.9: für alle $A, B \subset M$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B) \quad \text{und} \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B), \tag{1.28}$$

woraus folgt, dass

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \vartriangle B).$$

Da $\mathcal{T}$ eine Algebra ist und μ^* σ-subadditiv nach Lemma 1.8 ist, so reicht es nach Lemma 1.5 zu beweisen, dass $\mu^*|_{\mathcal{T}}$ endlich additiv ist, d.h. für alle disjunkten Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ und für

$$A = A_1 \sqcup A_2$$

gilt

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Da μ^* subadditiv ist, es gilt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

und es bleibt zu beweisen, dass

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{1.29}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir die Mengen $B_1, B_2 \in R$ mit (1.26) und setzen

$$B := B_1 \cup B_2 \in R.$$

Da nach (1.27)

$$\mu^*(A \vartriangle B) < 2\varepsilon,$$

so erhalten wir nach (1.28)

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B) - \mu^*(A \vartriangle B) > \mu^*(B) - 2\varepsilon = \mu(B) - 2\varepsilon. \tag{1.30}$$

Andererseits, nach (1.26) gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) &\leq (\mu^*(B_1) + \mu^*(A_1 \vartriangle B_1)) + (\mu^*(B_2) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2)) \\ &\leq (\mu^*(B_1) + \varepsilon) + (\mu^*(B_2) + \varepsilon) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Jetzt vergleichen wir $\mu(B)$ und $\mu(B_1) + \mu(B_2)$. Da μ auf R additiv ist, so haben wir

$$\mu(B) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2). \tag{1.32}$$

(Aufgabe 3). Nach Lemma 1.2 und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ erhalten wir

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_2) \vartriangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2),$$

und mit Hilfe von Subadditivität von μ^* und (1.27)

$$\mu(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \le \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{1.33}$$

Es folgt aus (1.32) und (1.33), dass

$$\mu(B) \ge \mu(B_1) + \mu(B_2) - 2\varepsilon,$$

und aus (1.31), dass

$$\mu(B) \ge \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Einsetzen in (1.30) ergibt

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir (1.29).

Behauptung 3. *$\mathcal{T}$ ist σ-Algebra.*

Sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von messbaren Mengen. Wir müssen beweisen, dass die Menge

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

auch messbar ist. Setzen wir

$$\widetilde{A}_1 = A_1 \quad \text{und} \quad \widetilde{A}_n := A_n \setminus A_{n-1} \setminus ... \setminus A_1 \ \text{ für } n \ge 2,$$

und bemerken, dass

1. $\widetilde{A}_n$ ist messbar, da $\mathcal{T}$ eine Algebra ist;
2. die Folge $\left\{\widetilde{A}_n\right\}$ ist disjunkt und es gilt $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n$.

Wir benennen $\widetilde{A}_n$ in A_n um, und somit können voraussetzen, dass die Folge $\{A_n\}$ disjunkt ist. Wir müssen beweisen, dass $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ messbar ist, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in R$ mit

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon. \tag{1.34}$$

Für ein $N \in \mathbb{N}$ (das später abhängig von ε gewählt werden wird) betrachten wir die Mengen

$$A' = \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n \ \text{ und } \ A'' = \bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} A_n. \tag{1.35}$$

Da $\mathcal{T}$ eine Algebra ist, so gilt $A' \in \mathcal{T}$. Somit existiert ein $B \in R$ mit

$$\mu^*(A' \vartriangle B) < \varepsilon/2.$$

Wir werden zeigen, dass auch (1.34) mit diesem B gilt, vorausgesetzt, dass N reichend groß ist.

Um N zu wählen, bemerken wir zunächst, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$A \supset \bigsqcup_{n=1}^{m} A_n$$

woraus folgt
$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu^*(A_n),$$
da μ^* ein Maß auf $\mathcal{T}$ ist. Für $m \to \infty$ erhalten wir
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A) < \infty.$$
Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ konvergent. Es folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \varepsilon/2.$$
Dieses N benutzen wir in Definition (1.35) von A' und A''. Nach σ-Subadditivität von μ^* erhalten wir daraus, dass
$$\mu^*(A'') \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \varepsilon/2.$$
Anwendung von Inklusion (1.5) aus Lemma 1.2 für die Mengen $A', A'', B, \emptyset$ ergibt
$$A \vartriangle B = (A' \cup A'') \vartriangle (B \cup \emptyset) \subset (A' \vartriangle B) \cup (A'' \vartriangle \emptyset) = (A' \vartriangle B) \cup A'',$$
woraus folgt
$$\mu^*(A \vartriangle B) \leq \mu^*(A' \vartriangle B) + \mu^*(A'') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
was zu beweisen war.

22.10.21 Vorlesung 4

Behauptung 4. Eindeutigkeit. *Sei Σ eine σ-Algebra mit $R \subset \Sigma \subset \mathcal{T}$. Sei ν ein Maß auf Σ mit $\nu|_R = \mu$. Dann gilt $\nu = \mu^*|_\Sigma$.*

Wir müssen beweisen, dass $\nu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in \Sigma$. Nach Definition von μ^* haben wir
$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in R \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$
Nach der σ-Subadditivität von ν erhalten wir für jede solche Folge $\{A_n\}$, dass
$$\nu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$
Anwenden von inf über alle Folgen $\{A_n\}$ ergibt
$$\nu(A) \leq \mu^*(A). \tag{1.36}$$
Jetzt beweisen wir, dass
$$\mu^*(A) \leq \nu(A). \tag{1.37}$$

Da $A \in \mathcal{T}$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $B \in R$ mit

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon. \tag{1.38}$$

Nach der Voraussetzung $\nu|_R = \mu$ und nach Lemma 1.7 gilt

$$\nu(B) = \mu(B) = \mu^*(B).$$

Nach (1.28) und (1.38) gilt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B) \leq \nu(B) + \varepsilon. \tag{1.39}$$

Da ν auch subadditiv ist, $A, B \in \Sigma$ und

$$B \subset A \cup (A \vartriangle B)$$

(wie im Beweis von Lemma 1.9), so erhalten wir

$$\nu(B) \leq \nu(A) + \nu(A \vartriangle B) \leq \nu(A) + \mu^*(A \vartriangle B) \leq \nu(A) + \varepsilon, \tag{1.40}$$

wo wir auch (1.36) und (1.38) benutzt haben. Es folgt aus (1.39) und (1.40) dass

$$\mu^*(A) \leq \nu(A) + 2\varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (1.37), was zu beweisen war. ■

1.8 Erweiterung von σ-endlichem Maß

Hier verallgemeinern wir den Satz 1.10 auf bestimmten unendlichen Maßen.

Definition. Ein Maß $\mu : S \to [0, \infty]$ auf einem Mengensystem S heißt σ-*endlich* wenn es eine Folge $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Elementen von S gibt mit

$$\mu(B_k) < \infty \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \tag{1.41}$$

d.h. wenn M eine abzählbare Vereinigung von Elementen von S mit endlichen Maßen ist.

Ein endliches Maß μ auf einer Algebra ist auch σ-endlich da in diesem Fall $\mu(M) < \infty$.

Beispiel. Die Länge ℓ auf das Mengensystem S von allen Intervallen in $\mathbb{R}$ ist σ-endlich, da die obige Definition mit $B_k = [-k, k]$ erfüllt ist (da $\ell(B_k) < \infty$).

Sei jetzt R ein Ring auf M und $\mu : R \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Maß. Wir besprechen ein Verfahren von Erweiterung von μ auf einen σ-Ring.

Sei $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Elementen von R mit (1.41) mit die nach Definition von σ-Endlichkeit von μ existiert. Ersetzen wir die Mengen B_k durch die *disjunkten* Mengen

$$\widetilde{B}_1 = B_1, \quad \widetilde{B}_2 = B_2 \setminus B_1, \ \ldots, \ \widetilde{B}_k = B_k \setminus B_{k-1} \setminus B_{k-2} \setminus \ldots \setminus B_1, \ \ldots$$

die auch in R liegen und auch die Eigenschaften (1.41) erfüllen, d.h.

$$\mu(\widetilde{B}_k) < \infty \quad \text{und} \quad M = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k.$$

Somit können wir $\widetilde{B}_k$ in B_k umbenennen und ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass alle B_k disjunkt sind, d.h.

$$M = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k. \tag{1.42}$$

Zum Beispiel, $\mathbb{R}$ ist eine disjunkte Vereinigung von den beschränkten Intervallen $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Für jedes $B \in R$ definieren wir das Mengensystem R_B in B mit

$$R_B = R \cap \mathcal{P}(B) = \{A \in R : A \subset B\}.$$

Das Mengensystem R_B heißt die Restriktion von R auf B (wobei B als eine neue Grundmenge betrachtet wird). Offensichtlich ist R_B ein Ring als Durchschnitt zweier Ringen R und $\mathcal{P}(B)$; darüber hinaus ist R_B eine Algebra, da $B \in R_B$.

Gilt $\mu(B) < \infty$, so ist $\mu_B := \mu|_{R_B}$ ein endliches Maß auf der Algebra R_B. Nach den Satz 1.10 beschließen wir folgendes: das Maß μ_B lässt sich eindeutig auf ein endliches Maß ν_B erweitern, und der Definitionsbereich von ν_B ist die σ-Algebra

$$\mathcal{T}_B := \overline{\sigma}(R_B, \mu_B)$$

von allen messbaren Teilmengen von B. Wir werden die Maße ν_B benutzen, um eine Erweiterung von dem Maß μ zu erstellen.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}$ und B ist ein beschränktes Intervall. Die Länge ℓ auf B lässt sich auf das Lebesgue-Maß λ_B erweitern, das auf der σ-Algebra $\mathcal{T}_B$ von messbaren Teilmengen von B definiert ist. Unsere Aufgabe ist jetzt mit Hilfe von λ_B ein Maß λ auf $\mathbb{R}$ zu erstellen.

Definition. Eine Menge $A \subset M$ heißt *messbar* (bezüglich μ und R) wenn für alle $B \in R$ mit $\mu(B) < \infty$ gilt

$$A \cap B \in \mathcal{T}_B. \tag{1.43}$$

Lemma 1.11 *(a) Sei A eine Teilmenge von $B_1 \cap B_2$, wobei $B_i \in R$ und $\mu(B_i) < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\mu^*_{B_1}(A) = \mu^*_{B_2}(A). \tag{1.44}$$

Folglich gilt die Äquivalenz

$$A \in \mathcal{T}_{B_1} \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}_{B_2} \tag{1.45}$$

(b) Angenommen sei

$$M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_k, \tag{1.46}$$

wobei $B_k \in R$ und $\mu(B_k) < \infty$. Dann eine Teilmenge $A \subset M$ ist messbar genau dann, wenn

$$A \cap B_k \in \mathcal{T}_{B_k} \quad \textit{für alle } k.$$

Beweis. (a) Nach Definition von $\mu^*_{B_1}$ gilt es für jedes $A \subset B_1 \cap B_2$,

$$\mu^*_{B_1}(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in R_{B_1}, \text{ and } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}, \tag{1.47}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\mu_{B_1}(A_n) = \mu(A_n)$. Für eine Folge $\{A_n\}$ wie in (1.47) setzen wir

$$A'_n = A_n \cap B_2.$$

Dann gilt $A'_n \in R_{B_2}$ (da $A_n \cap B_2 \in R$ und $A_n \cap B_2 \subset B_2$) and

$$A \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

Nach Definition von $\mu^*_{B_2}(A)$ gilt

$$\mu^*_{B_2}(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Vergleich mit (1.47) zeigt, dass

$$\mu^*_{B_2}(A) \le \mu^*_{B_1}(A).$$

Analog gilt die umgekehrte Ungleichung, woraus (1.44) folgt.

Beweisen wir jetzt (1.45). Sei $A \in \mathcal{T}_{B_1}$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $C \in R_{B_1}$ mit

$$\mu^*_{B_1}(A \vartriangle C) < \varepsilon.$$

Setzen wir

$$C' = C \cap B_2$$

so dass $C' \in R_{B_2}$, und zeigen, dass

$$\mu^*_{B_2}(A \vartriangle C') < \varepsilon,$$

woraus $A \in \mathcal{T}_{B_2}$ folgen wird. Wir haben

$$A \cap C' = A \cap (C \cap B_2) = (A \cap B_2) \cap C = A \cap C,$$

und

$$A \vartriangle C' = (A \cup C') \setminus (A \cap C') \subset (A \cup C) \setminus (A \cap C) = A \vartriangle C$$

woraus folgt

$$\mu^*_{B_2}(A \vartriangle C') = \mu^*_{B_1}(A \vartriangle C') \le \mu^*_{B_1}(A \vartriangle C) < \varepsilon.$$

was zu beweisen war.

(b) We müssen beweisen, dass

$$A \cap B_k \in \mathcal{T}_{B_k} \text{ für alle } k \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{T}_B \text{ für alle } B \in R \text{ mit } \mu(B) < \infty.$$

Die Implikation "$\Leftarrow$" ist trivial, so wir beweisen die Implikation "$\Rightarrow$". Für beliebige Teilmenge A von M gilt

$$A \cap B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B) \cap B_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k) \cap (B \cap B_k). \tag{1.48}$$

Nach Voraussetzung gilt $A \cap B_k \in \mathcal{T}_{B_k}$ für alle k. Da $B, B_k \in R$, so gilt $B \cap B_k \in R_{B_k}$ und somit $B \cap B_k \in \mathcal{T}_{B_k}$. Es folgt, dass

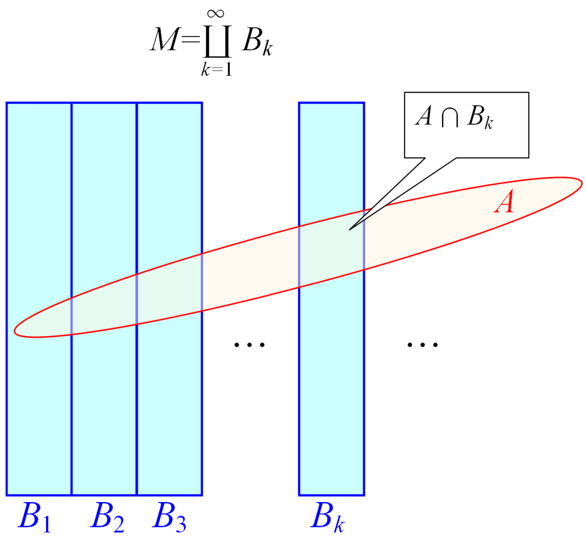
$$(A \cap B_k) \cap (B \cap B_k) \in \mathcal{T}_{B_k}.$$

Da $A \cap B \cap B_k$ eine Teilmenge von $B \cap B_k$ ist und in $\mathcal{T}_{B_k}$ liegt, so erhalten wir nach (a), dass sie auch $\mathcal{T}_B$ liegt. Da $\mathcal{T}_B$ eine σ-Algebra ist, so folgt es aus (1.48) dass $A \cap B \in \mathcal{T}_B$. ■

Bemerkung. In Abschnitt 1.7 haben wir eine Definition von messbaren Mengen im Fall von einem endlichen Maß μ auf einer Algebra R gegeben. In diesem Fall stimmt die Definition von dem Abschnitt 1.7 mit der neuen Definition (1.43) von Messbarkeit überein. In der Tat, wenn μ auf einer Algebra R definiert ist und endlich ist, so wählen wir in der Darstellung (1.46) $B_1 = M$ und $B_k = \emptyset$ für $k \geq 2$. Dann bedeutet die Aussage von Lemma 1.11(b) dass $A \subset M$ messbar im neuen Sinn genau dann ist wenn $A \in \mathcal{T}_M$, d.h. wenn A messbar im Sinn von dem Abschnitt 1.7 ist.

Definition. Fixieren wie eine Folge $\{B_k\}$ wie in Lemma 1.11(b) . For jede messbare Menge $A \subset M$ setzen wir

$$\nu(A) := \sum_k \nu_{B_k}(A \cap B_k) . \tag{1.49}$$



Hauptsatz 1.12 (Erweiterungssatz von Carathéodory II) *Sei μ ein σ-endliches Maß auf einem Ring R. Bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$ das Mengensystem von allen (bezüglich R und μ) messbaren Teilmengen von M. Dann folgendes gilt.*

(a) *$\mathcal{T}$ ist eine σ-Algebra, die R umfasst.*

(b) *Die von (1.49) definierte Funktion ν ist ein Maß auf $\mathcal{T}$, das eine Erweiterung von μ ist (d.h. $\nu|_R = \mu$).*

(c) *Sei Σ eine σ-Algebra mit $R \subset \Sigma \subset \mathcal{T}$ und τ ein Maß auf Σ, das eine Erweiterung von μ ist. Dann gilt $\tau = \nu$ auf Σ.*

Somit existiert genau eine Erweiterung von μ auf Σ. Insbesondere ist die Definition (1.49) von ν unabhängig von der Wahl der Zerlegung $\{B_k\}$. Bemerken wir auch, dass ν offensichtlich σ-endlich ist, als eine Erweiterung von μ.

Die σ-Algebra $\mathcal{T}$ wird mit $\overline{\sigma}(R, \mu)$ oder einfach mit $\overline{\sigma}(R)$ bezeichnet. Offensichtlich gelten die Inklusionen

$$R \subset \sigma(R) \subset \overline{\sigma}(R).$$

Es folgt aus dem Satz 1.12, dass es genau eine Erweiterung von μ auf $\sigma(R)$ gibt.

Beweis. (a) Nach Definition haben wir

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_B \text{ für alle } B \in R \text{ mit } \mu(B) < \infty.$$

Für jedes $A \in R$ ist diese Bedingung erfüllt da $A \cap B \in R$ und somit $A \cap B \in R_B$. Folglich gilt $R \subset \mathcal{T}$.

Sei $\{A_n\}_{n=1}^N$ eine endliche oder abzählbare Folge von messbaren Mengen. Beweisen wir, dass auch

$$A = \bigcup_{n=1}^N A_n$$

messbar ist. Wir haben

$$A \cap B = \bigcup_{n=1}^N (A_n \cap B) \in \mathcal{T}_B$$

da $\mathcal{T}_B$ eine σ-Algebra ist und $A_n \cap B \in \mathcal{T}_B$ nach der Messbarkeit von A_n. Somit gilt auch $A \in \mathcal{T}$.

Für messbare Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ ist $A = A_1 \setminus A_2$ auch messbar, da

$$A \cap B = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) \in \mathcal{T}_B.$$

Auch M ist messbar da

$$M \cap B = B \in \mathcal{T}_B.$$

Somit ist $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra.

27.10.21 Vorlesung 5

(b) Zeigen wir zunächst, dass $\nu|_R = \mu$, d.h. $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $A \in R$. Sei $\{B_k\}$ eine Folge aus (1.42). Für jedes $A \in R$ gelten

$$A \cap B_k \in R \quad \text{und } A \cap B_k \subset B_k,$$

woraus folgt

$$A \cap B_k \in R_{B_k}.$$

Da

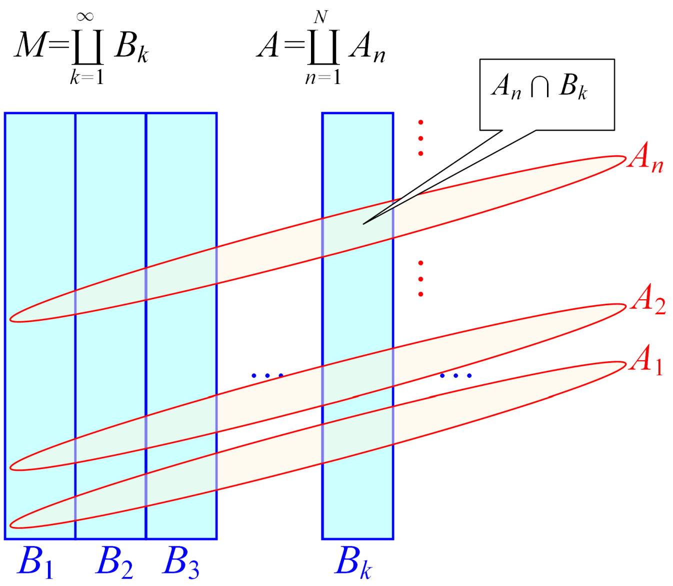
$$A = \bigsqcup_k (A \cap B_k),$$

so erhalten wir

$$\nu(A) = \sum_k \nu_{B_k}(A \cap B_k) = \sum_k \mu_{B_k}(A \cap B_k) = \sum_k \mu(A \cap B_k) = \mu(A),$$

wobei wir die Definitionen von ν, ν_{B_k} und μ_{B_k} benutzt haben.

Beweisen wir jetzt, dass ν ein Maß ist. Die Bedingung $\nu(\emptyset) = 0$ folgt offensichtlich aus (1.49). Zeigen wir, dass ν σ-additiv ist. Sei $A = \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{T}$ und $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.



Wir müssen beweisen, dass

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n). \tag{1.50}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_k \nu_{B_k}(A \cap B_k) \\
&= \sum_k \nu_{B_k}\left(\bigsqcup_n (A_n \cap B_k)\right) \\
&= \sum_k \sum_n \nu_{B_k}(A_n \cap B_k) \\
&= \sum_n \sum_k \nu_{B_k}(A_n \cap B_k) \\
&= \sum_n \nu(A_n)
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(c) Sei τ noch ein Maß auf einer σ-Algebra Σ mit

$$R \subset \Sigma \subset \mathcal{T},$$

und nehmen wir an, dass $\tau = \mu$ auf R. Beweisen wir, dass $\tau = \nu$ auf Σ. Setzen wir

$$\Sigma_{B_k} := \Sigma \cap \mathcal{P}(B_k) = \{A \in \Sigma : A \subset B_k\}$$

und bemerken, dass Σ_{B_k} eine σ-Algebra auf der Grundmenge B_k ist und

$$R_{B_k} \subset \Sigma_{B_k} \subset \mathcal{T}_{B_k}.$$

Da $\tau = \mu = \mu_{B_k}$ auf R_{B_k}, so erhalten wir nach dem Satz 1.10, dass $\tau = \nu_{B_k}$ auf Σ_{B_k}.

Für jedes $A \in \Sigma$ haben wir $A \cap B_k \in \Sigma_{B_k}$ und

$$A = \bigsqcup_k (A \cap B_k)$$

woraus folgt

$$\tau(A) = \sum_k \tau(A \cap B_k) = \sum_k \nu_{B_k}(A \cap B_k) = \sum_k \nu(A),$$

was zu beweisen war. ∎

Betrachten wir wieder den Halbring S von allen beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$ und die Länge ℓ auf S. Nach dem Satz 1.6 ist ℓ ein Maß auf dem Ring $R = \rho(S)$. Dieses Maß ist σ-endlich, da

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in Z} [k, k+1) \tag{1.51}$$

und $\ell([k, k+1)) < \infty$. Nach dem Satz 1.12 gibt es eine eindeutige Erweiterung von ℓ auf ein Maß λ auf der σ-Algebra von messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition. Das Maß λ heißt das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}$. Die σ-Algebra von messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt die *Lebesgue-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}$ und wird mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen (*Lebesgue-*)*messbare Mengen*.

Definition. Die von S erzeugte σ-Algebra $\sigma(S)$ heißt die *Borel-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}$ und wird auch mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen *Borel-messbare Mengen* oder einfach Borel-Mengen.

Somit haben wir Inklusionen

$$S \subset R \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{M}.$$

Beispiel. Die Cantor Menge $C \subset [0, 1]$ ist eine Borel-Menge und somit auch Lebesgue-messbar. Da $\ell^*(C) = 0$ (siehe Aufgabe 20), es folgt, dass $\lambda(C) = 0$.

1.9 Reguläres Maß in einem metrischen Raum

Sei M ein metrischer Raum.

Definition. Sei S ein Halbring in M. Ein endlich additives Maß $\mu : S \to [0, \infty)$ heißt *regulär* wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: für jedes $A \in S$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \in S$ und eine offene Menge $U \in S$ so dass

$$K \subset A \subset U \text{ und } \mu(U) \le \mu(K) + \varepsilon. \tag{1.52}$$

Beispiel. Sei S ein Halbring von allen beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$. Dann ist die Länge ℓ auf S regulär: für jedes beschränktes Intervall I und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es offensichtlich ein abgeschlossenes Intervall $K \subset I$ und offenes Intervall $U \supset I$ mit

$$\ell(U) \leq \ell(K) + \varepsilon.$$

Satz 1.13 *Ist $\mu : S \to [0, \infty)$ ein endlich additives reguläres Maß auf einem Halbring S, so ist μ auch σ-additiv.*

Beweis. Erweitern wir zuerst das Maß μ auf den Ring $R = \rho(S)$. Nach dem Satz 1.4, μ ist endlich additiv auf R. Zeigen wir, dass μ auch regulär auf R ist. Jedes $A \in R$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ von Elementen A_k von S. Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir für jedes A_k eine kompakte Menge $K_k \in S$ und eine offene Menge $U_k \in S$ mit

$$K_k \subset A_k \subset U_k \ \text{ and } \ \mu(U_k) \leq \mu(K_k) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Dann ist die Menge $K := \bigsqcup_k K_k$ kompakt und die Menge $U = \bigcup_k U_k$ – offen, die beiden gehören zu R, und es gelten

$$K \subset A \subset U$$

und

$$\mu(U) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(U_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\mu(K_k) + \frac{\varepsilon}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(K_k) + \varepsilon = \mu(K) + \varepsilon.$$

Somit ist μ regulär und endlich additiv auf dem Ring R.

Nach Lemma 1.5(b), um zu beweisen, dass μ σ-additiv ist, reicht es zu beweisen, dass μ σ-subadditiv ist. Set

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

wobei A und A_k Elemente von R sind. We müssen beweisen, dass

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.53}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \in R$ so dass

$$K \subset A \ \text{ und } \ \mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

Auch für jeden Index k gibt es eine offene Menge $U_k \in R$ so dass

$$A_k \subset U_k \ \text{ und } \ \mu(U_k) \leq \mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Die Familie $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine offene Überdeckung von K. Nach der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_k\}_{k=1}^{n}$ von K. Da μ endlich subadditiv ist (Lemma 1.5(a)), so erhalten wir

$$\mu(K) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(U_k),$$

woraus folgt

$$\mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(U_k) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir (1.53), was zu beweisen war. ■

Beispiel. Sei S wieder ein Halbring von allen beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$. Die Länge ℓ auf S ist endlich additiv nach dem Lemma 1.1. Da ℓ auch regulär ist, so erhalten wir nach dem Satz 1.13 dass ℓ auch σ-additiv ist. Diese Aussage wurde auch im Satz 1.6 bewiesen. Der Beweis des Satzes 1.6 verwendete auch die Idee von Approximation von beliebigen Intervallen mit kompakten und offenen Intervallen.

1.10 Produktmaß

Wir benutzen die Theorie von Maßerweiterung um das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$ zu definieren. Dafür brauchen wir auch den Begriff von *Produktmaß*.

Seien M_1 und M_2 zwei beliebige Grundmengen und S_1, S_2 Mengensysteme in M_1 bzw M_2. Betrachten wir das Produkt zweier Mengen M_1 und M_2:

$$M = M_1 \times M_2 := \{(x, y) : x \in M_1, y \in M_2\}$$

und das Produkt zweier Mengensysteme S_1 und S_2 wie folgt:

$$S = S_1 \times S_2 := \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\},$$

wobei $A \times B$ eine Teilmenge von M ist:

$$A \times B = \{(x, y) \in M : x \in A, y \in B\}.$$

Somit ist S ein Mengensystem in M.

Beispiel. Seien $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ und $S_1 = S_2$ das Mengensystem von allen beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$. Dann $M = \mathbb{R}^2$ und S ist das Mengensystem von allen beschränkten Rechtecken in $\mathbb{R}^2$.

Satz 1.14 *Sind S_1 und S_2 Halbringe, so ist auch $S_1 \times S_2$ ein Halbring.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9. ■

Das Produkt zweier Ringe ist nicht immer ein Ring, z.B. $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist kein Ring.

Definition. Seien S_1 und S_2 zwei Halbringe. Sei μ_i ein endlich additives Maß auf S_i für $i = 1, 2$. Definieren wir das *Produktmaß* $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ auf dem Halbring $S = S_1 \times S_2$ wie folgt: für $A \in S_1$ und $B \in S_2$ setzen wir

$$\mu(A \times B) := \mu_1(A) \mu_2(B).$$

Für unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$ benutzen wir die Konvention: $0 \cdot \infty = 0$.

Satz 1.15 *Unter den oben genannten Bedingungen ist das Produktmaß μ ein endlich additives Maß auf S.*

Beweis. Siehe Aufgabe 28. ■

Es folgt aus den Satz 1.15, dass der Flächeninhalt auf dem Mengensystem von allen Rechtecken in $\mathbb{R}^2$ ein endlich additives Maß ist.

Bemerkung. Es gilt auch folgendes: sind μ_1 und μ_2 σ-additiv so ist auch $\mu_1 \times \mu_2$ σ-additiv, d.h. das Produktmaß zweier Maße ist auch ein Maß. Der Beweis von dieser Aussage in voller Allgemeinheit braucht eine hoch entwickelte Theorie und wird später gegeben.

Seien $S_1, ..., S_n$ Halbringe in bzw den Grundmengen $M_1, ..., M_n$, und sei μ_i ein endlich additives Maß auf S_i für $i = 1, ..., n$. Per Induktion nach n definiert man die Grundmenge

$$M = M_1 \times ... \times M_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in M_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

das Produkt

$$S = S_1 \times ... \times S_n = \{A_1 \times ... \times A_n : A_i \in S_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

das ein Halbring in M ist, und das Produktmaß

$$\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n,$$

so dass

$$\mu (A_1 \times ... \times A_n) = \mu_1 (A_1) ... \mu_n (A_n)$$

für $A_i \in S_i$. Dann ist μ ein endlich additives Maß auf S. Die Multiplikation von Grundmengen, Halbringen und Maßen sind offensichtlich assoziativ.

1.11 Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$

Wie früher seien S der Halbring von allen beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$ und ℓ die Länge auf S. Definieren wir in der Grundmenge

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$$

ein Mengensystem

$$S_n = \underbrace{S \times S \times ... \times S}_{n},$$

und setzen wir

$$\ell_n = \underbrace{\ell \times \ell \times ... \times \ell}_{n}.$$

Nach dem Satz 1.14 ist S_n ein Halbring in $\mathbb{R}^n$. Die Elemente von S_n heißen *n-dimensionale Quaders*. Jeder Quader hat die Form

$$A = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \ , \tag{1.54}$$

wobei I_k beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind, und es gilt

$$\ell_n (A) = \ell (I_1) ....\ell (I_n) .$$

Satz 1.16 *Die Funktion ℓ_n ist σ-additiv und σ-endlich, d.h. ℓ_n ist ein σ-endliches Maß auf S_n.*

Das Maß ℓ_n heißt *n-Volumen* (oder n-dimensionales Volumen) in $\mathbb{R}^n$. Insbesondere der Flächeninhalt ℓ_2 ist ein σ-endliches Maß in $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Nach dem Satz 1.15, ℓ_n ist ein endlich additives Maß auf S_n. Beweisen wir, dass die Funktion ℓ_n auf S_n *regulär* ist, d.h. für jedes $A \in S_n$ und $\varepsilon > 0$ es gibt einen kompakten Quader $K \in S_n$ und einen offenen Quader $U \in S_n$ mit

$$K \subset A \subset U \text{ und } \ell_n(U) \leq \ell_n(K) + \varepsilon. \tag{1.55}$$

Nach dem Satz 1.13 ein endlich additives und reguläres Maß ist immer σ-additiv, woraus folgen wird, dass ℓ_n σ-additiv ist.

Sei A ein Quader A der Form (1.54). Für jedes Intervall I_m, $m = 1, ..., n$, wählen ein abgeschlossenes Intervall K_m und offenes Intervall U_m so dass

$$K_m \subset I_m \subset U_m$$

und

$$\ell(U_m) \leq \ell(K_m) + \delta,$$

wobei $\delta > 0$ gegeben ist. Daraus folgt, dass der Quader

$$K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$$

kompakt ist, der Quader

$$U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$$

offen ist, und

$$\begin{aligned} \ell_n(U) &= \ell(U_1) ....\ell(U_n) \\ &\leq (\ell(K_1) + \delta) .... (\ell(K_n) + \delta) \\ &\leq \ell(K_1) ....\ell(K_n) + O(\delta) \\ &= \ell_n(K) + O(\delta) \end{aligned}$$

für $\delta \to 0$. Für reichend kleines δ erhalten wir (1.55), was zu beweisen war.

Zeigen wir jetzt, dass ℓ_n σ-endlich ist. Dafür wählen wir eine Überdeckung $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ von $\mathbb{R}$ mit beschränkten Intervallen, z.B. wie in (1.51), und bemerken, dass alle Quadern der Form $I_{k_1} \times I_{k_2} \times ... \times I_{k_n}$ eine abzählbare Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ ergeben. Da

$$\ell_n(I_{k_1} \times ... \times I_{k_n}) = \ell(I_{k_1}) ...\ell(I_{k_n}) < \infty,$$

so ist ℓ_n σ-endlich. ■

Nach dem Satz 1.4 lässt sich ℓ_n auf den Ring $R_n = \rho(S_n)$ erweitern. Nach dem Satz 1.12 existiert eine eindeutige Erweiterung von ℓ_n auf ein Maß λ_n auf der σ-Algebra $\mathcal{M}_n$ von allen messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$.

Definition. Das Maß λ_n auf $\mathcal{M}_n$ heißt das *Lebesgue-Maß* in $\mathbb{R}^n$. Die σ-Algebra $\mathcal{M}_n$ heißt die *Lebesgue-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}^n$. Die Elemente von $\mathcal{M}_n$ heißen (*Lebesgue-*)*messbare Mengen*.

Das Maß λ_2 in $\mathbb{R}^2$ heißt auch *Flächeninhalt*, und das Maß λ_3 in $\mathbb{R}^3$ heißt *Volumen*. Auch λ_n wird häufig *n-dimensionales Volumen* genannt.

Definition. Die von S_n erzeugte σ-Algebra $\sigma(S_n)$ heißt die *Borel* σ-Algebra und wird mit $\mathcal{B}_n$ (oder $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) bezeichnet. Die Elementen von $\mathcal{B}_n$ heißen *Borel-Mengen*.

Somit haben wir die Inklusionen

$$S_n \subset R_n \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n.$$

29.10.21 Vorlesung 6

Satz 1.17 *Bezeichnen wir mit Ω_n das Mengensystem von allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und mit C_n das Mengensystem von allen abgeschlossen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\sigma(\Omega_n) = \sigma(C_n) = \mathcal{B}_n,$$

d.h. die Quader, die offenen Mengen und die abgeschlossenen Mengen erzeugen dieselbe σ-Algebra.

Somit erhalten wir die folgenden äquivalenten Definitionen von Borel σ-Algebra:

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\Omega_n) = \sigma(C_n).$$

Beweis. Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente von den offenen Mengen sind, so ist die Identität $\sigma(\Omega_n) = \sigma(C_n)$ offensichtlich. Wir beweisen, dass $\sigma(\Omega_n) = \mathcal{B}_n$, und dafür reicht es zu beweisen, dass

$$\Omega_n \subset \sigma(S_n) \quad \text{und} \quad S_n \subset \sigma(\Omega_n). \tag{1.56}$$

Beweisen wir die erste Inklusion in (1.56). Dafür reicht es zu zeigen, dass jede offene Menge U in $\sigma(S_n)$ liegt. Für jedes $x \in U$ gibt es einen offenen Quader Q_x mit $x \in Q_x \subset U$, woraus folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} Q_x. \tag{1.57}$$

Diese Überdeckung von U ist überabzählbar, aber wir zeigen, dass man eine abzählbare Überdeckung in (1.57) erstellen kann, woraus folgen wird, dass $U \in \sigma(S)$. Dafür wählen wir jeden Quader Q_x so dass alle Koordinaten von allen Ecken von Q_x rational sind (d.h. in der Darstellung $Q_x = I_1 \times ... \times I_n$ haben alle Intervalle I_k die rationalen Grenzen). In der Vereinigung (1.57) können wir nur *unterschiedliche* Quader Q_x benutzen. Da das Mengensystem von allen Quadern mit rationalen Koordinaten abzählbar ist, so erhalten wir eine Darstellung von U als eine abzählbare Vereinigung von Quadern, woraus $U \in \sigma(S_n)$ folgt.

Um die zweite Inklusion in (1.57) zu beweisen, zeigen wir, dass jeder Quader Q in $\sigma(\Omega_n)$ liegt. Dafür bemerken wir zunächst, dass jedes Intervall I sich als ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Intervallen darstellen lässt, z.B. für $a \leq b$

$$[a, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(a - \tfrac{1}{k}, b + \tfrac{1}{k}\right)$$

$$[a,b) \quad = \quad \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(a-\tfrac{1}{k},b\right)$$

usw. Daraus folgt, dass jeder Quader Q ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Quadern ist. Da die offenen Quadern in Ω_n liegen, so erhalten wir $Q \in \sigma(\Omega_n)$. ■

Es folgt aus dem Satz 1.17 dass alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ Borel-Mengen sind und insbesondere Lebesgue-messbar. Für den Quader der Form

$$A = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$$

gilt nach Definition

$$\lambda_n(A) = \ell(I_1)\ldots\ell(I_n).$$

Jede nicht-leere offene Menge U hat positives Maß, d.h. $\lambda_n(U) > 0$, da U einen nicht-trivialen Quader A umfasst und $\lambda_n(A) > 0$.

Betrachten wir einige Beispiele von Bestimmung des Lebesgue-Maßes.

Satz 1.18 *Sei $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion (wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$). Betrachten wir den Untergraph von f:*

$$U_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ und } 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

Dann ist U_f eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\lambda_2(U_f) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.58}$$

Beweis. Da f beschränkt ist, so liegt die ganze Menge U_f in einem beschränkten Rechteck

$$M = [a,b] \times [0,c],$$

wobei $c = \sup_{[a,b]} f$. Sei S der Halbring von allen Rechtecken $A = I_1 \times I_2$ in M, und betrachten in S die Funktion

$$\ell_2(A) = \ell(I_1)\,\ell(I_2),$$

die ein Maß ist (Satz 1.16). Sei $R = \rho(S)$ die von S erzeugte Algebra, die aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Rechtecken besteht (Satz 1.3). Das Maß ℓ_2 lässt sich auf R erweitern (Satz 1.4). Da ℓ_2 auf R endlich ist, so erweitern wir ℓ_2 mit Hilfe von dem Satz 1.10 weiter auf Maß λ_2 das auf der σ-Algebra $\mathcal{M}$ von Lebesgue messbaren Teilmengen von M definiert.

Sei $p = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Setzen wir

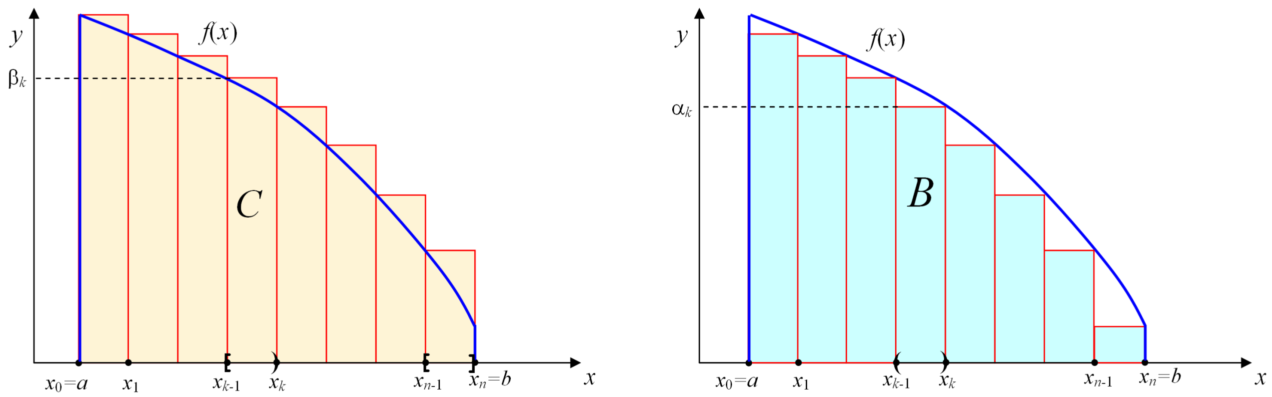
$$\alpha_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{and} \quad \beta_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \tag{1.59}$$

und betrachten die Darboux-Summen

$$S_*(f,p) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - x_{k-1})$$

und

$$S^*(f,p) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k (x_k - x_{k-1}).$$



Die oberen und unteren Darboux-Summen

Nach dem Satz von Darboux, die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar wenn sie Darboux-integrierbar, d.h. wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so das für jede Zerlegung p mit der Feinheit $\varphi(p) < \delta$ gilt

$$S^*(f,p) - S_*(f,p) < \varepsilon. \tag{1.60}$$

Betrachten wir die Menge

$$B = \bigsqcup_{k=1}^{n} ((x_{k-1}, x_k) \times (0, \alpha_k)),$$

Offensichtlich haben wir $B \in R$, $B \subset U_f$ und

$$\lambda_2(B) = \ell_2(B) = \sum_{k=1}^{n} \ell_2((x_{k-1}, x_k) \times (0, \alpha_k)) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \alpha_k = S_*(f,p).$$

Betrachten wir auch die Menge

$$C = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} ([x_{k-1}, x_k) \times [0, \beta_k]) \sqcup ([x_{n-1}, x_n] \times [0, \beta_n]).$$

Offensichtlich haben wir $C \in R$, $C \supset U_f$ und

$$\lambda_2(C) = \ell_2(C) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \beta_k = S^*(f,p).$$

Wie benutzen die Menge B als eine Approximation von U_f aus R. Da

$$B \subset U_f \subset C, \tag{1.61}$$

so gilt

$$U_f \vartriangle B = U_f \setminus B \subset C \setminus B,$$

und somit

$$l_2^*(U_f \vartriangle B) \le l_2^*(C \setminus B) = l_2(C \setminus B) = l_2(C) - \ell_2(B) = S^*(f,p) - S_*(f,p),$$

Da die rechte Seite nach der Wahl von p beliebig klein gemacht werden kann, so folgt es, dass $\ell_2^*(U_f \vartriangle B)$ beliebig klein sein kann. Da $B \in R$, so ist U_f messbar nach Konstruktion von messbaren Mengen im Satz 1.10.

Aus (1.61) folgt es auch, dass

$$\lambda_2(B) \le \lambda_2(U_f) \le \lambda_2(C)$$

d.h.

$$S_*(f,p) \le \lambda_2(U_f) \le S^*(f,p).$$

Für $\varphi(p) \to 0$ erhalten wir

$$\lambda_2(U_f) = \lim_{m(p)\to 0} S^*(f,p) = \lim_{m(p)\to 0} S_*(f,p) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Bemerkung. Ist f stetig, so ist der Untergraph U_f eine abgeschlossene Menge und somit Borel-messbar. In diesem Fall braucht man den ersten Teil des Beweises nicht.

Beispiel. Unter Bedingungen des Satzes 1.18 betrachten wir den Graph der Funktion f:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y = f(x)\right\}.$$

Beweisen wir, dass Γ_f messbar ist und

$$\lambda_2(\Gamma_f) = 0.$$

Dafür betrachten die Menge

$$\overset{o}{U}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ und } 0 \le y < f(x)\right\},$$

so dass

$$\Gamma_f = U_f \setminus \overset{o}{U}_f.$$

Genauso, wie im Beweis des Satzes 1.18 erhält man, dass $\overset{o}{U}_f$messbar ist und

$$\lambda_2(\overset{o}{U}_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es folgt, dass Γ_f messbar ist und

$$\lambda_2(\Gamma_f) = \lambda_2(U_f) - \lambda_2(\overset{o}{U}_f) = 0.$$

Man kann (1.58) benutzen, um die bekannten Formeln für den Flächeninhalt von geometrischen Figuren rigoros zu beweisen, zum Beispiel

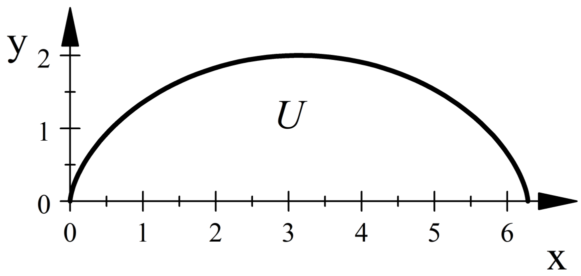
$$\lambda_2(\mathit{Kreisscheibe}) \quad = \quad \pi \cdot \mathit{Radius}^2$$

$$\lambda_2 \left(Dreieck\right) = \frac{1}{2} Seite \cdot Höhe$$

(siehe Aufgaben 32, 34, 35). Bemerken wir, dass die Kreisscheibe und das Dreieck abgeschlossene Mengen sind, woraus folgt, dass sie messbar sind.

Beispiel. Bestimmen wir den Flächeninhalt des Untergraphes U der *Zykloide* die als eine parametrisierte Kurve gegeben ist:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{1.62}$$



Die Zykloide

Diese Gleichungen bestimmen implizit y als eine stetige Funktion $y = f(x)$ von x so dass die Zykloide der Graph dieser Funktion auf $[0, 2\pi]$ ist. Mit Hilfe von (1.58) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_2 (U) &= \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\, d(t - \sin t) \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Bemerkung. In Literatur über Maßtheorie wird auch die folgende (abweichende) Terminologie benutzt. Sei S ein Mengensystem mit $\emptyset \in S$ und $\mu : S \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$.

1. Die Funktion μ heißt *Inhalt* wenn μ endlich additiv ist (laut unserer Terminologie: μ ist endlich additives Maß).

2. μ heißt *Prämaß* wenn μ σ-additiv ist (laut unserer Terminologie: μ ist Maß).

3. μ heißt Maß wenn μ σ-additiv ist und S ein σ-Ring ist (laut unserer Terminologie: μ ist auch Maß auf einem σ-Ring).

1.12 Monotone Operationen

Sei S ein beliebiges Mengensystem in einer Grundmenge M. Wie früher, bezeichnen wir mit $\rho(S)$ den kleinsten Ring, der S umfasst, und mit $\sigma(S)$ – den kleinsten σ-Ring, der S umfasst. Hier besprechen wir wie man $\rho(S)$ und $\sigma(S)$ enthält.

Sei $*$ eine Operation mit Teilmengen von M (z.B. Vereinigung, Schnitt, Komplement, Limes, usw.).

Definition. Das Mengensystem S heißt abgeschlossen bezüglich $*$, wenn die Anwendung von $*$ auf die Elemente von S wieder ein Element von S ergibt.

Definition. Für beliebiges Mengensystem S definieren wir den *Abschluss* S^* bezüglich $*$ wie folgt: S^* ist der Durchschnitt von allen Mengensystemen in M, die S umfassen und abgeschlossen bezüglich $*$ sind.

D.h. S^* ist die kleinste Übermenge von S, die abgeschlossen bezüglich $*$ ist.

Es handelt sich um die folgenden Operationen mit Teilmengen von M.

1. Schnitt "$\cap$" zweier Mengen, d.h. $A, B \mapsto A \cap B$

2. *Monotone Differenz* "$-$". Setzen wir $A - B = A \setminus B$ vorausgesetzt, dass $A \supset B$ (sonst ist $A - B$ nicht definiert).

3. *Monotoner Limes* lim. Sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine *monotone* Folge von Teilmengen von M. Ist diese Folge steigend, d.h. $A_n \subset A_{n+1}$ für alle n, so setzen wir

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ist diese Folge fallend, d.h. $A_n \supset A_{n+1}$ für alle n, so setzen wir

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sonst ist $\lim A_n$ nicht definiert (in Aufgabe 18 definiert man $\lim A_n$ auch für die Folgen, die nicht unbedingt monoton sind, aber hier brauchen wir diese allgemeinere Definition nicht).

Die Operationen "$-$" und lim heißen *monotone Operationen*, da sie nur für monotone Folgen definiert sind.

Nach Definition S^- ist der Abschluss von S bezüglich "$-$", und $S^{\lim}$ ist der Abschluss von S bezüglich lim.

Weiter nehmen wir an, dass $M \in S$. Dann ist $\rho(S)$ eine Algebra und $\sigma(S)$ – eine σ-Algebra. Der nächste Satz ergibt die Darstellungen von $\rho(S)$ und $\sigma(S)$ mit Hilfe von monotonen Operationen.

Hauptsatz 1.19 *(*Satz von Dynkin*) Sei S ein Mengensystem in M mit $M \in S$.*

(a) Ist S abgeschlossen bezüglich $\cap$, so gilt

$$\rho(S) = S^{-}.$$

(b) Ist S eine Algebra, so gilt

$$\sigma(S) = S^{\lim}.$$

Der Beweis ist unterhalb.

Korollar 1.20 *Sei S ein Mengensystem in M mit $M \in S$. Dann gelten die Identitäten:*

$$\rho(S) = \left(S^{\cap}\right)^{-}. \tag{1.63}$$

und

$$\sigma(S) = \left(\left(S^{\cap}\right)^{-}\right)^{\lim}. \tag{1.64}$$

Beweis. Bemerken wir zuerst, dass

$$\rho(S) = \rho\left(S^{\cap}\right).$$

Die Inklusion $\rho(S) \subset \rho\left(S^{\cap}\right)$ folgt aus $S \subset S^{\cap}$, und die umgekehrte Inklusion $\rho(S) \supset \rho\left(S^{\cap}\right)$ gilt, da $\rho(S)$ eine Algebra ist, die $S^{\cap}$ umfasst und somit auch $\rho\left(S^{\cap}\right)$. Nach dem Satz 1.19$(a)$ gilt

$$\rho\left(S^{\cap}\right) = \left(S^{\cap}\right)^{-},$$

woraus (1.63) folgt.

Offensichtlich gilt

$$\sigma(S) = \sigma(\rho(S)).$$

Da $\rho(S)$ eine Algebra ist, so erhalten wir nach dem Satz 1.19(b), dass

$$\sigma(\rho(S)) = \rho(S)^{\lim}.$$

Mit Hilfe von (1.63) erhalten wir

$$\sigma(S) = \sigma(\rho(S)) = \rho(S)^{\lim} = \left(\left(S^{\cap}\right)^{-}\right)^{\lim}.$$

■

Korollar 1.21 *Sei ein Mengensystem S in M mit $M \in S$. Ist S abgeschlossen bezüglich $\cap, -, \lim$, so ist S eine σ-Algebra.*

Beweis. Wir haben nach Voraussetzungen

$$\left(\left(S^{\cap}\right)^{-}\right)^{\lim} = S,$$

was zusammen mit (1.64) ergibt $S = \sigma(S)$, so dass S eine σ-Algebra ist. ■

Die Identität (1.63) ist hoch nicht-trivial. Sie besagt folgendes: jede Teilmenge von M, die aus den Elementen von S mit Hilfe von endlicher Folge von Operationen $\cap, \cup, \setminus$ erstellt werden kann, lässt sich auch aus den Elementen von S wie folgt erstellen: zuerst eine endliche Folge von Operation $\cap$ und danach eine endliche Folge von Operation "$-$".

Beispiel. Betrachten wir, zum Beispiel, das Mengensystem

$$S = \{M, A, B\},$$

wobei A und B zwei Teilmengen von M sind. In diesem Fall haben wir

$$S^{\cap} = \{M, A, B, A \cap B\},$$

und nach (1.63) muss $(S^{\cap})^{-}$ auch $A \cup B \in \rho(S)$ enthalten. Somit lässt die Menge $A \cup B$ sich aus den Teilmengen $M, A, B, A \cap B$ nur mit Hilfe von "$-$" darstellen, aber Satz 1.19 besagt nicht, wie genau erfolgt diese Darstellung. In diesem Fall die Antwort laut wie folgt:

$$A \cup B = M - ((M - A) - (B - (A \cap B)))$$

(alle Differenzen hier sind offensichtlich monoton). In der Tat, es gilt

$$(M - A) - (B - (A \cap B)) = A^c \setminus B = A^c \cap B^c$$

und somit

$$M - ((M - A) - (B - (A \cap B))) = M \setminus (A^c \cap B^c) = (A^c \cap B^c)^c = A \cup B.$$

Die anderen Elemente von $\rho(S)$ lassen sich aus den Elementen von $S^{\cap}$ mit Hilfe von "$-$" darstellen wie folgt:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A - (A \cap B) \\ B \setminus A &= B - (A \cap B) \\ A \vartriangle B &= (A \cup B) - (A \cap B). \end{aligned}$$

03.11.21 Vorlesung 7

Beweis von dem Satz 1.19. (a) Sei S abgeschlossen bezüglich $\cap$ und $M \in S$. Da $\rho(S)$ abgeschlossen bezüglich "$-$" ist und S umfasst, so folgt es, dass

$$\rho(S) \supset S^{-}.$$

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass S^{-} eine Algebra ist. Dann liegt $\rho(S)$ in S^{-} da $\rho(S)$ die kleinste Algebra ist, die S umfasst.

Jetzt beweisen wir, dass S^{-} eine Algebra ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass S^{-} die Mengen M und $\emptyset$ enthält und abgeschlossen bezüglich $\cap$ und der Operation "c" von Komplement.

Offensichtlich haben wir $M \in S^{-}$ da $M \in S$, und $\emptyset = M - M \in S^{-}$.

Das Mengensystem S^{-} abgeschlossen bezüglich "c" da

$$A \in S^{-} \Rightarrow A^c = M - A \in S^{-}.$$

Jetzt beweisen wir, dass S^- abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist, d.h.

$$A, B \in S^- \Rightarrow A \cap B \in S^-. \tag{1.65}$$

Dafür betrachten wir für jedes $A \in S^-$ das Mengensystem

$$\boxed{G_A = \{B \subset M : A \cap B \in S^-\}}.$$

Wir bezeichnen die Elemente B aus G_A als "gute" Mengen für A. Die Aussage (1.65) bedeutet, dass alle $B \in S^-$ "gut" für A sind wenn $A \in S^-$, d.h.

$$A \in S^- \;\Rightarrow\; G_A \supset S^-. \tag{1.66}$$

Um (1.66) zu beweisen, es reicht zu zeigen, dass für alle $A \in S^-$

(i) G_A ist abgeschlossen bezüglich " $-$ "
(ii) $G_A \supset S$

Beweisen wir zunächst (i) d.h. dass G_A abgeschlossen bezüglich "$-$" ist. Seien $B_1 \supset B_2$ zwei Elemente von G_A, d.h.

$$A \cap B_1 \in S^- \text{ und } A \cap B_2 \in S^-.$$

Wir müssen beweisen dass $B_1 - B_2 \in G_A$. In der Tat gilt es

$$A \cap (B_1 - B_2) = (A \cap B_1) - (A \cap B_2) \in S^-,$$

woraus folgt nach Definition von G_A dass

$$B_1 - B_2 \in G_A.$$

Beweisen wir jetzt (ii), d.h. $G_A \supset S$ für jedes $A \in S^-$, was äquivalent zur folgenden Implikation ist:

$$A \in S^-, \; B \in S \Rightarrow A \cap B \in S^-.$$

Nach Symmetrie von $\cap$ ist diese Aussage äquivalent zu:

$$A \in S, \; B \in S^- \Rightarrow A \cap B \in S^-,$$

und die letzte Eigenschaft ist äquivalent zu:

$$A \in S \;\Rightarrow G_A \supset S^-.$$

Da G_A abgeschlossen bezüglich "$-$" ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$A \in S \;\Rightarrow G_A \supset S.$$

Nach Definition von G_A ist die letzte Aussage äquivalent zu

$$A \in S, \; B \in S \Rightarrow A \cap B \in S^-,$$

was gilt, da S abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist so dass $A \cap B \in S$ und $S^- \supset S$.

(b) Sei S eine Algebra. Wir müssen beweisen, dass $S^{\lim}$ auch eine σ-Algebra ist. Beweisen wir zunächst, dass $S^{\lim}$ eine Algebra ist. Offensichtlich gilt $\emptyset, M \in S^{\lim}$, und wir müssen noch zeigen, dass $S^{\lim}$ abgeschlossen bezüglich $\cap$ und "c" ist.

Beweisen wir zunächst, dass $S^{\lim}$ abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist. Dafür betrachten wir für jedes $A \in S^{\lim}$ das Mengensystem

$$\boxed{G_A = \left\{B \subset M : A \cap B \in S^{\lim}\right\}}.$$

Wieder bezeichnen wir die Elemente B aus G_A als "gute" Mengen für A und müssen beweisen, dass alle Elemente aus $S^{\lim}$ "gut" sind wenn $A \in S^{\lim}$, d.h.

$$A \in S^{\lim} \Rightarrow G_A \supset S^{\lim}.$$

Dafür reicht es zu zeigen, dass für alle $A \in S^{\lim}$

(i) G_A ist abgeschlossen bezüglich $\lim$
(ii) $G_A \supset S.$

Beweisen wir zuerst (i), d.h. dass G_A abgeschlossen bezüglich lim ist. Sei $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monotone Folge aus G_A so dass

$$A \cap B_k \in S^{\lim} \ \text{ für alle } k.$$

Wir behaupten, dass für den Grenzwert $B = \lim B_k$ gilt

$$A \cap B = \lim \left(A \cap B_k\right). \tag{1.67}$$

In der Tat, ist $\{B_k\}$ monoton steigend, so gilt es nach dem Distributivgesetz

$$A \cap B = A \cap \left(\bigcup_k B_k\right) = \bigcup_k \left(A \cap B_k\right) = \lim \left(A \cap B_k\right),$$

und im Fall wenn $\{B_k\}$ monoton fallend ist erhalten wir analog

$$A \cap B = A \cap \left(\bigcap_k B_k\right) = \bigcap_k \left(A \cap B_k\right) = \lim \left(A \cap B_k\right).$$

Da $A \cap B_k \in S^{\lim}$, so folgt es aus (1.67), dass auch

$$A \cap B \in S^{\lim}$$

und somit $B \in G_A$.

Beweisen wir jetzt (ii), dass

$$A \in S^{\lim} \Rightarrow G_A \supset S.$$

Nach Definition von G_A ist diese Inklusion äquivalent zu

$$A \in S^{\lim},\ B \in S \Rightarrow A \cap B \in S^{\lim},$$

was nach Symmetrie von $\cap$ ist äquivalent zu

$$A \in S,\ B \in S^{\lim} \Rightarrow A \cap B \in S^{\lim},$$

d.h. zu

$$A \in S \ \Rightarrow G_A \supset S^{\lim}$$

Da G_A abgeschlossen bezüglich lim ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$A \in S \Rightarrow G_A \supset S,$$

und die letzte Eigenschaft gilt, da S abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist: für alle $B \in S$ gilt $A \cap B \in S \subset S^{\lim}$ so dass $B \in G_A$.

Beweisen wir jetzt, dass $S^{\lim}$ abgeschlossen bezüglich der Operation "^{c}" ist. Dafür betrachten wir das Mengensystem

$$\boxed{G = \left\{A \subset M : A^c \in S^{\lim}\right\}}.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$G \supset S^{\lim}.$$

Da S abgeschlossen bezüglich "^{c}" ist, so gilt $G \supset S$, und es bleibt zu zeigen dass

$$G \text{ ist abgeschlossen bezüglich } \lim.$$

Sei $\{A_k\}$ eine monotone Folge aus G, zum Beispiel, monoton steigend. Beweisen wir, dass auch der Grenzwert

$$A = \lim A_k = \bigcup_k A_k$$

in G liegt. Die Folge $\{A_k^c\}$ ist offensichtlich monoton fallend. Da $A_k^c \in S^{\lim}$, so gilt

$$\lim A_k^c \in S^{\lim}.$$

Andererseits, es gilt

$$\lim A_k^c = \bigcap_k A_k^c = \left(\bigcup_k A_k\right)^c = (\lim A_k)^c = A^c,$$

woraus folgt, dass $A^c \in S^{\lim}$. Somit erhalten wir, dass $A \in G$, was zu beweisen war.

Da $S^{\lim}$ eine Algebra ist und abgeschlossen bezüglich lim, so ist $S^{\lim}$ eine σ-Algebra nach dem Lemma 1.22, das unterhalb bewiesen wird. ■

Lemma 1.22 *Ist eine Algebra R abgeschlossen bezüglich monotones Limes, so ist R eine σ-Algebra.*

Die Umkehrung gilt offensichtlich auch: jede σ-Algebra R ist eine Algebra die abgeschlossen bezüglich lim ist.

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass für jede Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $A_n \in R$ gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R.$$

Setzen wir $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ und bemerken, dass die Folge $\{B_n\}$ monoton steigend ist und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim B_n.$$

Da $B_n \in R$, es folgt, dass $\lim B_n \in R$, woraus auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R$ folgt. ■

1.13 Nullmengen

Sei S ein Mengensystem auf M und μ ein Maß auf S. Das äußere Maß $\mu^*(A)$ wird für alle $A \subset M$ wie folgt definiert:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in S \text{ und } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}. \tag{1.68}$$

Definition. Eine Menge $A \subset M$ heißt *Nullmenge* (bezüglich μ und S) wenn $\mu^*(A) = 0$.

Man sagt, dass A eine Menge von Maß 0 ist, wenn $A \in S$ und $\mu(A) = 0$. Jede Menge $A \in S$ von Maß 0 ist auch eine Nullmenge da man in (1.68) $A_k = A$ wählt.

Allerdings muss eine Nullmenge $A \subset M$ nicht in S liegen, und in diesem Fall ist die Nullmenge keine Menge von Maß 0.

Beispiel. Sei S ein Halbring von Intervallen in $\mathbb{R}$ und ℓ die Länge auf S. Jede Menge $\{x\}$ die aus einem Punkt besteht hat die Länge 0 und somit auch eine Nullmenge. Jede abzählbare Menge $A = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine Nullmenge da

$$\ell^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell^*(\{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\{x_k\}) = 0.$$

Andererseits die Menge A liegt weder in S noch in $\rho(S)$.

Die Cantor-Menge aus dem Abschnitt 1.6 ist ein Beispiel von einer überabzählbaren Nullmenge (Aufgaben 20, 21).

Beweisen wir einige Eigenschaften von Nullmengen.

Lemma 1.23 *Sei μ ein Maß auf einem Ring R.*
(*a*) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder eine Nullmenge.*
(*b*) *Das Mengensystem $\mathcal{N}$ von allen Nullmengen ist ein σ-Ring.*

Beweis. (*a*) Die Bedingung $A \subset B$ impliziert $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ nach Lemma 1.7. Ist B eine Nullmenge, somit ist A auch eine Nullmenge.

(*b*) Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathcal{N}$. Für alle $A, B \in \mathcal{N}$ gilt $A \setminus B \in \mathcal{N}$ nach (*a*), da $A \setminus B \subset A$. Sei

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$$

mit $A_n \in \mathcal{N}$ und $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nach der σ-Subadditivität von μ^* (Lemma 1.8) erhalten wir

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n) = 0$$

woraus $A \in \mathcal{N}$ folgt. ■

Satz 1.24 *Sei μ ein Maß auf einem σ-Ring R. Eine Menge $A \subset M$ ist Nullmenge genau dann, wenn es eine Menge $B \in R$ gibt mit $A \subset B$ und $\mu(B) = 0$, d.h. wenn A eine Teilmenge einer Menge $B \in R$ von Maß 0 ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 36. ■

Satz 1.25 *Sei μ ein Maß auf einem σ-Ring R. Betrachten wir das folgende Mengensystem in M:*

$$\overline{R} = \{A = B \vartriangle N : \; B \in R \quad und \quad N \in \mathcal{N}\} . \tag{1.69}$$

Definieren wir die Funktion ν auf $\overline{R}$ mit $\nu(A) := \mu(B)$, wobei A und B sind wie in (1.69). Dann gilt folgendes.

(a) *$\overline{R}$ ist der minimale σ-Ring, der R und $\mathcal{N}$ umfasst, d.h.*

$$\overline{R} = \sigma(R \cup \mathcal{N}) . \tag{1.70}$$

(b) *ν ist wohldefiniert auf $\overline{R}$, ν ist ein Maß auf $\overline{R}$ und $\nu|_R = \mu$.*

Definition. Der σ-Ring $\overline{R}$ heißt die *Vervollständigung* des σ-Ringes R, und dass Maß ν heißt die *Vervollständigung* des Maßes μ.

Beweis. Siehe Aufgaben 37 und 38. ∎

Sei jetzt μ ein endliches Maß auf einer Algebra R. Wir wissen nach den Satz 1.10, dass μ sich auf die σ-Algebra $\overline{\sigma}(R)$ von messbaren Mengen erweitern lässt. Mit Hilfe von Begriff von Nullmengen erklären wir den Unterschied zwischen den Algebren $\sigma(R)$ und $\overline{\sigma}(R)$.

Satz 1.26 *Sei μ ein endliches Maß auf einer Algebra R. Dann gilt folgendes.*

(a) *Jede Nullmenge von μ liegt in $\overline{\sigma}(R)$.*

(b) *Für jedes $A \subset M$ gilt die Äquivalenz:*

$$A \in \overline{\sigma}(R) \Leftrightarrow \exists B \in \sigma(R) \;\; mit \; B \supset A \quad und \; B \setminus A \in \mathcal{N}. \tag{1.71}$$

In anderen Wörter, jede Menge $A \in \overline{\sigma}(R)$ enthält man aus einer Menge $B \in \sigma(R)$ mit Hilfe von Subtrahieren einer Nullmenge. Die Aussage (1.71) lässt sich äquivalent wie folgt umformulieren:

$$A \in \overline{\sigma}(R) \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{N} \text{ so dass } A \sqcup N \in \sigma(R) .$$

Korollar 1.27 *Sei μ ein endliches Maß auf einer Algebra R. Dann $\overline{\sigma}(R)$ ist die minimale σ-Algebra, die $\sigma(R)$ und $\mathcal{N}$ umfasst; d.h. $\overline{\sigma}(R)$ ist die Vervollständigung der σ-Algebra $\sigma(R)$.*

Somit gelten die Identitäten

$$\overline{\sigma}(R) = \overline{\sigma(R)} = \sigma(\sigma(R) \cup \mathcal{N}) . \tag{1.72}$$

Besweis von dem Korollar 1.27. Die Algebra $\sigma(R)$ ist eine Teilmenge von $\overline{\sigma}(R)$ nach Definition von $\sigma(R)$, und $\mathcal{N}$ ist eine Teilmenge von $\overline{\sigma}(R)$ nach dem Satz 1.26(a). Es folgt, dass

$$\overline{\sigma}(R) \supset \sigma(R) \cup \mathcal{N}$$

und somit

$$\overline{\sigma}(R) \supset \sigma(\sigma(R) \cup \mathcal{N}) = \overline{\sigma(R)},$$

wobei wir in der letzten Identität (1.70) benutzt haben. Nach dem Satz 1.26(b), für jedes Element $A \in \overline{\sigma}(R)$ gibt es ein $B \in \sigma(R)$ mit $A \subset B$ and $N := B \setminus A \in \mathcal{N}$, woraus folgt

$$A = B \setminus N = B \vartriangle N.$$

Somit liegt A in der Vervollständigung $\overline{\sigma(R)}$ der σ-Algebra $\sigma(R)$, d.h.

$$\overline{\sigma}(R) \subset \overline{\sigma(R)},$$

woraus die Identität (1.72) folgt. ■

Beweis von dem Satz 1.26. (a) Wir müssen zeigen, dass jede Nullmenge A messbar ist, d.h. für jedes $A \in \mathcal{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $B \in R$ mit

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Nehmen wir einfach $B = \emptyset$. Dann gilt

$$\mu^*(A \vartriangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

(b) Sei A eine Teilmenge von M. Existiert ein $B \in \sigma(R)$ mit $A \subset B$ and $N := B \setminus A \in \mathcal{N}$, so erhalten wir

$$A = B \setminus N \in \overline{\sigma}(R),$$

da $\overline{\sigma}(R)$ eine σ-Algebra ist, die $\sigma(R)$ und $\mathcal{N}$ umfasst.

Sei $A \in \overline{\sigma}(R)$. Wir beweisen jetzt die Existenz einer Menge $B \in \sigma(R)$ mit $B \supset A$ and $B \setminus A \in \mathcal{N}$. Nach Definition von μ^* gilt

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in R,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}. \tag{1.73}$$

Fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachten eine Folge $\{A_k\}$ wie in (1.73) und mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Setzen wir

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

und bemerken, dass $B_n \in \sigma(R)$ (da $A_k \in R$), $B_n \supset A$ und

$$\mu^*(B_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Da B_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, so betrachten wir jetzt die Menge

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Es gelten $B \in \sigma(R)$, $B \supset A$ und

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

woraus folgt

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A).$$

Da $A \subset B$, es gilt auch $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ und somit

$$\mu^*(A) = \mu^*(B).$$

Da μ^* auf $\overline{\sigma}(R)$ ein Maß ist, so erhalten wir nach Additivität

$$\mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0,$$

und somit $B \setminus A \in \mathcal{N}$. $\blacksquare$

Chapter 2

Lebesgue-Integration

05.11.21 Vorlesung 8

Gegeben seien eine Grundmenge M, eine σ-Algebra $\mathcal{S}$ in M und ein Maß μ auf $\mathcal{S}$. Das Dreifache $(M, \mathcal{S}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*. In diesem Kapitel definieren wir den Begriff von Lebesgue-Integral in einem Maßraum, d.h. den Ausdruck

$$\int_M f d\mu$$

für reellwertige Funktionen f auf M von bestimmten Klassen.

2.1 Einführung

Für eine stetige Funktion $f(x)$ auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ definiert man das Riemannsche Integral $\int_a^b f\,dx$ als Limes der Riemann-Summe wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{2.1}$$

wobei $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Zwischenstellen sind, und $\varphi(Z) = \max_k (x_k - x_{k-1})$.

Man kann dieses Verfahren auch wie folgt darstellen. Definieren wir zuerst das Integral der Indikatorfunktion[1] $\mathbf{1}_I$ von einem Intervall $I \subset [a, b]$ mit

$$\int_a^b \mathbf{1}_I dx = \ell(I).$$

Jetzt fixieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung Z mit $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ und betrachten eine *Treppenfunktion*

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{[x_{k-1}, x_k)}$$

[1] Die Indikatorfunktion einer Teilmenge $A \subset M$ ist die folgende Funktion auf M:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

wobei $c_k = f(\xi_k)$. Wir definieren das Integral von f_n nach Linearität, d.h.

$$\int_a^b f_n(x)\,dx := \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b \mathbf{1}_{[x_{k-1},x_k)} dx = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}),$$

was mit der Riemann-Summe übereinstimmt. Für $n \to \infty$ erhalten wir nach der gleichmäßigen Stetigkeit von f, dass

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{auf } [a,b]$$

und nach der Definition (2.1) erhalten wir, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

In dieser Konstruktion ist die Stetigkeit von f wichtig, da f auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ mit einer Konstante $c_k = f(\xi_k)$ approximiert wird.

Die Idee von Integration im Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ist ähnlich. Man definiert zunächst das Integral $\int_M f d\mu$ für Indikatorfunktionen $f = \mathbf{1}_A$ wie folgt:

$$\int_M \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A),$$

vorausgesetzt, dass A im Definitionsbereich von μ liegt, d.h. $A \in \mathcal{S}$. Hier gibt es einen großen Unterschied zum Fall von Riemannscher Integration: in Riemann-Integral benutzt man nur Indikatorfunktionen von Intervallen, wobei in Lebesgue-Integration – Indikatorfunktionen von beliebigen Mengen aus $\mathcal{S}$.

Betrachten wir jetzt beliebige endliche lineare Kombinationen von Indikatorfunktionen, d.h. die Funktionen der Form

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}, \tag{2.2}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{S}$. Jede Funktion f der Form (2.2) heißt *Elementarfunktion*. Für beliebige Elementarfunktion (2.2) definiert man das Integral $\int_M f d\mu$ nach Linearität wie folgt:

$$\int_M f d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \int_M \mathbf{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k).$$

Danach definiert man das Integral $\int_M f d\mu$ für alle Funktionen f, die sich durch Elementarfunktionen in bestimmten Sinn approximieren lassen. Das ist eine Klasse von *messbaren* Funktionen, die unterhalb definiert werden.

2.2 Messbare Funktionen

Sei M eine Grundmenge und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von M. Das Paar $(M, \mathcal{S})$ heißt *Messraum*. In diesem Abschnitt betrachten wir immer einen Messraum $(M, \mathcal{S})$.

Definition. Eine Menge $A \subset M$ heißt $\mathcal{S}$-messbar wenn $A \in \mathcal{S}$.

Definition. Eine Funktion $f : M \to [-\infty, +\infty]$ heißt $\mathcal{S}$-messbar wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{f \leq c\} := \{x \in M : f(x) \leq c\}$$

$\mathcal{S}$-messbar ist, d.h. in $\mathcal{S}$ liegt.

Die Definition von $\mathcal{S}$-messbarer Funktion lässt sich wie folgt umformulieren. Da

$$\{x \in M : f(x) \leq c\} = f^{-1}[-\infty, c],$$

so ist f S-messbar genau dann, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}[-\infty, c]$ in $\mathcal{S}$ liegt.

Man sagt häufig "messbar" anstatt "$\mathcal{S}$-messbar" wenn es klar ist, was $\mathcal{S}$ ist.

In $\mathbb{R}^n$ gibt es zwei wichtige σ-Algebren: $\mathcal{M}_n$ von Lebesgue-messabaren Mengen und $\mathcal{B}_n$ von Borel-Mengen. Die $\mathcal{M}_n$-messbaren Funktionen nennt man Lebesgue-messbare (oder einfach messbare) Funktionen. Die $\mathcal{B}_n$-messbaren Funktionen nennt man Borel-Funktionen.

Beispiel. Sei A eine Teilmenge M. Die Indikatorfunktion $f = \mathbf{1}_A$ ist genau dann $\mathcal{S}$-messbar, wenn $A \in \mathcal{S}$. Dies folgt aus der folgenden Beschreibung der Menge $\{f \leq c\}$:

$$\{x \in M : f(x) \leq c\} = \begin{cases} \emptyset, & c < 0, \\ A^c, & 0 \leq c < 1, \\ M, & c \geq 1, \end{cases}$$

da die Mengen $\emptyset$ und M in $\mathcal{S}$ liegen und $A^c \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}$.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{S} = \mathcal{B}_n$. Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge $f^{-1}[-\infty, c] = f^{-1}(-\infty, c]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ als das Urbild der abgeschlossenen Menge $(-\infty, c] \subset \mathbb{R}$. Da alle abgeschlossenen Menge in $\mathcal{B}_n$ liegen, so beschließen wir, dass jede stetige Funktion auch eine Borel-Funktion ist.

Beispiel. Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Borel-Funktion da das Urbild $f^{-1}(-\infty, c]$ ein Intervall ist und alle Intervallen Borel-Mengen sind.

Definition. Sei $(M, \mathcal{S})$ ein Messraum. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{S}$-messbar wenn alle Komponenten f_k von f $\mathcal{S}$-messbare Funktionen sind, d.h. für alle $k = 1, ..., n$ und $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f_k \leq c\}$ in $\mathcal{S}$ liegt.

Satz 2.1 *Für eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ gilt die folgende Äquivalenz:*

$$f \text{ ist } \mathcal{S}\text{-messbar} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_n \text{ gilt } f^{-1}(B) \in \mathcal{S}.$$

Dieser Satz ergibt die äquivalente Definition von $\mathcal{S}$-messbaren Abbildungen: eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{S}$-messbar, wenn für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ das Urbild $f^{-1}(B)$ $\mathcal{S}$-messbar ist.

Beweis. Beweisen wir zuerst die Implikation "$\Leftarrow$". Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und $k = 1, ..., n$ betrachten wir die Borel-Menge

$$B = \{z \in \mathbb{R}^n : z_k \leq c\} = \mathbb{R} \times ... \times \underbrace{(-\infty, c]}_{k\text{-te Position}} \times ... \times \mathbb{R}.$$

Es gilt offensichtlich

$$\{x \in M : f_k(x) \le c\} = \{x \in M : f(x) \in B\} = f^{-1}(B).$$

Nach Voraussetzung haben wir $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$, woraus folgt, dass f_k $\mathcal{S}$-messbar ist.

Beweisen wir die Implikation “$\Rightarrow$”, d.h. für eine messbare Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ und für jedes $B \in \mathcal{B}_n$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ das folgende Mengensystem in $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F} = \left\{B \subset \mathbb{R}^n : f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\right\}.$$

Die Implikation “$\Rightarrow$” ist dann äquivalent zur Inklusion $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}_n$.

Bemerken wir, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist und f^{-1} mit allen Mengenoperationen vertauschbar ist (siehe Aufgabe 8). Bezeichnen wir mit S_n das Mengensystem von allen Quadern in $\mathbb{R}^n$. Da $\mathcal{B}_n = \sigma(S_n)$, so reicht es zu beweisen, dass $\mathcal{F} \supset S_n$, d.h. dass alle Quader in $\mathcal{F}$ liegen.

Ein Quader $Q \in S_n$ heißt *speziell*, wenn Q von der Form

$$Q = (-\infty, c_1] \times (-\infty, c_2] \times ... \times (-\infty, c_n]$$

ist wobei $c_k \in \mathbb{R}$. Für einen speziellen Quader gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= \{x \in M : f(x) \in Q\} \\ &= \{x \in M : f_1(x) \le c_1, f_2(x) \le c_2, ..., f_n(x) \le c_n\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in M : f_k(x) \le c_k\} \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

woraus folgt $Q \in \mathcal{F}$. Somit liegen alle speziellen Quader in $\mathcal{F}$.

Um zu zeigen dass alle Quader in $\mathcal{F}$ liegen, beweisen wir per Induktion nach n die folgende Aussage.

Behauptung. *Jeder Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich aus den speziellen Quadern mit Hilfe von monotonen Operationen “$-$” und* lim *erstellen.*

Da $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, so folgt es daraus, dass alle Quader in $\mathcal{F}$ liegen.

Für den Induktionsanfang $n = 1$ betrachten wir verschiedene Typen von Intervallen I und zeigen, dass sie aus den speziellen Intervallen mit Hilfe von monotonen Operationen erstellbar. Für das Intervall $I = (-\infty, c]$ gibt es nichts zu beweisen da I speziell ist.

Für das Intervall $I = (a, b]$ mit $a < b$ gilt

$$I = (-\infty, b] - (-\infty, a]$$

so dass I eine monotone Differenz zweier speziellen Intervalle ist.

Sei $I = (a, b)$. Wählen wir eine streng monoton steigende Folge $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $b_k \uparrow b$ für $k \to \infty$. Dann gilt

$$I = (a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a, b_k] = \lim_{k\to\infty} (a, b_k],$$

so dass (a, b) ein monotoner Limes von den speziellen Intervallen ist.

Für das Intervall $I = [a, b]$ wählen wir eine streng monoton steigende Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \uparrow a$ für $k \to \infty$ und erhalten

$$I = [a, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k, b] = \lim_{k\to\infty} (a_k, b].$$

Für das Intervall $I = [a, b)$ erhalten wir analog

$$I = [a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k, b) = \lim_{k\to\infty} (a_k, b) .$$

Für den Induktionsschritt von $n - 1$ nach n betrachten wir einen n-dimensionalen Quader

$$Q = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = I \times Q',$$

wobei $I = I_1$ und $Q' = I_2 \times ... \times I_n$ ein $(n-1)$-dimensionaler Quader ist. Nach der Induktionsvoraussetzung ist Q' aus den speziellen Quadern mit Hilfe von "$-$" und lim erstellbar. Da $\times$ mit den Mengenoperationen "$-$" und lim vertauschbar ist, so erhalten wir, dass $I \times Q'$ aus den Produkten

$$I \times P$$

mit Hilfe von monotonen Operationen erstellbar ist, wobei P ein spezieller $(n-1)$-dimensionaler Quader ist. Da I aus speziellen Intervallen mit Hilfe von monotonen Operationen erstellbar ist, so erhalten wir, dass $I \times P$ aus den Produkten

$$J \times P \tag{2.3}$$

mit Hilfe von monotonen Operationen erstellbar ist, wobei J ein spezielles Intervall ist. Da $J \times P$ ein spezieller n-dimensionaler Quader ist, so haben wir die Induktionsbehauptung bewiesen. ■

Beispiel. Seien $f : M \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{S}$-messbare Funktion und C – die Cantor-Menge in $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge

$$f^{-1}(C) = \{x \in M : f(x) \in C\}$$

$\mathcal{S}$-messbar, da C Borel-Menge ist (Aufgabe 20).

Satz 2.2 *Seien $f_1, ..., f_n$ $\mathcal{S}$-messbare Funktionen $M \to \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Borel-Function. Dann ist die Funktion*

$$F = \Phi(f_1, ..., f_n)$$

auch $\mathcal{S}$-messbar.

In Kürze: eine Borel-Funktion von messbaren Funktionen ist messbar.

Beweis. Betrachten wir die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $f_1, ..., f_n$, d.h.

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildung ist $\mathcal{S}$-messbar nach Definition. Um die $\mathcal{S}$-Messbarkeit von $F = \Phi \circ f$ zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\{x \in M : F(x) \leq c\} \in \mathcal{S}. \tag{2.4}$$

Bezeichnen wir $I = (-\infty, c]$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \{x \in M : F(x) \leq c\} &= \{x \in M : F(x) \in I\} \\ &= \{x \in M : \Phi(f(x)) \in I\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{x \in M : f(x) \in \Phi^{-1}(I)\right\} \\
&= f^{-1}\left(\Phi^{-1}(I)\right).
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung ist $\Phi^{-1}(I)$ eine Borel-Menge. Nach dem Satz 2.1 erhalten wir, dass

$$f^{-1}\left(\Phi^{-1}(I)\right) \in \mathcal{S},$$

woraus (2.4) folgt. ■

Beispiel. Es folgt aus dem Satz 2.2, dass die Summe $f_1 + f_2$ zweier $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen f_1 und f_2 auch $\mathcal{S}$-messbar ist. Um das zu zeigen, betrachten wir die Funktion

$$\Phi(z_1, z_2) = z_1 + z_2$$

auf $\mathbb{R}^2$, die offensichtlich stetig und somit auch Borel ist. Dann gilt

$$f_1 + f_2 = \Phi(f_1, f_2),$$

und die letzte Funktion ist $\mathcal{S}$-messbar nach dem Satz 2.2.

Ein direkter Beweis von $\mathcal{S}$-Messbarkeit von $f_1 + f_2$ ist nicht einfach: man muss dafür zeigen, dass die Menge $\{f_1 + f_2 \leq c\}$ $\mathcal{S}$-messbar ist, obwohl es keine offensichtliche Beziehung zu den Mengen $\{f_1 \leq a\}$ und $\{f_2 \leq b\}$ gibt, denen Messbarkeit gegeben ist.

Genauso beweist man, dass the folgenden Funktionen $\mathcal{S}$-messbar sind:

$$f_1 f_2, \ \ \frac{f_1}{f_2} \text{ (falls } f_2 \neq 0), \ \max(f_1, f_2), \ \min(f_1, f_2), \ \text{usw.}$$

Beispiel. Sei $A_1, A_2, ..., A_n$ eine endliche Folge von $\mathcal{S}$-messbaren Mengen. Dann alle Funktionen $\mathbf{1}_{A_k}$ sind $\mathcal{S}$-messbar, woraus folgt, dass die Funktion

$$f = c_1 \mathbf{1}_{A_1} + c_2 \mathbf{1}_{A_2} + ... + c_n \mathbf{1}_{A_n}$$

für beliebige Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ auch $\mathcal{S}$-messbar ist.

Definition. Man sagt, dass eine Folge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Funktionen $M \to [-\infty, +\infty]$ gegen Funktion f *punktweise konvergiert* und schreibt $f_k \to f$ wenn

$$\text{für jedes } x \in M \text{ gilt } f_k(x) \to f(x) \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Satz 2.3 *Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen $M \to [-\infty, +\infty]$, die gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Dann ist f auch $\mathcal{S}$-messbar.*

Beweis. Nach Definition von Limes

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$$

erhalten wir die folgende Äquivalenz für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \leq c \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall k \geq m \ \ \ f_k(x) \leq c + \varepsilon.$$

Offensichtlich reicht es nur die Werte $\varepsilon = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, so dass

$$f(x) \le c \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall k \ge m \ \ f_k(x) \le c + \frac{1}{n}.$$

Diese logische Äquivalenz lässt sich in eine Gleichheit von Mengen wie folgt umwandeln:

$$\{f \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{ f_k \le c + \frac{1}{n} \right\},$$

wobei der Allquantor $\forall$ sich in den Schnitt $\cap$ verwandelt, und der Existenzquantor $\exists$ – in die Vereinigung $\cup$.

Da jede Mengen $\{f_k \le c + 1/n\}$ in $\mathcal{S}$ liegt und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, so erhalten wir, dass auch $\{f \le c\}$ in $\mathcal{S}$ liegt, was zu beweisen war. ■

Korollar 2.4 *Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $\mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Sind alle f_k Borel-Funktionen (bzw Lebesgue-messbar), so ist auch f Borel-Funktion (bzw Lebesgue-messbar).*

Beweis. Diese Aussage folgt aus dem Satz 2.3 mit $\mathcal{S} = \mathcal{B}_n$ bzw $\mathcal{S} = \mathcal{M}_n$. ■

Bemerkung. Es wurde oberhalb gezeigt, dass für zwei $\mathcal{S}$-messbare Funktion $f, g : M \to \mathbb{R}$ auch die Summe $f + g$ $\mathcal{S}$-messbar ist. Zeigen wir, dass die gleiche Aussage auch für $\mathcal{S}$-messbare Funktionen $f, g : M \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt vorausgesetzt dass $f + g$ wohldefiniert ist. Dafür betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \in [-n, n] \\ n, & f(x) > n \\ -n, & f(x) < -n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Die Funktion f_n ist endlich und auch $\mathcal{S}$-messbar, da für jedes $c \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$\{f_n \le c\} = \begin{cases} \{f \le c\}, & -n \le c < n \\ M, & c \ge n \\ \emptyset, & c < -n. \end{cases}$$

und somit $\{f_n \le c\} \in \mathcal{S}$. Bemerken wir auch, dass $f_n \to f$ punktweise für $n \to \infty$. Analog definiert man eine Folge $\{g_n\}$ von endlichen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen mit $g_n \to g$. Nach dem Satz 2.2 sind alle Funktionen $f_n + g_n$ $\mathcal{S}$-messbar, und nach dem Satz 2.3 ist auch $f + g$ $\mathcal{S}$-messbar als der punktweise Grenzwert von $\{f_n + g_n\}$. Genauso beweist man, dass auch die folgenden Funktionen $\mathcal{S}$-messbar sind:

$$fg, \quad \frac{f}{g} \text{ (wenn } g \ne 0), \ \max(f, g), \quad \min(f, g), \quad \text{usw.}$$

2.3 Lebesgue-Integral von Elementarfunktionen

Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. M ist eine Grundmenge M, $\mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra in M, und μ ist ein Maß μ auf $\mathcal{S}$.

Definition. Eine function $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *Elementarfunktion* wenn

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}, \tag{2.6}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in [0, +\infty)$, $A_k \in \mathcal{S}$; d.h. f ist eine endliche lineare Kombination von Indikatorfunktionen von messbaren Mengen mit nichtnegativen Koeffizienten.

Wie wissen schon, dass jede Elementarfunktion $\mathcal{S}$-messbar ist.

Definition. Für Elementarfunktion der Form (2.6) definieren wir das *Lebesgue-Integral* $\int_M f d\mu$ mit

$$\int_M f d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k\right). \tag{2.7}$$

Da $a_k \in [0, \infty)$ und $\mu\left(A_k\right) \in [0, \infty]$, so ist das Produkt $a_k \mu\left(A_k\right)$ ein Element von $[0, \infty]$. Für Multiplikation mit ∞ benutzen wir immer die folgende Konvention:

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Die Summe $a + \infty$ ist immer gleich ∞ für alle $a \geq 0$. Mit diesen Definitionen von Operationen mit ∞ erfüllen die Addition und Multiplication von Elementen von $[0, \infty]$ alle üblichen Gesetze (kommutativ, assoziativ und distributiv).

Zum Beispiel, für $f = a\mathbf{1}_A$ erhalten wir nach (2.7)

$$\int_M f d\mu = a\mu\left(A\right).$$

Beispiel. Betrachten wir auf dem Intervall $[0, 1]$ die *Dirichlet-Funktion*

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da jede untere Darboux-Summe gleich 0 ist, während jede obere Darboux-Summe gleich 1 ist. Andererseits ist die Funktion f eine Elementarfunktion, da $f = \mathbf{1}_A$ wobei $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Borel-Menge ist. Somit ist das Lebesgue-Integral definiert und es gilt

$$\int_{[0,1]} f\, d\lambda = \lambda\left(A\right) = 0.$$

Bemerkung. Die Notation $\int_M f d\mu$ soll als Gesamtheit angenommen werden, da wir den Begriff $d\mu$ separat nicht definieren. Eine andere Bezeichnung für das Integral ist $\mu\left(f\right)$. Damit wird es betont, dass μ als ein Funktional auf Funktionen betrachtet wird. Da

$\mu(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$, bedeutet es, dass wir die Funktion μ von Mengen auf Indikatorfunktionen übertragen und danach weiter auf lineare Kombinationen von Indikatorfunktionen erweitern. Wir benutzen die traditionelle Bezeichnung $\int_M f d\mu$ da sie bestimmte Vorteile für Integration in $\mathbb{R}^n$ hat.

Wir beweisen unterhalb Eigenschaften von Integration von Elementarfunktionen, aber zunächst muss man beweisen, dass das Integral mit (2.7) wohldefiniert ist, d.h. der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl der Darstellung (2.7) ist.

Satz 2.5 *Seien $f = \sum_k a_k \mathbf{1}_{A_k}$ und $g = \sum_l b_l \mathbf{1}_{B_l}$ zwei Elementarfunktionen. Gilt $f \equiv g$ auf M so gilt*

$$\sum_k a_k \mu(A_k) = \sum_l b_l \mu(B_l). \tag{2.8}$$

Somit ist der Wert des Integrals (2.7) unabhängig von der Darstellung von f in der Form (2.7).

10.11.21 Vorlesung 9

Für den Beweis brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.6 *Sei $\{C_i\}_{i=1}^n$ eine endliche Folge von $\mathcal{S}$-messbaren Mengen.*

(*a*) *Es existiert eine Zerlegung*

$$M = \bigsqcup_{j=1}^N D_j, \tag{2.9}$$

wobei $N = 2^n$, alle Mengen D_j $\mathcal{S}$-messbar sind und jede Menge C_i eine Vereinigung von einigen Mengen D_j ist.

(*b*) *Für jede Folge $\{a_i\}_{i=1}^n$ von nichtnegativen reellen Zahlen existiert eine Folge $\{a'_j\}_{j=1}^N$ von nichtnegativen reellen Zahlen mit $N = 2^n$ und*

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{C_i} \equiv \sum_{j=1}^N a'_j \mathbf{1}_{D_j} \tag{2.10}$$

und

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(C_i) = \sum_{j=1}^N a'_j \mu(D_j). \tag{2.11}$$

Es folgt aus diesem Lemma, dass die Folge $\{A_k\}$ in der Definition (2.6) von Elementarfunktion f als Zerlegung von M gewählt werden kann, ohne weder f noch $\int f d\mu$ zu ändern.

Beweis. (*a*) Beweisen wir die Existenz der Zerlegung (2.9) per Induktion nach n (siehe auch Aufgabe 14). Für $n = 1$ setzen wir

$$D_1 = C_1 \quad \text{und} \quad D_2 = C_1^c$$

so dass $N = 2 = 2^n$. Betrachten wir auch den Fall $n = 2$ obwohl das für den Beweise nicht notwendig ist. Im Fall von zwei Mengen C_1 und C_2 setzen wir

$$D_1 = C_1 \setminus C_2, \quad D_2 = C_2 \setminus C_1, \quad D_3 = C_1 \cap C_2, \quad D_4 = (C_1 \cup C_2)^c \tag{2.12}$$

so dass $N = 4 = 2^n$.

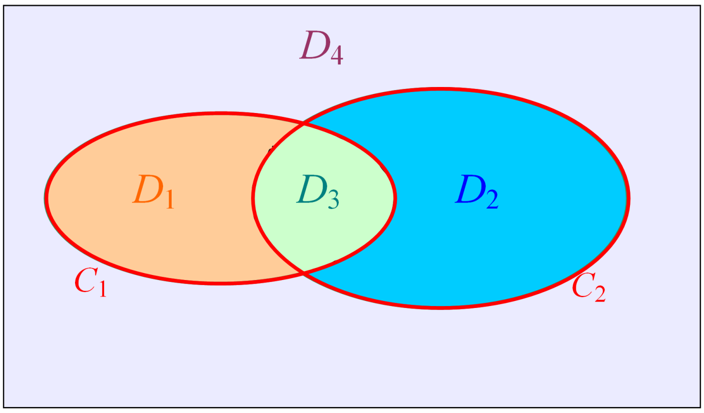


Illustration zu (2.12)

Dann sind alle D_j $\mathcal{S}$-messbar und es gelten

$$M = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_3 \sqcup D_4$$

und

$$C_1 = D_1 \cup D_3 \;\text{ und }\; C_2 = D_2 \cup D_3.$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Zerlegung $\{D_j\}_{j=1}^N$ mit $N = 2^n$ die die Folge $\{C_i\}_{i=1}^n$ bedient. Definieren wir eine Zerlegung $\{E_j\}_{j=1}^{2N}$ für die Folge $\{C_i\}_{i=1}^{n+1}$ wie folgt: für jedes $j = 1, ..., N$ setzen wir

$$E_{2j} = D_j \cap C_{n+1} \quad \text{und} \quad E_{2j-1} = D_j \cap C_{n+1}^c \;\; (= D_j \setminus C_{n+1}). \tag{2.13}$$

Offensichtlich sind alle Mengen E_j $\mathcal{S}$-messbar.

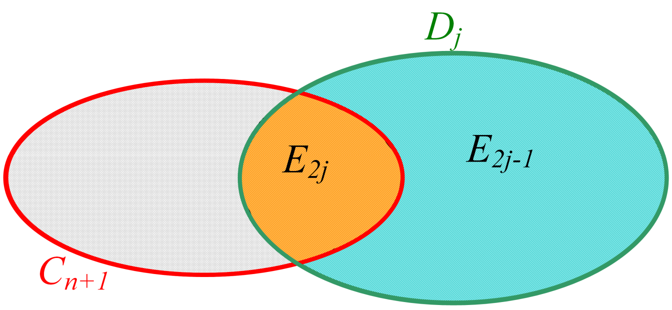


Illustration zu (2.13)

Es gilt

$$D_j = E_{2j} \sqcup E_{2j-1} \tag{2.14}$$

woraus folgt

$$M = \bigsqcup_{j=1}^{2N} E_j.$$

Es folgt aus (2.14) dass jedes C_i mit $i \leq n$ sich als eine Vereinigung von einigen Mengen E_j darstellen lässt. Für $i = n+1$ gilt

$$C_{n+1} = M \cap C_{n+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{N} D_j \right) \cap C_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} (D_j \cap C_{n+1}) = \bigcup_{j=1}^{N} E_{2j} \ ,$$

so dass C_{n+1} auch eine Vereinigung von einigen Mengen E_j ist.

(b) Gegeben sei die Zerlegung (2.9), definieren wir δ_{ij} für alle Paare (i,j) wie folgt

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \ C_i \supset D_j, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Jede Menge C_i ist eine disjunkte Vereinigung von jenen D_j, die Teilmengen von C_i sind, d.h.

$$C_i = \bigsqcup_{\{j:\delta_{ij}=1\}} D_j,$$

woraus folgt

$$\mu(C_i) = \sum_{\{j:\delta_{ij}=1\}} \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \mu(D_j)$$

und

$$\mathbf{1}_{C_i} = \sum_{\{j:\delta_{ij}=1\}} \mathbf{1}_{D_j} = \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \mathbf{1}_{D_j}.$$

Setzen wir

$$a'_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\, a_i.$$

Dann haben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\, a_i \right) \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{N} a'_j \mu(D_j)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{C_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \mathbf{1}_{D_j} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\, a_i \right) \mathbf{1}_{D_j} = \sum_{j=1}^{N} a'_j \mathbf{1}_{D_j},$$

was zu beweisen war. ■

Beweis von dem Satz 2.5. Nach dem Lemma 2.6 gibt es eine Zerlegung (2.9), die die Gesamtfolge

$$\{C_i\} = \{A_k, B_l\}_{k,l}$$

bedient, d.h. jede Menge A_k und B_l eine Vereinigung von einigen Mengen D_j ist.

Da

$$f = \sum_k a_k \mathbf{1}_{A_k} + \sum_l 0 \mathbf{1}_{B_l} \ \text{ und } \ g = \sum_k 0 \mathbf{1}_{A_k} + \sum_l b_l \mathbf{1}_{B_l} \ ,$$

so existieren nach dem Lemma 2.6 die Folgen $\{a'_j\}$ und$\{b'_j\}$ von nichtnegativen Zahlen mit

$$f = \sum_j a'_j \mathbf{1}_{D_j} \quad \text{und} \quad g = \sum_j b'_j \mathbf{1}_{D_j} \tag{2.15}$$

und

$$\sum_k a_k \mu(A_k) = \sum_j a'_j \mu(D_j) \quad \text{und} \quad \sum_l b_l \mu(B_l) = \sum_j b'_j \mu(D_j). \tag{2.16}$$

Wir können annehmen, dass alle D_j nicht leer sind, da sonst die leeren Mengen D_j sich aus der Folge $\{D_j\}$ entfernen lassen ohne (2.15) oder (2.16) zu stören. Für alle $x \in D_j$ gilt nach (2.15)

$$f(x) = a'_j \quad \text{und} \quad g(x) = b'_j. \tag{2.17}$$

Da $f(x) \equiv g(x)$, so folgt es dass $a'_j = b'_j$ für alle j. Somit folgt (2.8) aus (2.16). ∎

Lemma 2.7 *Seien f, g zwei Elementarfunktionen. Dann gilt folgendes.*

(a) (positive Linearität) *Für jedes $c \in [0, \infty)$ ist $cf + g$ Elementarfunktion und*

$$\int_M (cf + g)\, d\mu = c \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.$$

(b) (Monotonie) *Gilt $f \le g$ so gilt auch*

$$\int_M f d\mu \le \int_M g d\mu.$$

Beweis. (a) Seien $f = \sum_k a_k \mathbf{1}_{A_k}$ und $g = \sum_l b_l \mathbf{1}_{B_l}$. Dann haben wir

$$cf + g = \sum_k c a_k \mathbf{1}_{A_k} + \sum_l b_l \mathbf{1}_{B_l}$$

so dass $cf + g$ eine Elementarfunktion ist. Es folgt, dass

$$\int_M (cf + g)\, d\mu = \sum_k c a_k \mu(A_k) + \sum_l b_l \mu(B_l) = c \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.$$

(b) Wie im Beweis von dem Satz 2.5, stellen wir f und g in der Form (2.15) dar. Für jedes $x \in D_j$ haben wir wieder (2.17), und die Voraussetzung $f(x) \le g(x)$ ergibt $a'_j \le b'_j$. Daraus folgt, dass

$$\int_M f d\mu = \sum_j a'_j \mu(D_j) \le \sum_j b'_j \mu(D_j) = \int_M g d\mu,$$

was zu beweisen war. ∎

2.4 Integral von nichtnegativen Funktionen

Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum wie früher.

2.4.1 Definition von Lebesgue-Integral

Definition. Sei f eine nichtnegative Funktion auf M, d.h. $f : M \to [0, \infty]$. Das *Lebesgue-Integral* von f bezüglich des Maßes μ wird wie folgt definiert:

$$\int_M f d\mu := \sup \left\{ \int_M \varphi d\mu : \ \varphi \text{ ist eine Elementarfunktion und } \varphi \leq f \right\}. \tag{2.18}$$

Der Wert von $\int_M f d\mu$ liegt offensichtlich in $[0, \infty]$. Ist f eine Elementarfunktion, so stimmt die Definition (2.18) mit der obigen Definition (2.7) von dem Integral von Elementarfunktion überein, da in diesem Fall für alle Elementarfunktionen $\varphi \leq f$ nach Lemma 2.7 gilt

$$\int_M \varphi d\mu \leq \int_M f d\mu,$$

und die Gleichheit hier für $\varphi = f$ erfüllt ist.

Lemma 2.8 *Seien f, g zwei nichtnegative Funktionen auf M.*

(a) (positive Homogenität) *Für alle $c \in [0, \infty)$ gilt*

$$\int_M (cf)\, d\mu = c \int_M f d\mu \tag{2.19}$$

(b) (Monotonie) *Gilt $f \leq g$, so gilt auch*

$$\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu. \tag{2.20}$$

(c) *Es gilt*

$$\int_M (f + g)\, d\mu \geq \int_M f d\mu + \int_M g d\mu. \tag{2.21}$$

Beweis. (a) Im Fall $c = 0$ sind die beiden Seiten von (2.19) gleich 0. Im Fall $c > 0$ gilt die Bedingung $\varphi \leq f$ in (2.18) genau dann, wenn $c\varphi \leq cf$. Somit folgt (2.19) aus (2.18) und aus Lemma 2.7.

(b) Nach Definition (2.18) gibt es eine Folge $\{\varphi_k\}$ von Elementarfunktionen mit $\varphi_k \leq f$ und

$$\int_M \varphi_k d\mu \to \int_M f d\mu \ \text{ für } k \to \infty.$$

Es folgt, dass $g \geq \varphi_k$ und somit gilt nach Definition von Integral von g, dass

$$\int_M g d\mu \geq \int_M \varphi_k d\mu.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir (2.20).

(c) Betrachten wir wieder die Folge $\{\varphi_k\}$ we oberhalb und auch eine Folge $\{\psi_k\}$ von Elementarfunktionen mit $\psi_k \leq g$ und

$$\int_M \psi_k d\mu \to \int_M g d\mu \text{ für } k \to \infty.$$

Dann gilt $\varphi_k + \psi_k \leq f + g$ und somit nach dem Lemma 2.7(a)

$$\int_M (f+g)\,d\mu \geq \int_M (\varphi_k + \psi_k)\,d\mu = \int_M \varphi_k d\mu + \int_M \psi_k d\mu.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir (2.21). ■

Offensichtlich fehlt im Lemma 2.8 die Linearität:

$$\int_M (f+g)\,d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu, \tag{2.22}$$

stattdessen haben wir die Ungleichung (2.21) bewiesen. Bemerken wir, dass die $\mathcal{S}$-Messbarkeit von Funktionen noch nicht benutzt wurde. In der Tat gilt die Identität (2.22) für $\mathcal{S}$-messbare Funktionen f und g, aber der Beweis davon ist komplizierter und wird unterhalb im Satz 2.15 gegeben.

Jetzt besprechen wir die Beziehung zwischen den Lebesgue- und Riemann-Integralen. Im nächsten Satz betrachten wir das Maßraum $([a,b], \mathcal{M}, \lambda)$ mit reellen $a < b$.

Satz 2.9 *Sei $f \geq 0$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$. Dann stimmt das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]} f d\lambda$ mit dem Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ überein.*

Beweis. Sei $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a,b]$ d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Setzen wir

$$\alpha_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, \quad \beta_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

und betrachten die Darboux-Summen

$$U_Z(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_{k-1}), \quad O_Z(f) = \sum_{k=1}^n \beta_k (x_k - x_{k-1}).$$

Dann gilt für das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} U_Z(f) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} O_Z(f) \tag{2.23}$$

wobei $\varphi(Z) = \max_k (x_k - x_{k-1})$ die Feinheit von Z ist.

Betrachten wir die Elementarfunktionen

$$\Phi_Z = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{(x_{k-1},x_k)} \text{ und } \Psi_Z = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{[x_{k-1},x_k]}.$$

Für diese Funktionen gilt

$$\Phi_Z \leq f \leq \Psi_Z$$

und somit

$$\int_{[a,b]} \Phi_Z d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} \Psi_Z d\lambda.$$

Offensichtlich haben wir

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \Phi_Z d\lambda &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - x_{k-1}) = U_Z(f),\\ \int_{[a,b]} \Psi_Z d\lambda &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \lambda[x_{k-1}, x_k] = \sum_{k=1}^{n} \beta_k (x_k - x_{k-1}) = O_Z(f),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$U_Z(f) \le \int_{[a,b]} f d\lambda \le O_Z(f).$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ erhalten wir die Identität

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

■

2.4.2 Lemma von Fatou

Vor dem Beweis von dem Linearität (2.22) beweisen wir die wichtigen Eigenschaften von Integral bezüglich punktweiser Konvergenz.

Hauptsatz 2.10 (Lemma von Fatou I) *Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen auf M die gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Gilt für ein $C \ge 0$ und alle $k \ge 1$ die Ungleichung*

$$\int_M f_k\, d\mu \le C, \tag{2.24}$$

so gilt auch

$$\int_M f\, d\mu \le C. \tag{2.25}$$

Die Aussage gilt trivialerweise auch für $C = \infty$.

Man kann vermuten, dass unter bestimmten Bedingungen die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ auch die Konvergenz von Integralen ergibt:

$$\int_M f_k d\mu \to \int_M f d\mu. \tag{2.26}$$

Solche Behauptungen heißen *Konvergenzsätze*, und sie werden später ausführlich betrachtet werden. Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ allein ohne zusätzliche Bedingung impliziert (2.26) nicht, und man kann nur die obere Abschätzung (2.25) behaupten.

Beispiel. Betrachten auf $M = [0, 1]$ die Funktionen

$$f_k = k\mathbf{1}_{[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}]}$$

wobei $k = 2, 3, \ldots$. Offensichtlich gilt für das Lebesgue-Maß λ

$$\int_M f_k d\lambda = k\lambda[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}] = 1$$

und

$$f_k(x) \to f(x) \equiv 0 \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Somit haben wir

$$\int_M f d\mu = 0 < 1 = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k d\mu.$$

Lemma von Fatou ist der erste Schritt zu den Konvergenzsätzen.

Beweis von Satz 2.10. Die Funktion f ist offensichtlich nichtnegativ und $\mathcal{S}$-messbar nach dem Satz 2.3. Da

$$\int_M f d\mu = \sup\left\{\int_M \varphi d\mu : \varphi \le f\right\}$$

wobei φ eine beliebige Elementarfunktion ist, so müssen wir folgendes beweisen: für Elementarfunktionen φ gilt

$$\varphi \le f \text{ auf } M \;\Rightarrow \int_M \varphi d\mu \le C, \tag{2.27}$$

woraus (2.25) folgen wird. Es reicht folgendes zu beweisen:

$$\varphi < f \text{ auf } \{\varphi > 0\} \;\Rightarrow \int_M \varphi d\mu \le C \tag{2.28}$$

(bemerken wir, dass auf der Menge $\{\varphi = 0\}$ die Ungleichung $\varphi \le f$ trivialerweise gilt). In der Tat, ist (2.28) schon bekannt, so gilt für jede Elementarfunktion φ und jedes $\varepsilon \in (0,1)$ dass

$$\varphi \le f \quad \text{auf } M \;\Rightarrow (1-\varepsilon)\varphi < f \text{ auf} \{\varphi > 0\},$$

und somit nach (2.28)

$$\int_M (1-\varepsilon)\varphi d\mu \le C, \tag{2.29}$$

woraus (2.27) für $\varepsilon \to 0$ folgt.

12.11.21 Vorlesung 10

Beweisen wir jetzt die Aussage (2.28). Sei φ eine Elementarfunktion mit

$$f > \varphi \text{ auf der Menge } A := \{\varphi > 0\}.$$

Wir können annehmen, dass A nicht leer ist. Da φ Elementarfunktion ist, so nimmt φ nur endlich viele Werte, woraus folgt, dass $\max_A \varphi$ und $\min_A \varphi$ existieren und positiv sind, was später benutzt wird.

Gilt $f \ge \varphi$ auf A für ein n so gilt auch $f_n \ge \varphi$ auf M und somit nach Definition (2.18) von Lebesgue-Integral und nach der Voraussetzung (2.24) erhalten wir

$$\int_M \varphi d\mu \le \int_M f_n d\mu \le C,$$

was zu beweisen ist. Allerdings muss $f_n \ge \varphi$ auf A nicht gelten, aber wir zeigen unterhalb in (2.35), dass $f_n \ge \varphi$ auf einer Menge gilt die in bestimmten Sinn nah zu A ist.

Da $f(x) = \lim f_k(x)$ für alle $x \in M$, so erhalten wir

$$\forall x \in A \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) > \varphi(x).$$

Nach der Definition von lim gilt

$$\forall x \in A \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \forall k \geq n \ \ f_k(x) > \varphi(x). \tag{2.30}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in A : \forall k \geq n \ \ f_k(x) > \varphi(x)\} \\ &= A \cap \bigcap_{k\geq n} \{f_k - \varphi > 0\}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Es folgt aus (2.30) dass

$$\forall x \in A \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \text{sodass } x \in A_n$$

d.h.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.32}$$

Die Menge A_n ist $\mathcal{S}$-messbar als ein abzählbarer Schnitt von $\mathcal{S}$-messbaren Mengen $A = \{\varphi > 0\}$ und $\{f_k - \varphi > 0\}$, da die Funktionen φ und $f_k - \varphi$ $\mathcal{S}$-messbar ist. Die Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist offensichtlich monoton steigend. Es folgt aus (2.32) dass

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Wir werden unterhalb beweisen, dass

$$\boxed{\mu(A) < \infty}. \tag{2.33}$$

Ist (2.33) schon bekannt, dann erhalten wir

$$\mu(A - A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \to 0 \ \text{ für } n \to \infty. \tag{2.34}$$

Es folgt aus (2.31), dass

$$f_n > \varphi \ \text{ auf } A_n \tag{2.35}$$

und somit

$$f_n \geq \mathbf{1}_{A_n}\varphi \text{ auf } M. \tag{2.36}$$

Da

$$\varphi = \mathbf{1}_A\varphi = \mathbf{1}_{A_n}\varphi + \mathbf{1}_{A-A_n}\varphi$$

und $\mathbf{1}_E\varphi$ für alle $\mathcal{S}$-messbaren Mengen E eine Elementarfunktion ist, so erhalten wir nach Lemma 2.7, (2.36), (2.18), (2.24) dass

$$\begin{aligned} \int_M \varphi d\mu &= \int_M \mathbf{1}_{A_n}\varphi d\mu + \int_M \mathbf{1}_{A-A_n}\varphi d\mu \\ &\leq \int_M f_n d\mu + \int_M (\max\varphi)\,\mathbf{1}_{A-A_n} d\mu \\ &\leq C + (\max\varphi)\,\mu(A - A_n). \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir nach (2.34), dass

$$\int_M \varphi d\mu \leq C,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt noch (2.33) zu beweisen. Setzen wir

$$a := \min_A \varphi > 0.$$

Da $A_n \subset A$, so gilt $\varphi \geq a$ auf A_n und somit nach (2.36)

$$f_n \geq a\mathbf{1}_{A_n} \text{ auf } M,$$

woraus folgt

$$\int_M f_n d\mu \geq \int_M a\mathbf{1}_{A_n} d\mu = a\mu\left(A_n\right).$$

Diese Ungleichung zusammen mit (2.24) ergibt

$$\mu\left(A_n\right) \leq \frac{1}{a}\int_M f_n d\mu \leq \frac{C}{a},$$

woraus folgt

$$\mu\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) \leq \frac{C}{a} < \infty,$$

was zu beweisen war. ■

2.4.3 Konvergenzsätze

Hier beweisen wir, dass die punktweise Konvergenz einer Folge von messbaren Funktionen unter bestimmten Voraussetzungen die Konvergenz von den Integralen ergibt.

Satz 2.11 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen die gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Ist $\{f_n\}$ monoton steigend, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu = \int_M f d\mu. \tag{2.37}$$

Beweis. Setzen wir

$$C = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu,$$

wobei der Grenzwert existiert in $[0, +\infty]$ da die Folge $\left\{\int_M f_n \, d\mu\right\}$ monoton steigend ist. Es folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_M f_n d\mu \leq C.$$

Nach dem Satz 2.10 erhalten wir

$$\int_M f d\mu \leq C.$$

Andererseits, da $f \geq f_n$ so gilt nach Lemma 2.8

$$\int_M f d\mu \geq \int_M f_n d\mu,$$

woraus folgt für $n \to \infty$, dass

$$\int_M f\, d\mu \geq C.$$

Somit gilt die Identität

$$\int_M f d\mu = C,$$

was zu beweisen war. ∎

Satz 2.12 (Lemma von Fatou II) *Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen auf M. Dann gilt*

$$\int_M \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu. \tag{2.38}$$

Beweis. Nach der Definition von $\liminf$ haben wir

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

wobei

$$g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x) = \lim_{m\to\infty} \min\left(f_n(x), f_{n+1}(x), ..., f_m(x)\right).$$

Die Funktion g_n ist $\mathcal{S}$-messbar da g_n auf den Funktionen f_k mit Hilfe von Operationen min und lim erstellbar ist (siehe auch die Aufgabe 40). Die Folge $\{g_n\}$ ist offensichtlich monoton steigend und konvergiert punktweise gegen f. Nach dem Satz 2.11 erhalten wir

$$\int_M f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n d\mu.$$

Da $g_n \leq f_n$, so folgt es

$$\lim_{n\to\infty} \int_M g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu,$$

woraus (2.38) folgt. ∎

Satz 2.13 (Satz von der einseitigen Konvergenz) *Sei $\{f_n\}$ eine Folge von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen die gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Gilt für alle n dass $f_n \leq f$ auf M, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu = \int_M f d\mu. \tag{2.39}$$

Beweis. Nach dem Satz 2.12 gilt

$$\int_M f d\mu = \int_M (\lim f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu.$$

Andererseits, da $f \geq f_n$, so gilt

$$\int_M f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu.$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu = \int_M f d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu,$$

woraus auch (2.39) folgt. ∎

2.4.4 Positive Linearität von Integral

Für den Beweis von positiver Linearität (2.22) brauchen wir die folgende Aussage.

Lemma 2.14 *Für jede $\mathcal{S}$-messbare Funktion $f : M \to [0,\infty]$ gibt es eine Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen mit*

$$\varphi_n \leq f \quad \text{und} \quad \varphi_n \to f \quad \text{auf } M, \tag{2.40}$$

wobei die Konvergenz punktweise ist. Folglich gilt für jede solche Folge die Identität

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \varphi_n d\mu = \int_M f d\mu. \tag{2.41}$$

Beweis. Offensichtlich folgt (2.41) aus (2.40) nach dem Satz 2.13.

Um eine Folge $\{\varphi_n\}$ zu konstruieren, fixieren wir zunächst eine Folge $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen so dass $\frac{q_n}{n} \nearrow \infty$ für $n \to \infty$ (z.B. $q_n = n^2$). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen

$$A_k = \left\{x \in M : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}, \ k = 0, 1, ..., q_n - 1,$$

und

$$A_{q_n} = \left\{x \in M : f(x) \geq \frac{q_n}{n}\right\}.$$

Offensichtlich sind alle A_k $\mathcal{S}$-messbar und die Folge $\{A_k\}_{k=0}^{q_n}$ ist eine Zerlegung von M. Betrachten wir die Elementarfunktion

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{q_n} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{A_k}, \tag{2.42}$$

d.h.

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \text{falls } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \text{ mit } 0 \leq k \leq q_n - 1, \\ \frac{q_n}{n}, & \text{falls } f(x) \geq \frac{q_n}{n}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Beweisen wir jetzt (2.40) d.h. für jedes $x \in M$ gilt

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x). \tag{2.44}$$

Die Ungleichung $\varphi_n(x) \leq f(x)$ ist klar aus (2.43). Für den Beweis von den Grenzwert in (2.44) betrachten wir zwei Fälle.

1. Gilt $f(x) < \infty$, so gilt $f(x) < \frac{q_n}{n}$ für alle große n. Für solche n gilt $\frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}$ für ein $k < q_n$ und somit auch $\varphi_n(x) = \frac{k}{n}$, woraus folgt

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$

und somit $\varphi_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$.

2. Gilt $f(x) = \infty$, so gilt $f(x) > \frac{q_n}{n}$ und somit $\varphi_n(x) = \frac{q_n}{n}$ für alle n, woraus folgt $\varphi_n(x) \to \infty = f(x)$ für $n \to \infty$. ■

Im Fall wenn f endlich ist (d.h. $f : M \to [0, \infty)$) sieht man aus dem Beweis dass man in der Definition (2.42) von φ_n auf A_{q_n} verzichten kann, d.h. in diesem Fall nehmen wir an

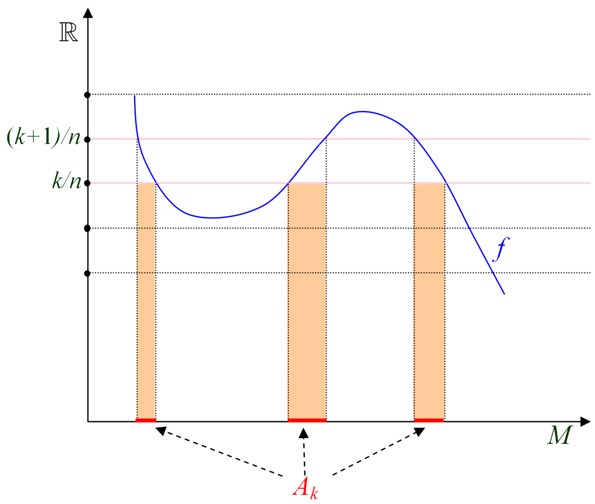
$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{A_k}.$$

Es gilt dann

$$\int_M \varphi_n d\mu = \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{k}{n} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{k}{n} \mu\left\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right\},$$

und es folgt aus (2.41), dass

$$\int_M f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{k}{n} \mu\left\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right\}. \tag{2.45}$$



Die Menge $A_k = \left\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right\}$

Die Identität (2.45) kann man als eine alternative Definition von dem Lebesgue-Integral betrachten. Die Summe in der rechten Seite von (2.45) heißt die *Lebesgue-Summe*. Der Vergleich mit dem Riemann-Integral zeigt folgendes: für Riemann-Summen benutzt man eine Zerlegung der Axe x in kleinen Intervallen während für die Lebesgue-Summen eine Zerlegung der Axe y verwendet wird.

Jetzt können wir die positive Linearität des Integrals für $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen beweisen.

Satz 2.15 *Für nichtnegative $\mathcal{S}$-messbare Funktionen f, g auf M gilt*

$$\int_M (f+g)\, d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.$$

Beweis. Nach dem Lemma 2.14 existieren zwei Folgen $\{\varphi_n\}$ und $\{\psi_n\}$ von Elementarfunktionen mit

$$\varphi_n \leq f, \quad \varphi_n \to f$$

und

$$\psi_n \leq g, \quad \psi_n \to g.$$

Dann $\{\varphi_n + \psi_n\}$ ist auch eine Folge von Elementarfunktionen, und zwar mit

$$\varphi_n + \psi_n \leq f + g, \quad \varphi_n + \psi_n \to f + g.$$

Nach dem Satz 2.13 und Lemma 2.7 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_M (f+g)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_M (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_M \varphi_n d\mu + \int_M \psi_n d\mu \right) \\
&= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.
\end{aligned}$$

■

Es folgt aus den Satz 2.15 dass das Integral mit endlichen Summen vertauschbar ist: für eine endliche folgt $\{f_k\}_{k=1}^n$ von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen gilt

$$\int_M \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_M f_k d\mu. \tag{2.46}$$

Korollar 2.16 *Für eine beliebige Folge $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen auf M gilt*

$$\int_M \left(\sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_M f_k\, d\mu. \tag{2.47}$$

Beweis. Betrachten wir die Funktionen

$$g_n = f_1 + \ldots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

Dann ist $\{g_n\}$ eine monoton steigende Folge von nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen. Nach dem Satz 2.11 von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int_M \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n d\mu. \tag{2.48}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

und nach (2.46) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_M g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_M f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k d\mu,$$

so folgt (2.47) aus (2.48). ■

17.11.21 **Vorlesung 11**

2.5 Lebesgue-integrierbare Funktionen

Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.

Jetzt definieren wir das Lebesgue-Integral von signierten Funktionen. Für jede Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir Funktionen f_+ und f_- wie folgt:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Die Funktion f_+ heißt der *positive Teil* von f und f_- heißt der *negative Tail* von f. Die beiden Funktionen f_+ und f_- sind nichtnegativ und erfüllen die Identitäten

$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-,$$

woraus folgen

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} \text{ und } f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Ist f $\mathcal{S}$-messbar, so ist auch $|f|$ $\mathcal{S}$-messbar da $|f| = \Phi(f)$ mit der Borel-Funktion $\Phi(t) = |t|$. Daraus folgt, dass auch f_+, f_- $\mathcal{S}$-messbar sind, da f_+, f_- die linearen Kombinationen von f und $|f|$ sind.

Da die Funktionen $|f|, f_+, f_-$ $\mathcal{S}$-messbar und nichtnegativ sind, so sind ihre Lebesgue-Integrale definiert und es gilt

$$\int_M |f| \, d\mu = \int_M f_+ d\mu + \int_M f_- d\mu. \tag{2.49}$$

Definition. Eine Funktion $f : M \to [-\infty, +\infty]$ heißt *Lebesgue-integrierbar* bezüglich μ (oder *μ-integrierbar*) wenn f $\mathcal{S}$-messbar ist und

$$\int_M |f| \, d\mu < \infty. \tag{2.50}$$

Nach (2.49) ist die Bedingung (2.50) äquivalent zu

$$\int_M f_+ d\mu < \infty \text{ und } \int_M f_- d\mu < \infty. \tag{2.51}$$

Somit ist die Integrierbarkeit von f äquivalent zu (2.51).

Definition. Für jede μ- integrierbare Funktion f definieren wir ihres Lebesgue-Integral mit

$$\boxed{\int_M f d\mu := \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu.} \tag{2.52}$$

Der Wert von $\int_M f d\mu$ ist somit eine reelle Zahl.

Ist f nichtnegativ und $\mathcal{S}$-messbar, so ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M f d\mu < \infty.$$

Da in diesem Fall $f_+ = f$, $f_- = 0$, so stimmt die Definition (2.52) mit der vorhandenen Definition des Integrals überein.

Beispiel. Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Dann ist f messbar bezüglich der Borel-σ-Algebra. Beweisen wir, dass f Lebesgue-integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes $\mu = \lambda$ auf $[a, b]$ ist. Da die Funktionen f_+ und f_- nichtnegativ und stetig sind, so stimmen ihre Lebesgue- und Riemann-Integrale überein. Die Bedingungen (2.51) sind somit erfüllt und f ist λ-integrierbar. Darüber hinaus gilt die Identität

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_{[a,b]} f_+ \, d\lambda - \int_{[a,b]} f_- \, d\lambda = \int_a^b f_+ (x) \, dx - \int_a^b f_- (x) \, dx = \int_a^b f (x) \, dx$$

so dass die Lebesgue- und Riemann-Integrale von f übereinstimmen. Später beweisen wir, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist.

Satz 2.17 *Seien f und g zwei μ-integrierbare Funktionen auf M.*

(a) *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist auch cf μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_M cf d\mu = c \int_M f d\mu. \tag{2.53}$$

(b) *Sind f und g endlich so ist $f + g$ auch μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_M (f + g) \, d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu. \tag{2.54}$$

(c) *Gilt $f \leq g$ auf M so gilt auch*

$$\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu.$$

Beweis. (a) Die Funktion cf ist integrierbar da

$$\int_M |cf|\, d\mu = |c| \int_M |f|\, d\mu < \infty.$$

Beweisen wir (2.53). Für $c = 0$ sind die beiden Seiten gleich 0. Für $c > 0$ gelten

$$(cf)_+ = cf_+ \text{ und } (cf)_- = cf_-,$$

und nach dem Lemma 2.8

$$\int_M cf d\mu = \int_M cf_+ d\mu - \int_M cf_- d\mu = c \int_M f_+ d\mu - c \int_M f_- d\mu = c \int_M f d\mu.$$

Für $c = -1$ gelten

$$(-f)_+ = f_- \text{ und } (-f)_- = f_+$$

woraus folgt

$$\int_M (-f)\, d\mu = \int_M f_- d\mu - \int_M f_+ d\mu = - \int_M f d\mu.$$

Für beliebiges $c < 0$ erhalten wir

$$\int_M cf d\mu = \int_M (-|c|\, f)\, d\mu = -\int_M |c|\, f d\mu = -|c| \int_M f d\mu = c \int_M f d\mu.$$

(b) Nach der Dreiecksungleichung

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

erhalten wir

$$\int_M |f + g|\, d\mu \leq \int_M |f|\, d\mu + \int_M |g|\, d\mu < \infty,$$

so dass $f + g$ integrierbar ist.

Für den Beweis von (2.54) bemerken wir zunächst, dass $(f + g)_+$ nicht unbedingt gleich $f_+ + g_+$ ist, so dass das Argument aus (a) in diesem Fall nicht funktioniert. Wir haben

$$f_+ + g_+ - (f_- + g_-) = f + g = (f + g)_+ - (f + g)_-$$

und somit

$$f_+ + g_+ + (f + g)_- = (f + g)_+ + f_- + g_-.$$

Alle Funktionen here sind $\mathcal{S}$-messbar und nichtnegativ, und nach dem Satz 2.15 gilt

$$\int_M f_+ d\mu + \int_M g_+ d\mu + \int_M (f + g)_-\, d\mu = \int_M (f + g)_+\, d\mu + \int_M f_- d\mu + \int_M g_- d\mu.$$

Es folgt daraus, da

$$\begin{aligned} \int_M (f + g)\, d\mu &= \int_M (f + g)_+\, d\mu - \int_M (f + g)_-\, d\mu \\ &= \int_M f_+ d\mu + \int_M g_+ d\mu - \int_M f_- d\mu - \int_M g_- d\mu \end{aligned}$$

$$= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.$$

(c) Es folgt aus der Identität $g = (g - f) + f$ und aus $g - f \geq 0$, dass

$$\int_M g\, d\mu = \int_M (g - f)\; d\mu + \int_M f\, d\mu \geq \int_M f\, d\mu.$$

■

Bemerkung. Somit haben wir den Begriff von Lebesgue-Integral $\int_M f d\mu$ für zwei Klassen von Funktionen f definiert:

1. für nichtnegative $\mathcal{S}$-messbare Funktionen $f : M \to [0, \infty]$ so dass $\int_M f d\mu \in [0, \infty]$;

2. für μ-integrierbare Funktionen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$, so dass $\int_M f d\mu \in \mathbb{R}$.

Es gibt noch eine allgemeinere Klasse von $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ wenn $\int_M f d\mu$ definiert ist: wenn

$$\int_M f_+ d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int_M f_- d\mu < \infty \tag{2.55}$$

so definieren wir

$$\int_M f d\mu := \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Die Bedingung (2.55) ist in den beiden Fällen 1 und 2 erfüllt: im Fall 1 gilt $f_- = 0$, und im Fall 2 sind die beiden Integrale in (2.55) endlich.

Bemerkung. Gilt $\mu(M) = 1$ so heißt μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*. Der Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ heißt in diesem Fall ein *Wahrscheinlichkeitsraum*. Die Teilmengen $A \in \mathcal{S}$ heißen *Ereignisse* und $\mu(A)$ heißt die *Wahrscheinlichkeit* von A und wird auch mit $\mathbb{P}(A)$ bezeichnet. Jede $\mathcal{S}$-messbare Funktion f auf M heißt *Zufallsvariable*. Das Integral $\int_M f d\mu$ heißt der *Erwartungswert* der Zufallsvariable f und wird auch mit $\mathbb{E}(f)$ bezeichnet.

2.6 Integration über Teilmengen

Seien $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und A eine nichtleere $\mathcal{S}$-messbare Teilmenge von M. Betrachten wir in A eine σ-Algebra

$$\mathcal{S}_A = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(A) = \{B \subset A : B \in \mathcal{S}\},$$

und die Restriktion $\mu_A = \mu|_{\mathcal{S}_A}$ von Maß μ auf $\mathcal{S}_A$, so dass $(A, \mathcal{S}_A, \mu_A)$ auch ein Maßraum ist. Somit ist der Begriff von Lebesgue-Integral über A bezüglich des Maßes μ_A definiert. Ist f eine nichtnegative Funktion auf M, so definieren wir das Integral von f über A bezüglich μ mit

$$\int_A f\, d\mu := \int_A f|_A\, d\mu_A.$$

Lemma 2.18 *Sei f eine nichtnegative $\mathcal{S}$-messbare Funktion auf M. Dann gilt die Identität*

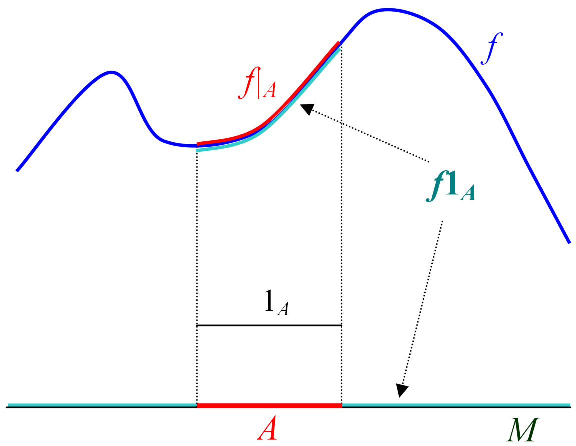
$$\int_A f\, d\mu = \int_M f \mathbf{1}_A\, d\mu. \tag{2.56}$$

Bemerkung. Im Fall $A = \emptyset$ ist die rechte Seite von (2.56) gleich 0 so dass die linke Seite auch als 0 definiert wird, d.h.

$$\int_\emptyset f d\mu := 0.$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass

$$\int_A f|_A\, d\mu_A = \int_M f \mathbf{1}_A\, d\mu.$$



Funktionen f, $f\mathbf{1}_A$ und $f|_A$

Setzen wir $g := f\mathbf{1}_A$ und bemerken, dass g $\mathcal{S}$-messbar ist und $f|_A = g|_A$. Somit reicht es zu beweisen, dass

$$\int_A g|_A\, d\mu_A = \int_M g\, d\mu, \tag{2.57}$$

vorausgesetzt, dass

$$g = 0 \text{ auf } A^c.$$

Sei zunächst g eine Elementarfunktion, d.h.

$$g = \sum_k b_k \mathbf{1}_{B_k} \tag{2.58}$$

mit $b_k \in [0, \infty)$ und $B_k \in \mathcal{S}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Mengen B_k disjunkt sind und alle b_k positiv sind (Lemma 2.6). Dann gilt $g > 0$ auf B_k, woraus folgt $B_k \subset A$. Somit stellt die Identität (2.58) eine Elementarfunktion auch im Maßraum $(A, \mathcal{S}_A, \mu_A)$ dar, woraus folgt, dass

$$\int_A g|_A\, d\mu_A = \sum_k b_k \mu_A (B_k) = \sum_k b_k \mu (B_k) = \int_M g\, d\mu.$$

Sei jetzt g eine beliebige nichtnegative $\mathcal{S}$-messbare Funktion mit $g = 0$ auf A^c. Sei $\{\varphi_k\}$ eine Folge von Elementarfunktionen auf M mit

$$\varphi_k \leq g \text{ und } \varphi_k \to g \text{ für } k \to \infty,$$

die nach Lemma 2.14 existiert. Dann gilt $\varphi_k = 0$ auf A^c, so dass φ_k eine Elementarfunktion auch im Maßraum $(A, \mathcal{S}_A, \mu_A)$ ist, und nach dem ersten Teil von dem Beweis erhalten wir

$$\int_A \varphi_k|_A \, d\mu_A = \int_M \varphi_k d\mu.$$

Die Folge $\{\varphi_k|_A\}$ konvergiert gegen $g|_A$ punktweise und ist von $g|_A$ beschränkt. Somit erhalten wir nach dem Satz 2.13 dass

$$\int_A g|_A \, d\mu_A = \lim_{k\to\infty} \int_A \varphi_k|_A \, d\mu_A = \lim_{k\to\infty} \int_M \varphi_k d\mu = \int_M g \, d\mu.$$

■

Beispiel. Sei $M = (a, b)$ mit $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$. Sei $\mu = \lambda$. Sei f eine nichtnegative messbare Funktion auf M. Betrachten wir eine streng monoton fallende Folge $\{a_n\}$ und eine streng monoton steigende Folge $\{b_n\}$ mit

$$a_n \searrow a \text{ und } b_n \nearrow b.$$

Die Folge

$$f_n = \mathbf{1}_{[a_n, b_n]} f$$

ist monoton steigend und konvergiert punktweise gegen f, woraus folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.11) und Lemma 2.18 dass

$$\int_{(a,b)} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b)} \mathbf{1}_{[a_n, b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n, b_n]} f d\lambda.$$

Sei die Funktion f stetig auf (a, b). Wir wissen schon, dass

$$\int_{[a_n, b_n]} f d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx,$$

woraus folgt

$$\int_{(a,b)} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx,$$

wobei das letzte Integral das uneigentliche Riemann-Integral ist. Somit stimmen das Lebesgue-Integral und das uneigentliche Riemann-Integral überein.

Satz 2.19 *Sei f eine nichtnegative $\mathcal{S}$-messbare Funktion auf M. Definieren wir die Funktion $\nu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ mit*

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu. \tag{2.59}$$

Dann ist ν ein Maß auf $\mathcal{S}$.

Beispiel. Jede nichtnegative stetige Funktion f auf dem Intervall $(0,1)$ bestimmt ein neues Maß ν in $(0,1)$ mit Hilfe von (2.59) mit $\mu = \lambda$. Zum Beispiel, für die Funktion $f = \frac{1}{x}$ gilt es für jedes Intervall $[a,b] \subset (0,1)$, dass

$$\nu([a,b]) = \int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln\frac{b}{a}.$$

Beweis. Es gilt $\nu(\emptyset) = 0$ nach Definition. Beweisen wir, dass ν σ-additiv ist, d.h. für jede disjunkte Folge $\{A_n\}$ von messbaren Mengen und für

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{2.60}$$

gilt

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\mu. \tag{2.61}$$

Nach Lemma 2.18 ist (2.61) äquivalent zu

$$\int_M \mathbf{1}_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_M \mathbf{1}_{A_n} f d\mu. \tag{2.62}$$

Die Bedingung (2.60) ergibt

$$\mathbf{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n}. \tag{2.63}$$

In der Tat, für jedes $x \in A$ gilt $x \in A_n$ für genau ein $n \in \mathbb{N}$ so dass die beiden Seiten von (2.63) gleich 1 sind. Im Fall $x \notin A$ sind die beiden Seiten von (2.63) gleich 0. Es folgt aus (2.63), dass

$$\mathbf{1}_A f = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n} f,$$

wobei die Reihe punktweise konvergiert, und nach dem Korollar 2.16 erhalten wir (2.62).
■

19.11.21 Vorlesung 12

Jetzt betrachten wir Integration über Teilmengen von integrierbaren (signierten) Funktionen.

Satz 2.20 *Sei f eine μ-integrierbare Funktion auf M.*

(a) *Sei $A \in \mathcal{S}$ eine nichtleere Menge. Dann die Funktion $f|_A$ ist μ_A-integrierbar und es gilt*

$$\int_A f|_A d\mu_A = \int_M \mathbf{1}_A f\,d\mu. \tag{2.64}$$

Bemerkung. Wir setzen

$$\int_A f\,d\mu := \int_A f|_A d\mu_A$$

für nichtleere Menge A und $\int_A f d\mu = 0$ für $A = \emptyset$.

(*b*) *Definieren wir die Funktion* $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu.$$

Dann ist ν σ*-additiv.*

Da $\nu(\emptyset) = 0$ und ν σ-additiv ist, so ist ν ein *signiertes Maß*.

Beweis. (*a*) Die Funktion $f|_A$ ist μ_A-integrierbar, da nach dem Lemma 2.18

$$\int_A |(f|_A)|\, d\mu_A = \int_A (|f|)\,|_A d\mu_A = \int_M \mathbf{1}_A\, |f|\, d\mu \le \int_M |f|\, d\mu < \infty.$$

Wieder mit Hilfe von dem Lemma 2.18 erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_A f|_A d\mu_A &= \int_A (f|_A)_+\, d\mu_A - \int_A (f|_A)_-\, d\mu_A \\ &= \int_M \mathbf{1}_A f_+ d\mu - \int_M \mathbf{1}_A f_- d\mu \\ &= \int_M \mathbf{1}_A f\, d\mu. \end{aligned}$$

(*b*) Die beiden Funktion f_+, f_- sind nichtnegativ und μ-integrierbar. Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge von messbaren Mengen. Für die Vereinigung

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

erhalten wir nach dem Satz 2.19

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A f\, d\mu = \int_A f_+\, d\mu - \int_A f_-\, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_+\, d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_- d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f_+\, d\mu - \int_{A_n} f_-\, d\mu \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

2.7 Der Begriff "fast überall"

Definition. Sei $E = E(x)$ eine Aussage, die von $x \in M$ abhängt. Man sagt, dass E μ*-fast überall* gilt (kurz: μ-f.ü. oder f.ü.), wenn die Menge

$$N = \{x \in M : E(x) \text{ ist falsch}\}$$

eine Nullmenge ist.

Z.B. seien f, g two Funktionen $M \to [-\infty, +\infty]$. Man sagt, dass f und g gleich f.ü. sind und schreibt

$$f = g \text{ f.ü.},$$

wenn die Gleichheit $f = g$ fast überall gilt, d.h. die Menge $\{x \in M : f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

gilt $f = 0$ f.ü. da die Menge $\{x : f(x) \neq 0\}$ abzählbar und somit eine Nullmenge ist.

Lemma 2.21 *(a) Seien E und F zwei von x abhängige Aussagen. Gelten E* f.ü. *und $E \Rightarrow F$, so gilt auch F* f.ü.*, d.h.*

$$(E \text{ f.ü.}) \wedge (E \Rightarrow F) \quad \Rightarrow \quad F \text{ f.ü.}$$

(b) Sei $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Aussagen, so dass jede E_k f.ü. *gilt. Dann auch die Aussage*

$$E = \{\textit{alle } E_k \textit{ sind erfüllt}\}$$

gilt f.ü.. *d.h.*

$$\forall k \quad E_k \text{ f.ü.} \ \Rightarrow \ \bigwedge_{k=1}^{\infty} E_k \text{ f.ü.}$$

Beweis. Für jede Aussage E setzen wir

$$N_E = \{x \in M : E(x) \text{ ist falsch}\},$$

so dass

$$N_E^c = \{x \in M : \ E(x) \text{ ist richtig}\}$$

(a) Die Implikation $E \Rightarrow F$ ergibt $N_E^c \subset N_F^c$, woraus folgt $N_F \subset N_E$. Da N_E eine Nullmenge ist, so ist auch N_F eine Nullmenge (Lemma 1.23).

(b) Wir haben

$$N_E^c = \bigcap_k N_{E_k}^c = \left(\bigcup_k N_{E_k}\right)^c,$$

woraus folgt

$$N_E = \bigcup_k N_{E_k}.$$

Da alle N_{E_k} Nullmengen sind, so ist ihre Vereinigung N_E auch eine Nullmenge (Lemma 1.23). ■

Die nächsten Aussagen erklären die Beziehung zwischen Integration und dem Begriff f.ü..

Satz 2.22 (*a*) *Für jede nichtnegative messbare Funktion f gilt die Äquivalenz*

$$\int_M f d\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0 \text{ f.ü.}$$

(*b*) *Jede μ-integrierbare Funktion $f : M \to [-\infty, +\infty]$ ist endlich* f.ü. *d.h.*

$$\int_M |f| \, d\mu < \infty \Rightarrow \; |f| < \infty \text{ f.ü.}$$

Beweis. (*a*) Beweisen wir zunächst die Implikation "$\Leftarrow$", d.h.

$$f = 0 \text{ f.ü.} \Rightarrow \int_M f d\mu = 0.$$

Nach Definition gilt

$$\int_M f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ ist eine Elementarfunktion und } \varphi \le f. \right\}$$

In der Darstellung

$$\varphi = \sum_k a_k \mathbf{1}_{A_k}$$

der Elementarfunktion φ können wir annehmen, dass $a_k > 0$ für alle k. Da $0 \le \varphi \le f$ so erhalten die Implikation

$$f = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0.$$

Da $f = 0$ f.ü., so erhalten wir nach dem Lemma 2.21 dass

$$\varphi = 0 \;\text{ f.ü.}.$$

Da $\varphi > 0$ auf A_k, so folgt es, dass A_k eine Nullmenge ist, d.h. $\mu(A_k) = 0$ für alle k. Somit erhalten wir

$$\int_M \varphi d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k) = 0,$$

woraus folgt $\int_M f d\mu = 0$.

Beweisen wir jetzt die Implikation "$\Rightarrow$", d.h.

$$\int_M f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ f.ü.}.$$

Wir müssen beweisen, dass die Menge

$$B := \{x \in M : f(x) > 0\}$$

eine Nullmenge ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$B_k := \left\{ x \in M : f(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

und bemerken, dass $\{B_k\}$ eine monoton steigende Folge ist und

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \lim B_k.$$

Da B_k und B messbar sind, so folgt es, dass

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(B). \tag{2.65}$$

Betrachten wir für ein k die Elementarfunktion

$$\varphi = \frac{1}{k}\mathbf{1}_{B_k}.$$

Offensichtlich gilt $\varphi \le f$ auf M, woraus folgt

$$\int_M f d\mu \ge \int_M \varphi d\mu = \frac{1}{k}\mu(B_k),$$

und somit $\mu(B_k) = 0$. Aus (2.65) erhalten wir $\mu(B) = 0$.

(b) Es reicht diese Aussage für nichtnegative f zu beweisen. Betrachten wir die Menge

$$A = \{x \in M : f(x) = +\infty\}$$

die offensichtlich $\mathcal{S}$-messbar ist und beweisen, dass $\mu(A) = 0$. Dafür betrachten wir die Elementarfunktion

$$\varphi = k\mathbf{1}_A$$

mit einem $k \in \mathbb{N}$. Da $\varphi \le f$, so folgt es

$$\int_M f d\mu \ge \int_M \varphi d\mu = k\mu(A)$$

und somit

$$\mu(A) \le \frac{1}{k}\int_M f d\mu.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir $\mu(A) = 0$, was zu beweisen war. ■

Satz 2.23 (a) *Seien $f : M \to [0, +\infty]$ und $g : M \to [0, +\infty]$ zwei $\mathcal{S}$-messbare Funktionen. Gilt $f = g$ f.ü. so gilt die Identität*

$$\int_M f d\mu = \int_M g d\mu. \tag{2.66}$$

(b) *Sei $f : M \to [-\infty, +\infty]$ eine μ-integrierbare Funktion und $g : M \to [-\infty, +\infty]$ eine $\mathcal{S}$-messbare Funktion. Gilt $f = g$ f.ü. so ist g auch μ-integrierbar und es gilt (2.54).*

Beweis. (a) Die Menge

$$\{x \in M : f(x) \ne g(x)\}$$

ist eine Nullmenge und somit ist eine Teilmenge einer Menge $N \in \mathcal{S}$ von Maß 0 (Satz 1.24). Somit erhalten wir für alle $x \in M$

$$f(x) \le g(x) + h(x)$$

wobei

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin N \\ +\infty, & x \in N \end{cases}$$

Nach Lemma 2.8 und Satz 2.15 erhalten wir

$$\int_M f d\mu \leq \int_M (g+h)\, d\mu = \int_M g d\mu + \int_M h d\mu = \int_M g d\mu.$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt analog, woraus die Identität (2.66) folgt.

(b) Die Bedingung $f = g$ f.ü. impliziert dass auch $|f| = |g|$ f.ü. so dass nach (a)

$$\int_M |g|\, d\mu = \int_M |f|\, d\mu < \infty$$

und somit g μ-integrierbar ist. Wir haben auch $f_+ = g_+$ f.ü. und $f_- = g_-$ f.ü. und somit nach (a)

$$\int_M f_+ d\mu = \int_M g_+ d\mu \quad \text{und} \quad \int_M f_- d\mu = \int_M g_- d\mu,$$

woraus die Identität (2.66) folgt. ■

Korollar 2.24 *Seien f und g μ-integrierbar. Ist $f+g$ wohldefiniert, so ist $f+g$ auch μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_M (f+g)\, d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.$$

Beweis. Für jede μ-integrierbare Funktion f auch M betrachten wir die Funktion

$$\widetilde{f} = f \mathbf{1}_{\{|f|<\infty\}}.$$

Da die Menge $\{|f| < \infty\}$ offensichtlich $\mathcal{S}$-messbar ist, so ist die Funktion $\widetilde{f}$ $\mathcal{S}$-messbar. Nach dem Satz 2.22 gilt $|f| < \infty$ f.ü., woraus folgt dass

$$f = \widetilde{f} \text{ f.ü.}$$

Nach den Satz 2.23 erhalten wir, dass $\widetilde{f}$ auch μ-integrierbar ist und

$$\int_M f d\mu = \int_M \widetilde{f} d\mu.$$

Die gleiche Aussage gilt für die Funktionen g und $\widetilde{g} = g \mathbf{1}_{\{|g|<\infty\}}$. Da $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ endlich sind, so erhalten wir nach den Satz 2.17 dass $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ μ-integrierbar ist und

$$\int_M \left(\widetilde{f} + \widetilde{g}\right) d\mu = \int_M \widetilde{f} d\mu + \int_M \widetilde{g} d\mu.$$

Da $f + g = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ f.ü., so ist auch $f+g$ μ-integrierbar und es gilt

$$\int_M (f+g)\, d\mu = \int_M \left(\widetilde{f} + \widetilde{g}\right) d\mu = \int_M \widetilde{f} d\mu + \int_M \widetilde{g} d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu,$$

was zu beweisen war. ■

2.8 Satz von der majorisierten Konvergenz

Sei (M, S, μ) ein Maßraum.

Definition. (*Konvergenz* f.ü.) Eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf M konvergiert gegen eine Funktion f auf M *fast überall* wenn die Bedingung $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle x erfüllt ist, d.h. außerhalb einer Nullmenge. Schreibweise:

$$f_n \to f \;\; \text{f.ü.}$$

Hauptsatz 2.25 (Satz von der majorisierten/dominanten Konvergenz) *Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{S}$-messbaren Funktion auf M mit*

$$f_n \to f \;\; \text{f.ü.}\,,$$

wobei f auch eine $\mathcal{S}$-messbare Funktion ist. Nehmen wir an, dass es eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion g gibt so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n| \le g \;\; \text{f.ü.}\,. \tag{2.67}$$

Dann sind f_n und f auch μ-integrierbar und

$$\int_M f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu. \tag{2.68}$$

Die Identität (2.68) lässt such wie folgt umschreiben:

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu,$$

so dass für die Folge $\{f_n\}$ die Operationen lim und $\int$ vertauschbar sind. Eine Funktion g, die (2.67) für alle n erfüllt, heißt die *Majorante* (oder *Dominante*) der Folge $\{f_n\}$. Man kann den Satz 2.25 wie folgt kurz umformulieren: $\int$ und lim sind auf $\{f_n\}$ vertauschbar, wenn die Folge $\{f_n\}$ eine *integrierbare Majorante* hat.

Beweis. Da jede von den Aussagen $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ fast überall gilt, so erhalten wir nach dem Lemma 2.21, dass die Aussage

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{und} \quad |f_n(x)| \le g(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{2.69}$$

auch fast überall gilt. Somit existiert eine Nullmenge N, so dass (2.69) für alle $x \in N^c$ erfüllt ist. Nach dem Satz 1.24 können wir annehmen, dass N eine Menge von Maß 0 ist, d.h. messbar.

Betrachten wir die Funktionen $\mathbf{1}_{N^c} f_n$ und $\mathbf{1}_{N^c} f$, die offensichtlich messbar sind und die folgenden Bedingungen für *alle* $x \in M$ erfüllen:

$$\mathbf{1}_{N^c} f_n(x) \to \mathbf{1}_{N^c} f(x) \quad \text{und} \quad |\mathbf{1}_{N^c} f_n(x)| \le g(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir benennen $\mathbf{1}_{N^c} f_n$ in f_n und $\mathbf{1}_{N^c} f$ in f um, so dass die Bedingungen (2.69) für *alle* $x \in M$ gelten. Die Integrierbarkeit und die Werte von Integralen von f_n und f ändern sich nach dem Satz 2.23 nicht, da die neuen Funktionen f_n und f von den alten Funktionen auf einer Nullmenge abweichend sind.

Angenommen, dass (2.69) für alle $x \in M$ gilt, es folgt, dass $|f| \leq g$ und somit

$$\int_M |f| \, d\mu \leq \int_M g d\mu < \infty$$

so dass f integrierbar ist. Genauso sind alle f_n integrierbar.

24.11.21 Vorlesung 13

Jetzt beweisen wir (2.68). Betrachten wir die Funktionen

$$h_n = f_n + g \quad \text{und} \quad h = f + g$$

die nichtnegativ und messbar sind. Da offensichtlich $h_n \to h$ punktweise, so erhalten wir nach dem Lemma von Fatou, dass

$$\int_M h d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M h_n d\mu$$

d.h.

$$\begin{aligned} \int_M (f+g) \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_M f_n d\mu + \int_M g d\mu \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu + \int_M g d\mu, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\int_M f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu. \tag{2.70}$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, verwenden wir das gleiche Argument für die Funktionen

$$h_n = g - f_n \quad \text{und} \quad h = g - f.$$

Da h_n nichtnegativ und messbar sind und $h_n \to h$ punktweise, so erhalten wir nach dem Lemma von Fatou, dass

$$\int_M h d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M h_n d\mu$$

d.h.

$$\begin{aligned} \int_M (g-f) \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_M g d\mu - \int_M f_n d\mu \right) \\ &= \int_M g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu \leq \int_M f d\mu. \tag{2.71}$$

Vergleichen von (2.70) und (2.71) ergibt (2.68). ■

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Dafür benutzen wir, dass für jedes $a \geq 0$ die Folge

$$\left\{ \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

monoton steigend ist und gegen e^a für $n \to \infty$ konvergiert. Es folgt, dass

$$e^{-x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

wobei

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

Die Folge $\{f_n\}$ ist positiv und monoton fallend und somit hat die Majorante $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, die auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist, da

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 2.25) erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \, dx.$$

Mit der Substitution $y = x/\sqrt{n}$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Setzen wir

$$a_n := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

und verwenden die partielle Integration:

$$a_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} y d\frac{1}{(1+y^2)^n} = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^{n+1}} = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{((1+y^2)-1) \, dy}{(1+y^2)^{n+1}} = 2n \left(a_n - a_{n+1}\right),$$

woraus folgt

$$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a_n. \tag{2.72}$$

Da

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi,$$

so erhalten wir nach (2.72) per Induktion

$$a_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad a_3 = \frac{3}{4} a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\pi, \ldots$$

und

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n} \pi.$$

Daraus folgt

$$a_{n+1} = \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n)^2} \pi = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi$$

Nach der Stirling-Formel[2]

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \text{ für } k \to \infty$$

erhalten wir für $n \to \infty$

$$a_n \sim a_{n+1} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \pi = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \pi = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{n}} = \sqrt{\pi}$$

und somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{2.73}$$

2.9 Parameter-abhängige Integrale

Wir geben hier eine Anwendungen von dem Satz von der majorisierten Konvergenz zu den Parameter-abhängigen Integralen an. Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ wie zuvor ein Maßraum. Betrachten wir eine Funktion $f : M \times I \to \mathbb{R}$ wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist. Die Elementen von $M \times I$ bezeichnen wir mit (x, t) wobei $x \in M$ und $t \in I$. Definieren wir die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \int_M f(x,t)\ d\mu(x), \tag{2.74}$$

wobei der Ausdruck $d\mu(x)$ bedeutet, dass der Integrand als eine Funktion von x betrachtet wird; man kann dies auch wie folgt darstellen:

$$F(t) = \int_M f(\cdot, t)\ d\mu.$$

[2] Anstatt der Stirling-Formel kann man das *Wallis-Produkt* benutzen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 ... \cdot (2n-1))^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

was ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{a_n}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

und somit

$$a_n^2 \sim \frac{\pi^2}{\pi n} = \frac{\pi}{n}.$$

Man sagt: x ist die Variable von Integration and t ist ein *Parameter*. Ein Integral der Form (2.74) heißt das *Parameter-abhängige Integral*.

Wir zeigen jetzt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Funktion $F(t)$ differenzierbar ist, und zwar die Operationen $\frac{d}{dt}$ und $\int$ vertauschbar sind.

Satz 2.26 *Sei $f : M \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Bedingungen.*

(i) Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ μ-integrierbar auf M; insbesondere ist die Funktion $F(t)$ aus (2.74) wohldefiniert.

(ii) Für jedes $x \in M$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar auf I.

(iii) Die Ableitung $f' = \frac{\partial f}{\partial t}$ hat eine μ-integrierbare Majorante, d.h. es gibt eine μ-integrierbare Funktion g auf M mit

$$|f'(x,t)| \leq g(x) \text{ für alle } t \in I,\ x \in M. \tag{2.75}$$

Dann ist die Funktion $x \mapsto f'(x,t)$ μ-integrierbar auf M für alle $t \in I$, die Funktion $t \mapsto F(t)$ ist differenzierbar, und es gilt für alle $t \in I$

$$F'(t) = \int_M f'(x,t)\, d\mu(x). \tag{2.76}$$

Die Identität (2.76) lässt sich wie folgt darstellen:

$$\frac{d}{dt}\int_M f(x,t)\, d\mu(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)$$

so dass die Ableitung in t und das Integral vertauschbar sind.

Beweis. Fixieren wir ein $t \in I$ und eine Folge $\{s_n\}$ die gegen 0 konvergiert aber $s_n \neq 0$. Wir beweisen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+s_n) - F(t)}{s_n} = \int_M f'(x,t)\, d\mu(x), \tag{2.77}$$

woraus die Differenzierbarkeit von $F(t)$ und die Identität (2.76) folgen werden. Nach der Linearität von Integral gilt

$$\frac{F(t+s_n) - F(t)}{s_n} = \int_M \frac{f(x,t+s_n) - f(x,t)}{s_n} d\mu(x) = \int_M q_n(x)\, d\mu,$$

wobei

$$q_n(x) = \frac{f(x,t+s_n) - f(x,t)}{s_n}.$$

Die Funktion q_n ist offensichtlich integrierbar. Nach dem Mittelwertsatz gilt für jedes $x \in M$ die Gleichheit

$$\frac{f(x,t+s_n) - f(x,t)}{s_n} = f'(x,\xi_n),$$

wobei $\xi_n = \xi_n(x,t)$ ein Mittelwert zwischen t und $t + s_n$ ist. Es folgt aus (2.75), dass

$$|q_n(x)| = |f'(x,\xi_n)| \leq g(x).$$

Da die Folge $\{q_n(x)\}$ gegen $f'(x,t)$ für jedes $x \in M$ für $n \to \infty$ konvergiert und eine integrierbare Majorante g hat, so erhalten wir nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz dass $f'(x,t)$ auch integrierbar ist und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_M q_n(x)\, d\mu = \int_M f'(x,t)\, d\mu(x), \tag{2.78}$$

was äquivalent zu (2.77) ist. ■

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} dx$$

für alle $t \geq 1$. Dafür bestimmen wir zuerst $F'(t)$. Betrachten wir die Funktion

$$f(x,t) = \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x}$$

die für $x \in (0,\infty)$ und $t \geq 1$ definiert ist. Offensichtlich ist f nichtnegativ und differenzierbar in t:

$$f'(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = x^2 \frac{e^{-tx^2}}{x} = xe^{-tx^2}.$$

Die Ableitung $f'(x,t)$ hat offensichtlich für alle $t \geq 1$ eine Majorante

$$g(x) = xe^{-x^2},$$

die auf $(0,\infty)$ integrierbar ist da

$$\int_{(0,\infty)} xe^{-x^2} d\lambda = \int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ ist auf $(0,\infty)$ auch integrierbar da

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} dx + \int_1^\infty xe^{-x^2} dx,$$

wobei das zweite Integral konvergiert wie oberhalb und das erste Integral konvergiert da die Funktion

$$\frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x}$$

auf $(0,1]$ stetig ist und für $x \to 0$ einen endlichen Grenzwert hat:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 - tx^2 + o\left(x^2\right)\right)}{x} = 0.$$

Somit erfüllt die Funktion

$$F(t) = \int_{(0,\infty)} \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} d\lambda$$

alle Voraussetzungen des Satzes 2.26, und wir erhalten für alle $t \geq 1$

$$F'(t) = \int_{(0,\infty)} xe^{-tx^2} d\lambda = \int_0^\infty xe^{-tx^2} dx = \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-tx^2} d\left(tx^2\right) = \frac{1}{2t}.$$

Da $F(1) = 0$, so erhalten wir

$$F(t) = F(1) + \int_1^t F'(\tau)\, d\tau = \int_1^t \frac{d\tau}{2\tau} = \frac{1}{2} \ln t.$$

Somit gilt die Identität

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-tx^2}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln t.$$

2.10 Radon-Maß in ℝ und Lebesgue-Stieltjes Integral

Sei f eine messbare reellwertige Funktion auf einem Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$. Nach dem Satz 2.1, für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die Menge $f^{-1}(B)$ $\mathcal{S}$-messbar. Definieren wir eine Funktion $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit

$$\nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right). \tag{2.79}$$

Zeigen wir, dass ν ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. In der Tat, es gilt $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ und ν ist σ-additiv da für jede disjunkte Folge $\{B_k\}$ von Borel-Mengen in $\mathbb{R}$

$$\nu(\bigsqcup_k B_k) = \mu\left(f^{-1}(\bigsqcup_k B_k)\right) = \mu\left(\bigsqcup_k f^{-1}(B_k)\right) = \sum_k \mu\left(f^{-1}(B_k)\right) = \sum_k \nu(B_k)$$

(siehe auch Aufgabe 8). Das Maß ν heißt die *Verteilung* der Funktion f.

Definition. Sei J ein Intervall. Jedes Maß ν auf $\mathcal{B}(J)$ heißt ein *Borel-Maß*. Ein Maß ν auf $\mathcal{B}(J)$ heißt *Radon-Maß* wenn für alle beschränkten abgeschlossenen Intervalle $I \subset J$ gilt $\nu(I) < \infty$.

Zum Beispiel, das Lebesgue Maß λ ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}$. Auch das Maß ν aus (2.79) ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}$ vorausgesetzt dass μ endlich ist, z.B. wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Die Menge von allen Radon-Maßen auf einem Intervall lässt sich ganz schön beschreiben wie folgt.

Satz 2.27 *Sei J ein offenes Intervall.*

(*a*) *Für jedes Radon-Maß ν auf $\mathcal{B}(J)$ existiert eine Funktion $V : J \to \mathbb{R}$ mit*

$$\nu(a, b] = V(b) - V(a) \quad \text{für alle } a, b \in J \text{ mit } \ a \leq b. \tag{2.80}$$

Außerdem ist diese Funktion V monoton steigend und rechtsstetig.

(*b*) *Für jede monoton steigende rechtsstetige Funktion $V : J \to \mathbb{R}$ existiert genau ein Maß ν auf $\mathcal{B}(J)$, die (2.80) erfüllt. Außerdem ist ν ein Radon-Maß.*

Definition. Eine Funktion $V : J \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ heißt eine *Verteilungsfunktion* wenn V monoton steigend und rechtsstetig ist. Eine Verteilungsfunktion V die (2.80) erfüllt, heißt die Verteilungsfunktion des Maßes ν. Das Maß ν, die (2.80) mit einer Funktion V erfüllt, heißt das von V erzeugte Maß und wird auch mit ν_V bezeichnet.

Somit hat jedes Radon-Maß die Verteilungsfunktion, und jede Verteilungsfunktion erzeugt ein Radon-Maß.

Beispiel. Das Lebesgue Maß λ hat die Verteilungsfunktion $V(x) = x$ da

$$\lambda(a, b] = b - a = V(b) - V(a).$$

Beispiel. Betrachten wir die *Heaviside-Funktion*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

die eine Verteilungsfunktion ist. Das erzeugte von θ Maß ν_θ heißt das *Dirac-Maß* und wird mit δ bezeichnet. Für alle $a > 0$ erhalten wir

$$\delta(0, a] = \theta(a) - \theta(0) = 1 - 1 = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\delta(0, \infty) = \lim_{n \to \infty} \delta(0, n] = 0.$$

Analog erhalten wir, dass

$$\delta(-\infty, 0) = 0.$$

Im Beweis unterhalb werden wir sehen, dass für eine Verteilungsfunktion V und für das von V erzeugte Maß ν neben (2.80) auch gilt

$$\nu[a, b] = V(b) - V(a-)$$

(siehe (2.82)). Insbesondere erhalten wir

$$\delta(\{0\}) = \delta[0, 0] = \theta(0) - \theta(0-) = 1.$$

Somit ist das Maß δ auf einem Punkt 0 konzentriert.

26.11.21 Vorlesung 14

Beweis von dem Satz 2.27. Für jede monoton steigende Funktion V sind die beiden Grenzwerte

$$V(x+) = \lim_{y \to x+} V(y) \quad \text{und} \quad V(x-) = \lim_{y \to x-} V(y)$$

wohldefiniert, und es gilt immer

$$V(x-) \leq V(x) \leq V(x+).$$

Die Funktion V ist rechtsstetig in J, wenn $V(x+) = V(x)$ für alle $x \in J$, und linksstetig, wenn $V(x-) = V(x)$ für alle $x \in J$.

(a) Existiert eine Funktion V mit (2.80) so gilt für alle $a, b \in J$ mit $a < b$

$$V(b) - V(a) = \nu(a, b] \geq 0,$$

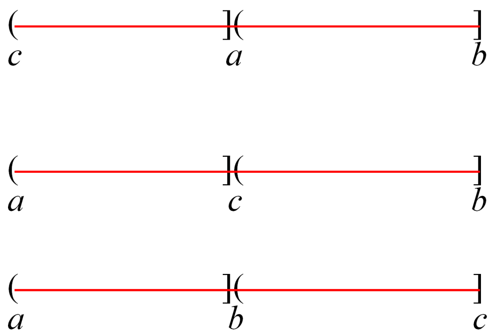
d.h. V monoton steigend ist. Die Funktion V ist rechtsstetig, da für jedes $a \in J$ und für jede monoton fallende Folge $a_k \downarrow a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} (V(a_k) - V(a)) = \lim_{k\to\infty} \nu(a, a_k] = \nu(\lim_{k\to\infty} (a, a_k]) = \nu(\bigcap_k (a, a_k]) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Jetzt beweisen wir, dass es für jedes Radon-Maß ν auf J eine Verteilungsfunktion V mit (2.80) gibt. Dafür fixieren wir ein $c \in J$ und setzen für alle $x \in J$

$$V(x) := \begin{cases} \nu(c, x], & x \geq c, \\ -\nu(x, c], & x < c. \end{cases} \tag{2.81}$$

Beweisen wir, dass diese Funktion (2.80) für alle $a \leq b$ aus J erfüllt.



Im Fall $c \leq a$ haben wir

$$\nu(a, b] = \nu((c, b] - (c, a]) = \nu(c, b] - \nu(c, a] = V(b) - V(a),$$

im Fall $a < c \leq b$ gilt

$$\nu(a, b] = \nu((a, c] \sqcup (c, b]) = \nu(a, c] + \nu(c, b] = -V(a) + V(b),$$

und im Fall $c > b$ gilt

$$\nu(a, b] = \nu((a, c] - (b, c]) = \nu(a, c] - \nu(b, c] = -V(a) - (-V(b)),$$

so dass (2.80) in allen Fällen gilt.

(b) Gegeben sei eine Verteilungsfunktion V auf J, beweisen wir, dass es ein Maß ν auf $\mathcal{B}(J)$ mit (2.80) gibt. Bezeichnen wir mit S das Halbring von allen Intervallen mit den Grenzpunkten aus J und definieren wir zuerst ν auf S. Seien $a, b \in J$ mit $a \leq b$. Zuerst setzen wir nach (2.80)

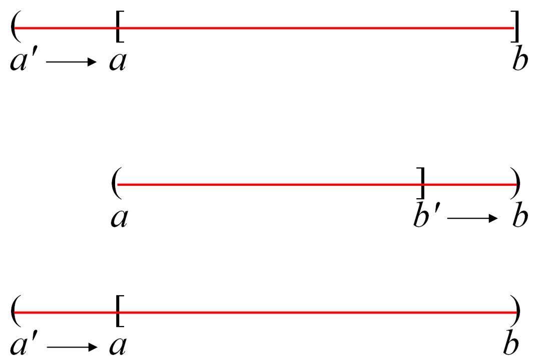
$$\nu(a, b] := V(b) - V(a).$$

Für die anderen Typen von Intervallen mit den Grenzen a und b wird ν notwendigerweise wie folgt definiert:

$$\nu\,[a,b] := \lim_{a'\to a-} \nu(a',b] = \lim_{a'\to a-} \left(V(b) - V(a') \right) = V(b) - V(a-)\,, \tag{2.82}$$

$$\nu\,(a,b) := \lim_{b'\to b-} \nu(a,b'] = \lim_{b'\to b-} \left(V(b') - V(a) \right) = V(b-) - V(a)\,, \quad \text{wenn } a<b, \tag{2.83}$$

$$\nu[a,b) := \lim_{a'\to a-} \nu(a',b) = \lim_{a'\to a-} \left(V(b-) - V(a') \right) = V(b-) - V(a-)\,. \tag{2.84}$$



Offensichtlich gilt
$$\nu(\emptyset) = \nu(a,a] = V(a) - V(a) = 0.$$
Beweisen wir, dass ν auf dem Halbring S σ-additiv ist. Nach dem Satz 1.13, reicht es die folgenden zwei Eigenschaften von ν zu beweisen:

(i) ν ist endlich additiv;

(ii) ν ist regulär, d.h. jedes Intervall $I \in S$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein kompaktes Intervall $K \in S$ und ein offenes Intervall $U \in S$ mit

$$K \subset I \subset U \quad \text{und } \nu(U) \leq \nu(K) + \varepsilon. \tag{2.85}$$

(i) Beweisen wir, dass ν endlich additiv ist, d.h. für jede endliche disjunkte Folge von nichtleeren Intervallen $\{I_k\}_{k=1}^n$ aus S mit

$$\bigsqcup_{k=1}^n I_k = I \in S$$

gilt

$$\nu(I) = \sum_{k=1}^n \nu(I_k)\,.$$

Induktion nach n. Induktionsanfang: für $n=1$ ist alles trivial. Betrachten wir zuerst den Fall $n=2$. Sei $I=(a,b]$ (die anderen Typen von Intervallen werden analog behandelt). Für die Zerlegung $I = I_1 \sqcup I_2$ gibt es zwei Möglichkeiten:

- $(a,b] = (a,c] \sqcup (c,b]$

- $(a,b] = (a,c) \sqcup [c,b]$

Im ersten Fall erhalten wir

$$\nu(a,c] + \nu(c,b] = (V(c) - V(a)) + (V(b) - V(c)) = V(b) - V(a) = \nu(a,b]$$

und im zweiten Fall gilt

$$\nu(a,c) + \nu[c,b] = (V(c-) - V(a)) + (V(b) - V(c-)) = V(b) - V(a) = \nu(a,b].$$

Somit erhalten wir in den beiden Fällen

$$\nu(I) = \nu(I_1) + \nu(I_2).$$

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Sei I_n das Intervall aus der Folge $\{I_k\}$, das ganz rechts in I liegt. Dann ist die Differenz $I' = I \setminus I_n$ auch ein Intervall und

$$I' = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} I_k.$$

Nach der Induktionsbehauptung gilt es

$$\nu(I') = \sum_{k=1}^{n-1} \nu(I_k).$$

Da $I = I' \sqcup I_n$, so gilt nach dem obigen Argument

$$\nu(I) = \nu(I') + \nu(I_n),$$

woraus folgt

$$\nu(I) = \sum_{k=1}^{n-1} \nu(I_k) + \nu(I_n) = \sum_{k=1}^{n} \nu(I_k),$$

was zu beweisen war.

(ii) Beweisen wir die Regularität von ν. Sei $I = (a,b]$ mit $a < b$, $a, b \in J$. Wählen wir für ein $a' \in I$ und setzen

$$K = [a', b]$$

so dass K kompakt ist, $K \subset I$ und

$$\begin{aligned} \nu(I) - \nu(K) &= (V(b) - V(a)) - (V(b) - V(a'-)) \\ &= V(a'-) - V(a) \\ &\le V(a') - V(a) \\ &\to 0 \text{ für } a' \to a+ \end{aligned}$$

da V rechtsseitig stetig ist. Analog wählen wir für ein $b' \in J$, $b' > b$ und setzen

$$U = (a, b')$$

so dass U is offen, $I \subset U$ und

$$\nu(U) - \nu(I) = (V(b'-) - V(a)) - (V(b) - V(a))$$

$$
\begin{aligned}
&= V(b'-) - V(b) \\
&\leq V(b') - V(b) \\
&\to 0 \text{ für } b' \to b+
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass die Differenz $\nu(U) - \nu(K)$ beliebig klein gemacht werden kann. Analog betrachtet man die anderen Typen von I.

Somit ist ν σ-additiv auf S. Da J eine abzählbare Vereinigung von kompakten Intervallen ist und ν somit σ-endlich ist, so erhalten wir nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory (Satz 1.12) dass ν sich auf die σ-Algebra $\mathcal{M}_V(J)$ von messbaren Teilmengen von J erweitern lässt. Da $S \subset \mathcal{M}_V(J)$ und somit auch $\mathcal{B}(J) = \sigma(S) \subset \mathcal{M}_V(J)$, so ist ν auf $\mathcal{B}(J)$ definiert. Das Maß ν ist ein Radon-Maß, da für jedes $[a,b] \subset J$ gilt nach (2.82) $\nu[a,b] < \infty$.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit von dem Maß ν, das (2.80) erfüllt. Sei ν' ein anderes Borel-Maß mit (2.80) so dass $\nu'(a,b] = \nu(a,b]$ für alle $a < b$ aus J. Nach (2.82), (2.83), (2.84) erhalten wir, dass $\nu'(I) = \nu(I)$ für alle Intervallen $I \in S$. Nach der Eindeutigkeit der Erweiterung von Maß im Satz von Carathéodory erhalten wir, dass $\nu' = \nu$ auf $\mathcal{B}(J)$. ■

Definition. Das Lebesgue-Integral bezüglich des Maßes ν_V heißt das *Lebesgue-Stieltjes-Integral* bezüglich der Funktion V und wird wie folgt bezeichnet:

$$\int_J f dV := \int_J f d\nu_V.$$

Beispiel. Für die Funktion $V(x) = x$ erhalten wir aus der Definition von ν im obigen Beweis, dass $\nu(I) = \ell(I)$ für jedes Intervall $I \in S$, woraus folgt $\nu_V = \lambda$. In diesem Fall benutzt man auch die Notation

$$\int_J f(x)\, dx := \int_J f d\lambda.$$

Beispiel. Wir haben schon gesehen, dass die Heaviside-Funktion $\theta(x)$ das Dirac-Maß δ erzeugt, und δ auf dem Punkt 0 konzentriert. Es folgt, dass für jede Borel-Funktion f auf $\mathbb{R}$ gilt

$$f = f(0)\, \mathbf{1}_{\{0\}} \quad \delta\text{-f.ü.}$$

Somit ist f nach dem Satz 2.23 δ-integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta = \int_{\mathbb{R}} f(0)\, \mathbf{1}_{\{0\}} d\delta = f(0)\, \delta(\{0\}) = f(0).$$

Die verschobene Heaviside-Funktion $V(x) = \theta(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ erzeugt das Maß δ_c, das auf dem Punkt c konzentriert. Für jede Borel Funktion f auf $\mathbb{R}$ gilt analog

$$f = f(c)\, \mathbf{1}_{\{c\}} \quad \delta_c\text{-f.ü.}$$

Somit ist f nach dem Satz 2.23 δ_c-integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_c = \int_{\mathbb{R}} f(c)\, \mathbf{1}_{\{c\}} d\delta_c = f(c).$$

Besprechen wir jetzt eine andere Methode für Konstruktion von Radon-Maß. Sei φ eine nichtnegative Borel-Funktion auf dem Intervall J, die auf jedem kompakten Teilintervall $I \subset J$ λ-integrierbar ist. Definieren wir eine Funktion ν auf $\mathcal{B}(J)$ mit

$$\nu(A) = \int_A \varphi d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{B}(J). \tag{2.86}$$

Nach dem Satz 2.19 ist ν ein Maß auf $\mathcal{B}(J)$. Da $\nu(I) < \infty$ für alle kompakte Intervalle $I \subset J$, so ist ν ein Radon-Maß.

Definition. Die Funktion φ mit (2.86) heißt die *Dichtefunktion* des Maßes ν (oder die *Radon-Nikodym Ableitung* von ν) bezüglich λ.

Man kann beweisen, dass für nichtnegative Borel-Funktion f auf J und für das Maß (2.86) gilt

$$\int_J f d\nu = \int_J f\varphi d\lambda$$

(siehe Aufgabe 59).

Schreibweise: $d\nu = \varphi d\lambda$ und $\varphi = \frac{d\nu}{d\lambda}$.

Sei φ stetig. Die Verteilungsfunktion V des Maßes ν lässt sich nach (2.81) bestimmen: für $x \geq c$

$$V(x) = \nu(c, x] = \int_{(c,x]} \varphi d\lambda = \int_c^x \varphi(t)\, dt$$

und für $x < c$

$$V(x) = -\nu(x, c] = -\int_{(x,c]} \varphi d\lambda = -\int_x^c \varphi(t)\, dt = \int_c^x \varphi(t)\, dt.$$

Es folgt dass V auf J differenzierbar ist und $V'(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in J$. In diesem Fall erhalten wir die Identität

$$\int_J f dV = \int_J f d\nu = \int_J f\varphi d\lambda = \int_J f\, V' d\lambda.$$

Beispiel. Die Dichtefunktion $\varphi(x) \equiv 1$ erzeugt offensichtlich das Lebesgue-Maß λ.

Die Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

erzeugt das *Cauchy-Maß* ν auf $\mathbb{R}$. Dieses Maß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da

$$\nu(\mathbb{R}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Die Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

erzeugt das *Gauß-Maß* γ auf $\mathbb{R}$. Für dieses Maß gilt nach (2.73)

$$\gamma(\mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \overset{y=x/\sqrt{2}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1,$$

so dass γ auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

01.12.21 Vorlesung 15

2.11 Riemann-Stieltjes-Integral

Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und V eine Verteilungsfunktion auf J. Für ein Intervall $[a,b] \subset J$ und für eine Funktion f auf $[a,b]$ definieren wir das *Riemann-Stieltjes-Integral* $\int_a^b f dV$ wie folgt. Sei $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ eine Zerlegung von $[a,b]$ d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Setzen wir

$$\alpha_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad \beta_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \tag{2.87}$$

und betrachten wir die Darboux-Summen bezüglich V:

$$U_Z(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(V(x_i) - V(x_{i-1}) \right), \quad O_Z(f) = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(V(x_i) - V(x_{i-1}) \right).$$

Dann definiert man das *Riemann-Stieltjes-Integral* mit

$$\int_a^b f dV := \lim_{\varphi(Z)\to 0} U_Z(f) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} O_Z(f) \tag{2.88}$$

wobei $\varphi(Z) = \max_i (x_i - x_{i-1})$, vorausgesetzt, dass die beiden Grenzwerte in (2.88) existieren in $\mathbb{R}$ und gleich sind. In diesem Fall heißt die Funktion f *Riemann-Stieltjes-integrierbar*. Man kann beweisen, dass jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar ist.

Es ist offensichtlich dass im Fall $V(x) = x$ das Riemann-Stieltjes Integral mit dem Riemann Integral übereinstimmt.

Wir beweisen hier, dass die Riemann-Stieltjes und Lebesgue-Stieltjes Integrale übereinstimmen. Wir benutzen das Maß ν_V aus dem Satz 2.27 mit dem Definitionsbereich $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(J)$. Das Maßraum $(J, \mathcal{M}_V, \nu_V)$ ist *vollständig* d.h. jede Nullmenge in diesem Raum ist $\mathcal{M}_V$-messbar. In der Tat, dieser Maßraum wurde mit Hilfe von dem Satz von Carathéodory konstruiert, und jeder nach dem Satz von Carathéodory konstruierte Maßraum ist immer vollständig (siehe Satz 1.26).

Satz 2.28 *Ist f Riemann-Stieltjes-integrierbar auf $[a,b]$, so ist f auch ν_V-integrierbar auf $(a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f dV = \int_{(a,b]} f d\nu_V.$$

Beweis. Für jede Zerlegung $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ von $[a,b]$ betrachten wir die signierten Elementarfunktionen

$$\Phi_Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{(x_{i-1},x_i]} \quad \text{und} \quad \Psi_Z = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{(x_{i-1},x_i]}, \tag{2.89}$$

wobei α_i und β_i in (2.87) definiert sind. Da $\sqcup_i(x_{i-1}, x_i] = (a, b]$ so gilt

$$\Phi_Z \leq f \leq \Psi_Z \text{ auf } (a, b]. \tag{2.90}$$

Offensichtlich haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b]} \Phi_Z d\nu_V &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \nu_V(x_{i-1}, x_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(V(x_i) - V(x_{i-1})) = U_Z(f), \\
\int_{(a,b]} \Psi_Z d\nu_V &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, \nu_V(x_{i-1}, x_i] = O_Z(f).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{(a,b]} (\Psi_Z - \Phi_Z) \, d\nu_V \to 0 \text{ für } \varphi(Z) \to 0. \tag{2.91}$$

Die Bedingungen (2.90) und (2.91) im vollständigen Maßraum ergeben, dass f ν_V-messbar ist (siehe Aufgabe 50). Es folgt aus (2.90) dass

$$|f| \leq |\Psi_Z| + |\Phi_Z|$$

woraus folgt

$$\int_{(a,b]} |f| \, d\nu_V < \infty$$

so dass f ν_V-integrierbar ist. Es folgt aus (2.90), dass

$$\int_{(a,b]} \Phi_Z d\nu_V \leq \int_{(a,b]} f d\nu_V \leq \int_{(a,b]} \Psi_Z d\nu_V,$$

was äquivalent zu

$$U_Z(f) \leq \int_{(a,b]} f d\nu_V \leq O_Z(f)$$

ist. Für $\varphi(Z) \to 0$ erhalten wir die Identität

$$\int_{(a,b]} f \, d\nu_V = \int_a^b f(x) \, dV.$$

■

Es folgt aus dem Satz 2.28 mit $V(x) = x$, dass jede Riemann-integrierbare Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ auch Lebesgue-integrierbar ist und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Siehe auch die Aufgabe 51.

2.12 Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

Als noch ein Beispiel von Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz, geben wir den folgenden Satz an.

Satz 2.29 (Satz von Lebesgue) *Eine beschränkte Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar auf* $[a, b]$*, wenn* f f.ü. *stetig ist.*

Insbesondere ist eine Funktion f Riemann-integrierbar vorausgesetzt dass f beschränkt ist und die Menge von Punkten der Unstetigkeit von f höchstens abzählbar ist.

Beweis. Sei $D \subset [a, b]$ die Menge von Punkten wo f unstetig ist. Nach der Aufgabe 47 ist D eine Borel-Menge. Beweisen wir zuerst, dass

$$\lambda(D) = 0 \Rightarrow f \text{ ist Riemann-integrierbar.}$$

Fixieren wir eine Zerlegung $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ von $[a, b]$, setzen

$$\alpha_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \qquad \beta_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

und betrachten wir die Funktionen

$$\Phi_Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{(x_{i-1},x_i]} \quad \text{und} \quad \Psi_Z = \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{(x_{i-1},x_i]}.$$

wie in (2.89). Für diese Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \Phi_Z d\lambda &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(x_{i-1}, x_i] = U_Z(f), \\ \int_{[a,b]} \Psi_Z d\lambda &= \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda(x_{i-1},x_i] = O_Z(f), \end{aligned}$$

wobei $U_Z(f)$ die untere Darboux-Summe ist und $O_Z(f)$ die obere Darboux-Summe. Die Riemann-Integrierbarkeit von f ist äquivalent zu

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} (O_Z(f) - U_Z(f)) = 0. \tag{2.92}$$

Wir haben

$$\Psi_Z(x) - \Phi_Z(x) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \mathbf{1}_{(x_{i-1},x_i]}(x) = \beta_i - \alpha_i \text{ wenn } x \in (x_{i-1}, x_i].$$

Fixieren wir ein $x \in D^c = [a, b] \setminus D$. Da f in x stetig ist, so gilt folgendes: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| \le \varepsilon \text{ für alle } y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b].$$

Gilt $\varphi(Z) < \delta$, so liegt das Intervall $(x_{i-1}, x_i]$, das x enthält, in $[x - \delta, x + \delta]$, was ergibt, dass

$$|\beta_i - f(x)| \le \varepsilon \text{ und } |\alpha_i - f(x)| \le \varepsilon,$$

und somit
$$\beta_i - \alpha_i \leq 2\varepsilon.$$
Im Fall $x = a$ liegt x in keinem Integral $(x_{i-1}, x_i]$, woraus folgt $\Psi_Z(x) = \Phi_Z(x) = 0$. Somit erhalten wir, dass im Fall $\varphi(Z) < \delta$ gilt

$$\Psi_Z(x) - \Phi_Z(x) \leq 2\varepsilon,$$

woraus folgt
$$\Psi_Z(x) - \Phi_Z(x) \to 0 \text{ für } \varphi(Z) \to 0$$
Da dies für alle $x \in D^c$ gilt und $\lambda(D) = 0$, so erhalten wir, dass

$$\Psi_Z - \Phi_Z \to 0 \quad \lambda\text{-f.ü. für } \varphi(Z) \to 0.$$

Da alle Funktionen Φ_Z, Ψ_Z von $C := \sup |f|$ beschränkt sind, so erhalten wir nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\int_{[a,b]} (\Psi_Z - \Phi_Z)\, d\lambda \to 0,$$

woraus (2.92) folgt.

Beweisen wir jetzt die umgekehrte Implikation:

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar} \Rightarrow \lambda(D) = 0.$$

Für jedes $x \in [a, b]$ setzen wir

$$\delta(x) := \lim_{t \to 0+} \left(\sup_{[x-t, x+t]} f - \inf_{[x-t,x+t]} f \right),$$

wobei lim existiert da die Funktion in den Klammern monoton steigend in t ist. Funktion f ist stetig an x genau dann, wenn $\delta(x) = 0$, d.h.

$$D = \{x \in [a, b] : \delta(x) > 0\}.$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und betrachten die Menge

$$D_\varepsilon = \{x \in [a, b] : \delta(x) \geq \varepsilon\}.$$

Für beliebige Zerlegung $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ von $[a, b]$, bezeichnen wir mit A die Vereinigung von allen Intervallen (x_{i-1}, x_i) die mindestens einen Punkt von D_ε enthalten so dass $A \supset D_\varepsilon$.Für jedes Intervall $(x_{i-1}, x_i) \subset A$ gibt es ein $x \in (x_{i-1}, x_i) \cap D_\varepsilon$ und somit

$$\beta_i - \alpha_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \geq \delta(x) \geq \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{\{i:\ (x_{i-1},x_i)\subset A\}} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \varepsilon \sum_{\{i:\ (x_{i-1},x_i)\subset A\}} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon \lambda(A) \\
&\geq \varepsilon \lambda(D_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ gilt $O_Z(f) - U_Z(f) \to 0$, woraus folgt

$$\lambda(D_\varepsilon) = 0.$$

Da

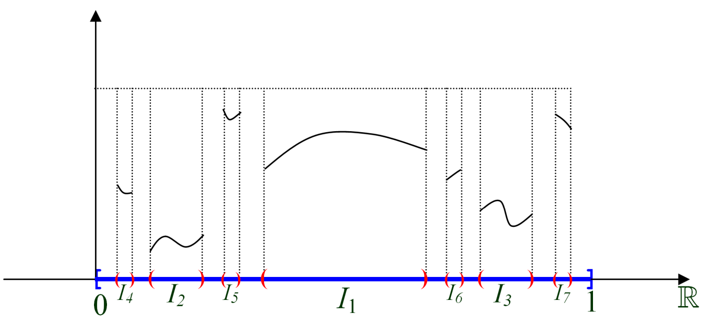
$$
\begin{aligned}
D &= \{x \in [a,b] : \delta(x) > 0\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in [a,b] : \delta(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\frac{1}{k}}
\end{aligned}
$$

und $\lambda(D_{\frac{1}{k}}) = 0$, so folgt es, dass $\lambda(D) = 0$. ■

Beispiel. Sei C die Cantor-Menge auf dem Intervall $[0,1]$. Das Komplement $[0,1] \setminus C$ ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von den offenen Intervallen

$$I_1 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad I_2 = \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right), \quad I_3 = \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \quad \text{usw.}$$

Betrachten wir eine beliebige beschränkte Funktion f auf $[0,1]$ die stetig auf jedem I_k ist, aber auf C beliebig definiert ist.



Funktion f

Dann gilt $D \subset C$ und somit $\lambda(D) = 0$ (da $\lambda(C) = 0$ nach Aufgabe 20). Es folgt, dass die Funktion f auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

Chapter 3

Produktmaß und Satz von Fubini

3.1 Produktmaß ist ein Maß

Wir wiederholen zuerst den Begriff von Produktmaß aus dem Abschnitt 1.10.

Seien M_1, M_2 zwei Grundmengen und S_1, S_2 Halbringe auf M_1 bzw M_2. Betrachten wir die Menge

$$M = M_1 \times M_2 = \{(x, y) : x \in M_1, y \in M_2\}$$

und das Mengensystem

$$S = S_1 \times S_2 := \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}.$$

Dann S ist auch ein Halbring (Aufgabe 9).

Seien μ_1 und μ_2 Maßen auf S_1 bzw S_2. Definieren wir das *Produktmaß* $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ als eine Funktion auf $S = S_1 \times S_2$ mit

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\, \mu_2(B) \text{ für alle } A \in S_1,\ B \in S_2.$$

Nach der Aufgabe 28 (siehe auch den Satz 1.15) ist μ ein endlich additives Maß auf S.

Für die Länge ℓ auf $\mathbb{R}$ haben wir im Satz 1.16 beweisen, dass das Produktmaß

$$l_n = \underbrace{l \times l \times ... \times l}_{n}$$

σ-additiv ist, d.h. l_n ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist, indem die Regularität von ℓ benutzt haben.

Hier beweisen wir die σ-Additivität von dem Produktmaß μ in der allgemeinen Situation.

Hauptsatz 3.1 *Seien μ_1, μ_2 σ-endliche Maße auf den Halbringen S_1 bzw S_2. Dann ist das Produktmaß $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ σ-additiv und σ-endlich auf dem Halbring $S = S_1 \times S_2$ (d.h. μ ist ein σ-endliches Maß auf S).*

Nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory (Hauptsatz 1.12), das Maß $\mu_1 \times \mu_2$ lässt sich von dem Halbring $S_1 \times S_2$ auf die σ-Algebra $\sigma(S_1 \times S_2)$ eindeutig erweitern. Das erweiterte Maß wird auch mit $\mu_1 \times \mu_2$ bezeichnet.

Diese Bemerkung motiviert die folgende Definition.

Definition. Seien $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit σ-Algebren $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ und σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2. Der *Produktraum* von $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ ist der Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ wobei

$$\boxed{M = M_1 \times M_2, \quad \mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) \ \text{ und } \ \mu = \mu_1 \times \mu_2.}$$

Beispiel. Zeigen wir, dass der Produktraum von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n)$ and $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m, \lambda_m)$ gleich

$$\left(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}_{n+m}, \lambda_{n+m}\right)$$

ist. Nach Definition, $\mathcal{B}_n = \sigma(S_n)$ wobei S_n der Halbring von allen Quadern in $\mathbb{R}^n$ ist, und λ_n die Erweiterung auf $\mathcal{B}_n$ von dem n-dimensionalen Volumen ℓ_n ist (wobei ℓ_n auf S_n definiert ist). Offensichtlich gilt $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Es gilt die Identität

$$\sigma(\sigma(S_n) \times \sigma(S_m)) = \sigma(S_n \times S_m) \tag{3.1}$$

(siehe Lemma 3.9 unterhalb), woraus folgt, dass die σ-Algebra im Produktraum ist

$$\sigma(\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m) = \sigma(\sigma(S_n) \times \sigma(S_m)) = \sigma(S_n \times S_m) = \sigma(S_{n+m}) = \mathcal{B}_{n+m}.$$

Somit sind die Maße $\lambda_n \times \lambda_m$ und λ_{n+m} auf der gleichen σ-Algebra $\mathcal{B}_{n+m}$ definiert. Da auf $S_n \times S_m$ gilt

$$\lambda_n \times \lambda_m = \ell_n \times \ell_m = \ell_{n+m} = \lambda_{n+m},$$

so erhalten wir nach der Eindeutigkeit der Erweiterung von Maß dass

$$\lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{n+m} \ \text{ auf } \ \mathcal{B}_{n+m}.$$

03.12.21 Vorlesung 16

Beweis von dem Satz 3.1. Nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory lassen sich μ_1 und μ_2 auf die σ-Algebren $\sigma(S_1)$ bzw $\sigma(S_2)$ erweitern. Insbesondere erhalten wir zwei Maßräume $(M_i, \sigma(S_i), \mu_i)$, $i = 1, 2$, wo wir die Integrationstheorie benutzen werden.

Sei $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge von Mengen aus S mit

$$C := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in S.$$

Wir müssen beweisen, dass

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n). \tag{3.2}$$

Seien $C = A \times B$ und $C_n = A_n \times B_n$ wobei $A, A_n \in S_1$ und $B, B_n \in S_2$.

Betrachten wir die folgenden Elementarfunktionen f_n auf M_1:

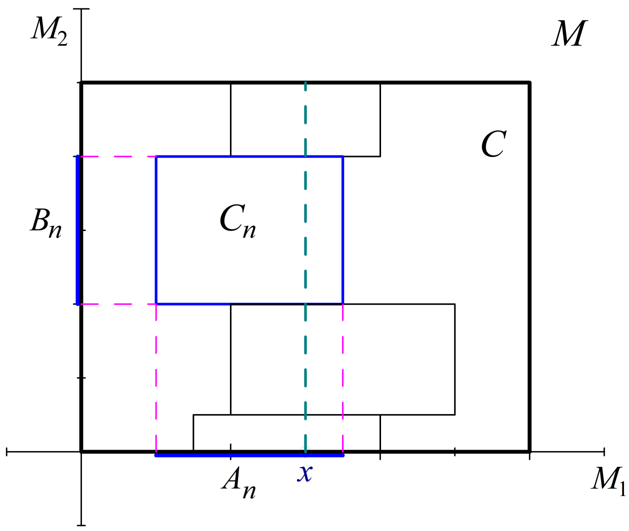
$$f_n = \mu_2(B_n) \mathbf{1}_{A_n}$$

und beweisen wir, dass für alle $x \in A$ gilt

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \mu_2(B).} \tag{3.3}$$

Fixieren wir ein $x \in A$ und bezeichnen mit Λ die Menge von allen $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$:

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}.$$



Mengen $C = A \times B$ und $C_n = A_n \times B_n$

Da $f_n(x) = 0$ wenn $x \notin A_n$ d.h. wenn $n \notin \Lambda$, so erhalten wir

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\Lambda} f_n(x) = \sum_{n\in\Lambda} \mu_2(B_n). \tag{3.4}$$

Zeigen wir, dass die Folge $\{B_n\}_{n\in\Lambda}$ disjunkt ist. Ist $B_n \cap B_m$ nicht leer für verschiedene $n, m \in \Lambda$ so gibt es ein $y \in B_n \cap B_m$ woraus folgt $(x, y) \in C_n \cap C_m$ (da $x \in A_n \cap A_m$), was unmöglich ist, da C_n und C_m disjunkt sind. Somit gilt $B_n \cap B_m = \emptyset$.

Zeigen wir, dass

$$\bigsqcup_{n\in\Lambda} B_n = B. \tag{3.5}$$

Da offensichtlich $B_n \subset B$, so reicht es zu beweisen, dass

$$B \subset \bigcup_{n\in\Lambda} B_n.$$

In der Tat, für jedes $y \in B$ gilt $(x, y) \in C$ und somit $(x, y) \in C_n = A_n \times B_n$ für ein n. Es folgt $x \in A_n$ und somit $n \in \Lambda$. Folglich gilt $y \in B_n$ für $n \in \Lambda$, was zu beweisen war.

Nach der σ-Additivität von μ_2 erhalten wir aus (3.5), dass

$$\sum_{n\in\Lambda} \mu_2(B_n) = \mu_2(B),$$

was zusammen mit (3.4) ergibt (3.3).

Integration der Identität (3.3) auf A bezüglich μ_1 ergibt

$$\int_A \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu_1 = \mu_2 (B) \ \mu_1 (A) = \mu (C) .$$

Da alle Funktion f_n nichtnegativ und messbar sind, so sind die Operationen $\int$ und $\sum$ vertauschbar (nach dem Korollar 2.16). Somit erhalten wir

$$\int_A \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n \, d\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2 (B_n) \, \mu_1 (A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu (C_n) ,$$

woraus (3.2) folgt.

Da μ_1 und μ_2 σ-endlich sind, so existiert eine Folge $\{A_n\}$ aus S_1 und eine Folge $\{B_m\}$ aus S_2 mit

$$\mu_1 (A_n) < \infty, \quad \mu_2 (B_m) < \infty$$

und

$$\bigcup_n A_n = M_1, \quad \bigcup_m B_m = M_2.$$

Die Mengen $C_{nm} := A_n \times B_m \in S_1 \times S_2$ erfüllen die folgenden Eigenschaften:

$$\mu (C_{nm}) = \mu_1 (A_n) \, \mu_2 (B_m) < \infty$$

und

$$\bigcup_{n,m} C_{nm} = M.$$

so dass μ σ-endlich ist. ■

Bemerkung. Per Induktion definiert man das Produktmaß $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ von n σ-endlichen Maßen $\mu_1, ..., \mu_n$ auf Halbringen $S_1, ..., S_n$. Dieses Product ist assoziativ, da

$$(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times (S_2 \times S_3) = \{A \times B \times C : A \in S_1, B \in S_2, C \in S_3\}$$

und

$$((\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3) (A \times B \times C) = \mu_1 (A) \, \mu_2 (B) \, \mu_3 (C) = (\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)) (A \times B \times C) .$$

3.2 Das Prinzip von Cavalieri

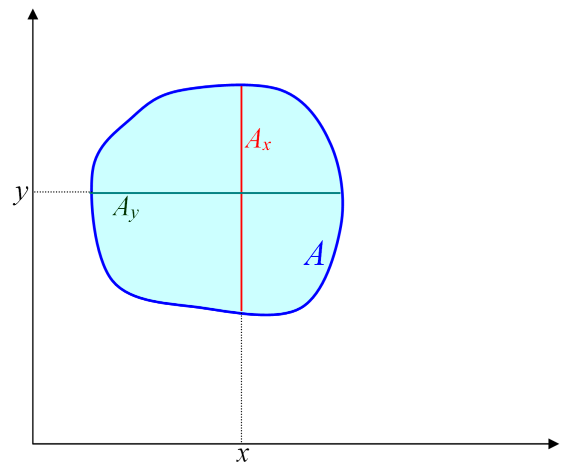
Seien $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit σ-endlichen Maßen. Betrachten wir den Produktraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ mit $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{S} = \sigma (\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$, und $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{S}$.

Für jede Teilmenge $A \subset M$ und für jedes $x \in M_1$ betrachten wir die Menge

$$A_x := \{y \in M_2 : (x, y) \in A\} , \tag{3.6}$$

die x-*Schnittmenge* von A heißt. Analog definiert man für jedes $y \in M_2$ die y-Schnittmenge

$$A_y := \{x \in M_1 : (x, y) \in A\}.$$



Schnittmengen A_x und A_y

Hauptsatz 3.2 (Das Prinzip von Cavalieri) *Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ der Produktraum wie oberhalb. Für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ gilt folgendes:*

(i) *für jedes $x \in M_1$ gilt $A_x \in \mathcal{S}_2$;*

(ii) *die Funktion $x \mapsto \mu_2(A_x)$ auf M_1 ist $\mathcal{S}_1$-messbar;*

(iii) *und es gilt*

$$\boxed{\mu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x)}. \tag{3.7}$$

Nach Symmetrie gilt auch die Identität

$$\boxed{\mu(A) = \int_{M_2} \mu_1(A_y)\, d\mu_2(y)}.$$

Die Identität (3.7) kann benutzt werden, um die Volumen von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Der Beweis von dem Satz 3.2 wird unterhalb gegeben.

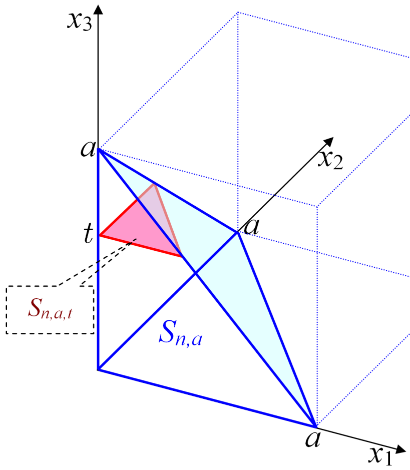
Beispiel. Betrachten wir für jedes $a > 0$ die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$:

$$S_{n,a} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0 \text{ für alle } k = 1, ..., n \text{ und } x_1 + ... + x_n \leq a\}.$$

Die Menge $S_{n,\alpha}$ heißt n-dimensionales *Simplex*. Das Simplex ist abgeschlossene Menge und somit Borel-Menge. Beweisen wir per Induktion nach n mit Hilfe von dem Prinzip von Cavalieri dass

$$\lambda_n(S_{n,a}) = \frac{a^n}{n!}.$$

Für $n=1$ gilt $S_{1,a}=[0,a]$ und somit $\lambda_1(S_{1,a})=a=\frac{a^1}{1!}$.



Simplex $S_{n,a}$ für $n=3$ und die Schnittmenge $S_{n,a,t}$

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Wir benutzen dass $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n,\lambda_n)$ der Produktraum von $(\mathbb{R}^{n-1},\mathcal{B}_{n-1},\lambda_{n-1})$ und $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ ist. Für jedes $t\in\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $S_{n,a,t}$ die Schnittmenge von $S_{n,a}$ an $x_n=t$ d.h.

$$\begin{aligned} S_{n,a,t} &= \left\{(x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:(x_1,...,x_{n-1},t)\in S_{n,a}\right\} \\ &= \left\{(x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:\text{alle } x_k\geq 0,\ t\geq 0,\text{ und } x_1+...+x_{n-1}+t\leq a\right\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für $t\in[0,a]$

$$S_{n,a,t}=\left\{(x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:\text{alle } x_k\geq 0 \text{ und } x_1+...+x_{n-1}\leq a-t\right\}=S_{n-1,a-t}$$

and $S_{n,a,t}=\emptyset$ für $t\notin[0,a]$. Wir haben für jedes $t\in[0,a]$ nach der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_{n-1}(S_{n,a,t})=\lambda_{n-1}(S_{n-1,a-t})=\frac{(a-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Nach (3.7) erhalten wir, dass

$$\lambda_n(S_{n,a})=\int_{\mathbb{R}}\lambda_{n-1}(S_{n,a,t})\,d\lambda_1(t)=\int_0^a\frac{(a-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt=\int_0^a\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}ds=\frac{a^n}{n!}.$$

Für Vergleich bemerken wir, dass für den n-dimensionalen Würfel

$$W_{n,a}=[0,a]^n=\{x\in\mathbb{R}^n:0\leq x_k\leq a \text{ für alle } k=1,...,n\}$$

mit der Seite a gilt

$$\lambda_n(W_{n,a})=a^n,$$

so dass

$$\text{das Volumen des Simplex}=\frac{1}{n!}\times\text{das Volumen des Würfels.}$$

Die folgende Aussage ist eine Folgerung des Satzes 3.2 für Untergraphen.

Korollar 3.3 *Seien Ω eine Borel-Menge in $\mathbb{R}^{n-1}$ und $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine Borel-Funktion. Betrachten wir den Untergraph von f*

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

und für jedes $y \ge 0$ die y-Schnittmenge

$$U_y = \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in U\right\} = \{x \in \Omega : f(x) \ge y\}. \tag{3.8}$$

Dann ist U eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, U_y – Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$, und es gelten die Identitäten

$$\boxed{\lambda_n(U) = \int_\Omega f(x)\, d\lambda_{n-1}(x)} \tag{3.9}$$

und

$$\boxed{\lambda_n(U) = \int_{[0,\infty)} \lambda_{n-1}(U_y)\, d\lambda(y)}. \tag{3.10}$$

Der spezielle Fall von (3.9) wenn $n = 2$ und f Riemann-integrierbar ist wurde im Satz 1.18 bewiesen.

Beweis. Betrachten wir auf $\Omega \times \mathbb{R}$ zwei Funktionen:

$$(x, y) \mapsto f(x) \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto y,$$

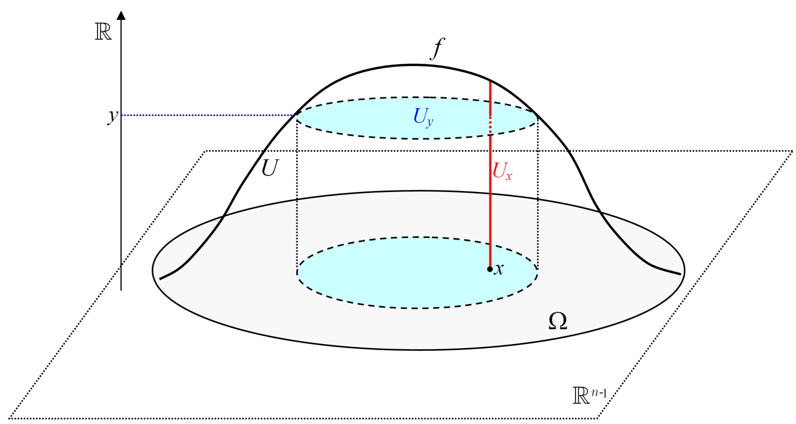
Die beiden Funktionen sind Borel, so dass auch die Differenz $y - f(x)$ ist Borel. Dann ist die Menge

$$U = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y - f(x) \le 0 \ \text{ und } \ y \ge 0\}$$

eine Borel-Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{R}$ und somit eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Neben den y-Schnittmengen U_y von (3.8), betrachten wir auch die x-Schnittmengen

$$\begin{aligned} U_x &= \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\} \\ &= \begin{cases} [0, f(x)], & x \in \Omega \\ \emptyset, \quad x \notin \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Offensichtlich sind U_x und U_y Borel-Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{R}^{n-1}$ (was auch aus dem Satz 3.2 folgt).



Schnittmengen U_x und U_y

Wir verwenden den Satz 3.2 für die Maßräume $(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{B}_{n-1}, \lambda_{n-1})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ deren Produktraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n)$ ist. Nach dem Satz 3.2 beschließen wir, dass

$$\lambda_n(U) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(U_x)\, d\lambda_{n-1}(x) = \int_\Omega f(x)\, d\lambda_{n-1}(x)$$

und

$$\lambda_n(U) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(U_y)\, d\lambda(y) = \int_{[0,\infty)} \lambda_{n-1}(U_y)\, d\lambda(y).$$

■

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2. \tag{3.11}$$

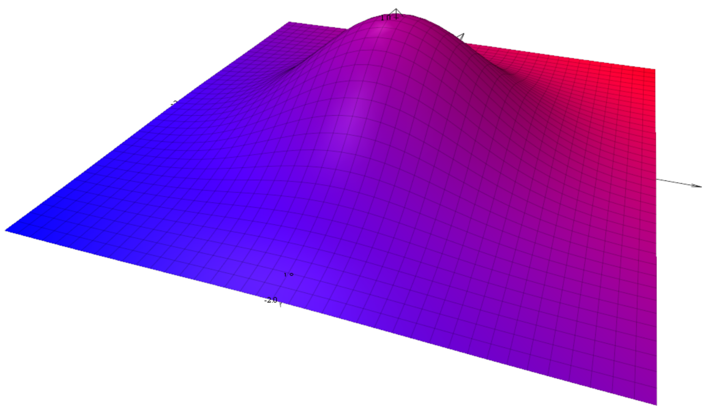
Dafür betrachten wir die Funktion

$$f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

und ihren Untergraph

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right\}$$

so dass das Integral (3.11) gleich $\lambda_3(U)$ ist.



Der Graph der Funktion $e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Um $\lambda_3(U)$ zu bestimmen, betrachten wir für jedes $z \ge 0$ die z-Schnittmenge von U

$$U_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-\left(x^2+y^2\right)} \ge z\right\}.$$

Für $z = 0$ haben wir $U_z = \mathbb{R}^2$, für $z > 1$ ist U_z leer, für $z = 1$ besteht U_z aus einem Punkt $(0,0)$, und für $z \in (0,1)$ gilt

$$U_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le \ln \frac{1}{z}\right\},$$

so dass U_z eine Kreisscheibe von Radius $\sqrt{\ln \frac{1}{z}}$ ist. Nach (3.9) und (3.10) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 &= \lambda_3 (U) \\ &= \int_{[0,\infty)} \lambda_2 (U_z)\, d\lambda (z) \\ &= \int_{(0,1)} \lambda_2 (U_z)\, d\lambda (z) \\ &= \int_0^1 \pi \ln \frac{1}{z}\, dz \\ &= \pi \left[z \left(\ln \frac{1}{z} + 1 \right) \right]_0^1 \\ &= \pi .\end{aligned}$$

3.3 Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen

Hauptsatz 3.4 (Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen) *Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ der Produktraum von den Maßräumen $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ mit σ-endlichen Maßen μ_1 und μ_2. Für jede $\mathcal{S}$-messbare Funktion $f : M \to [0, \infty]$ gilt*

$$\boxed{\int_M f\, d\mu = \int_{M_1} \left(\int_{M_2} f (x, y)\, d\mu_2 (y) \right) d\mu_1 (x)}. \tag{3.12}$$

Nämlich, die Funktion $y \mapsto f (x, y)$ ist $\mathcal{S}_2$-messbar für jedes $x \in M_1$, die Funktion

$$\widetilde{f} (x) := \int_{M_2} f (x, y)\, d\mu_2 (y)$$

ist $\mathcal{S}_1$-messbar und es gilt

$$\int_M f\, d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1. \tag{3.13}$$

Bemerkung. Analog gilt die Identität

$$\int_M f\, d\mu = \int_{M_2} \left(\int_{M_1} f (x, y)\, d\mu_1 (x) \right) d\mu_2 (y) . \tag{3.14}$$

Die Ausdrücke in den rechten Seiten von (3.12) und (3.14) heißen *Doppelintegrale.*

Beispiel. Sei Q der Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$Q = [0, 1]^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \right\} .$$

Berechnen wir das Integral

$$\int_Q (x + y)^3\, d\lambda_2.$$

Nach (3.12) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_Q (x+y)^3 \, d\lambda_2 &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x+y)^3 \, d\lambda (x) \right) d\lambda (y) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^3 \, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^1 \frac{(1+y)^4 - y^4}{4} dy \\
&= \frac{1}{4} \int_1^2 z^4 dz - \frac{1}{4} \int_0^1 y^4 dy = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Beispiel. Bestimmen wir wieder das Gauß-Integral

$$a := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Oberhalb haben wir gesehen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d\lambda_2 = \pi.$$

Nach dem Satz von Fubini erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} d\lambda (y) \right) d\lambda (x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = a^2.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Somit erhalten wir die Gleichung $a^2 = \pi$ woraus $a = \sqrt{\pi}$ folgt.

08.12.21 Vorlesung 17

Korollar 3.5 *Für beliebige $\mathcal{S}$-messbare Menge $A \subset M$ und $\mathcal{S}$-messbare Funktion $f : A \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_A f d\mu = \int_{M_1} \left(\int_{A_x} f(x,y) \, d\mu_2 (y) \right) d\mu_1 (x), \tag{3.16}$$

wobei $A_x = \{y \in M_2 : (x,y) \in A\}$ die x-Schnittmenge ist.

Beweis. Bemerken wir zuerst, dass

$$\mathbf{1}_A (x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \in A_x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \mathbf{1}_{A_x} (y). \tag{3.17}$$

Erweitern wir die Funktion f auf M mit $f|_{A^c} := 0$ so dass f als Funktion auf M $\mathcal{S}$-messbar ist. Nach (2.56), (3.12) und (3.17) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_M \mathbf{1}_A f\, d\mu = \int_{M_1}\left(\int_{M_2} \mathbf{1}_A(x,y) f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{M_1}\left(\int_{M_2} \mathbf{1}_{A_x}(y) f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{M_1}\left(\int_{A_x} f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x),\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Im Fall $f \equiv 1$ auf A ist die Identität (3.16) offensichtlich äquivalent zum Prinzip von Cavalieri.

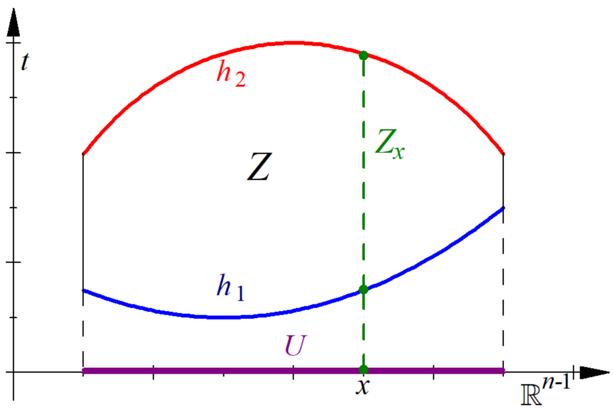
Für weitere Beispiele brauchen wir die folgende Behauptung (Verallgemeinerung von dem Korollar 3.3).

Korollar 3.6 *Seien U eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und h_1, h_2 zwei reellwertige Borel-Funktionen auf U mit $h_1 \leq h_2$. Betrachten wir die Menge $Z \subset \mathbb{R}^n$ zwischen den Graphen der Funktionen h_1 und h_2, d.h.*

$$Z = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : x \in U,\, t \in \mathbb{R},\ h_1(x) \leq t \leq h_2(x)\}.$$

Dann gilt für jede nichtnegative Borel-Funktion f auf Z die Identität

$$\int_Z f d\lambda_n = \int_U \left(\int_{[h_1(x), h_2(x)]} f(x,t)\, d\lambda(t)\right) d\lambda_{n-1}(x). \tag{3.18}$$



Die Menge Z

Beweis. Die Menge Z ist offensichtlich eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (siehe Korollar 3.3). Nach dem Korollar 3.5 für das Maß $\lambda_n = \lambda_{n-1} \times \lambda$ in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int_Z f d\lambda_n = \int_U \left(\int_{Z_x} f(x,t)\, d\lambda(t)\right) d\lambda_{n-1}(x),$$

woraus (3.18) folgt, da $Z_x = [h_1(x), h_2(x)]$. ■

Bemerkung. Für die Menge

$$Z = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : x \in U,\, t \in \mathbb{R},\ h_1(x) < t < h_2(x)\}$$

gilt (3.18) auch, da in diesem Fall $Z_x = (h_1(x), h_2(x))$ und

$$\int_{(h_1(x),h_2(x))} f(x,t)\, d\lambda(t) = \int_{[h_1(x),h_2(x)]} f(x,t)\, d\lambda(t).$$

Bemerkung. Ist $f(x,t)$ eine stetige (oder Riemann-integrierbare) Funktion von t, so kann man in (3.18) das Riemann-Integral benutzen:

$$\int_{[h_1(x),h_2(x)]} f(x,t)\, d\lambda(t) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,t)\, dt.$$

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_K |xy^3|\, d\lambda_2,$$

wobei K die Einheitskreisscheibe ist, d.h.

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Da K die Menge zwischen den Graphen der Funktionen $h_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ und $h_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $U = [-1,1]$ ist, so erhalten wir nach (3.18)

$$\begin{aligned}
\int_K |xy^3|\, d\lambda_2 &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |xy^3|\, dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2|x| \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^3 dy \right) dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} |x| \left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| \left(1-x^2\right)^2 dx \\
&= \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(x - 2x^3 + x^5\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Beispiel. Bestimmen wir das Doppelintegral Integral

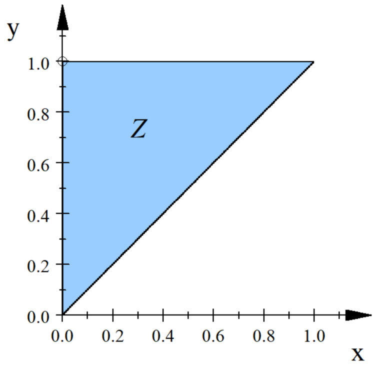
$$\int_0^1 \left(\int_x^1 y^4 e^{-xy^2} dy \right) dx.$$

Das innere Integral der Form $\int y^4 e^{-ay^2} dy$ lässt sich nicht explizit bestimmen. Stellen wir das Doppelintegral in der Form von einem Integral im Produktraum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dar und dann vertauschen wir die Reihenfolge von Integration bezüglich y und x. Es gilt nach (3.18)

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 y^4 e^{-xy^2} dy \right) dx = \int_{[0,1]} \left(\int_{[x,1]} y^4 e^{-xy^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_Z y^4 e^{-xy^2} d\lambda_2,$$

wobei Z die Menge zwischen den Graphen von Funktionen $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = 1$ auf dem Intervall $x \in [0,1]$ ist, d.h.

$$Z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \right\}.$$



Die Menge Z

Jetzt stellen wir Z dar als eine Menge zwischen den Graphen von Funktionen von y:

$$Z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y \right\}$$

d.h. Z ist die Menge zwischen den Graphen der Funktionen $h_1(y) = 0$ und $h_2(y) = y$ auf dem Intervall $y \in [0,1]$. Somit erhalten nach (3.18)

$$\begin{aligned}
\int_Z y^4 e^{-xy^2} d\lambda_2 &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,y]} y^4 e^{-xy^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y y^4 e^{-xy^2} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 y^4 \left[-\frac{e^{-xy^2}}{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} \\
&= \int_0^1 y^2 \left(1 - e^{-y^3} \right) dy \\
&= \int_0^1 y^2 dy - \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-y^3} dy^3 \\
&= \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[e^{-y^3} \right]_0^1
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(e^{-1} - 1\right) = \frac{e^{-1}}{3}$$

und

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 y^4 e^{-xy^2} dy \right) dx = \frac{e^{-1}}{3}.$$

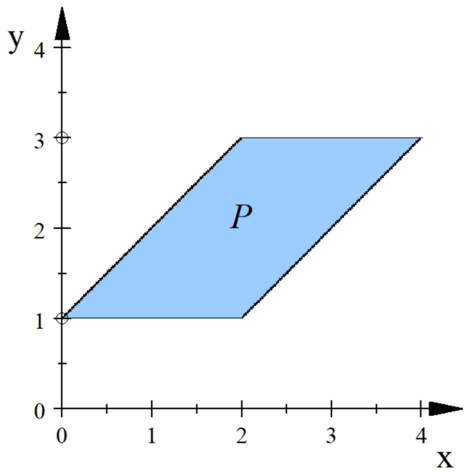
Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_P \left(3x^2 + y\right) d\lambda_2$$

wobei P das Parallelogramm mit den Seiten

$$y = x - 1, \quad y = x + 1, \; y = 1, \; y = 3$$

ist.



Das Parallelogramm P

Offensichtlich ist P die Menge zwischen den Graphen der Funktionen $h_1(y) = y - 1$ und $h_2(y) = y + 1$ auf dem Intervall $y \in [1, 3]$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_P \left(3x^2 + y\right) d\lambda_2 &= \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{y+1} \left(3x^2 + y\right) dx \right) dy \\
&= \int_1^3 \left[x^3 + xy\right]_{x=y-1}^{x=y+1} dy \\
&= \int_1^3 \left((y+1)^3 - (y-1)^3 + 2y\right) dy \\
&= \int_1^3 \left(6y^2 + 2y + 2\right) dy = \left[2y^3 + y^2 + 2y\right]_1^3 = 64.
\end{aligned}$$

3.4 Beweis von dem Prinzip von Cavalieri

Hier beweisen wir den Satz 3.2.

Beweis. Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ der Produktraum von den Maßräumen $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$. Der Satz 3.2 besagt, dass für beliebige Menge $A \in \mathcal{S}$ die folgenden Aussagen gelten:

(i) für jedes $x \in M_1$ gilt $A_x \in \mathcal{S}_2$;

(ii) die Funktion $x \mapsto \mu_2(A_x)$ auf M_1 ist $\mathcal{S}_1$-messbar:

(iii) es gilt

$$\boxed{\mu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x)}. \tag{3.19}$$

Zuerst beweisen die Aussagen (i) und (ii) unter der Annahme dass $\mu_2(M_2) < \infty$. Bezeichnen mit G das Mengensystem von allen Mengen $A \in \mathcal{S}$ die (i) und (ii) erfüllen, und beweisen, dass $\mathcal{S} = G$. Das Produkt $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Halbring, und die folgende Darstellung von $\mathcal{S}$ gilt nach dem Satz von Dynkin (Satz 1.19):

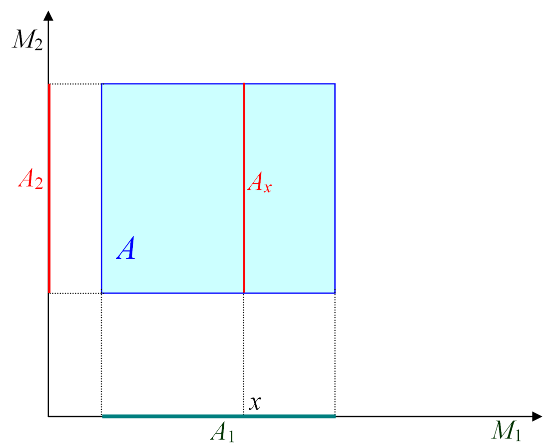
$$\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = (\rho(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2))^{\lim}. \tag{3.20}$$

Schritt 1. *Zeigen wir, dass $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \subset G$.*

Jede Menge $A \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ hat eine Form $A = A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{S}_1$ und $A_2 \in \mathcal{S}_2$. Es gilt dann

$$A_x = \begin{cases} A_2, & x \in A_1, \\ \emptyset, & x \notin A_1, \end{cases},$$

und somit $A_x \in \mathcal{S}_2$ für alle $x \in M_1$.



Menge $A = A_1 \times A_2$ und Schnittmenge A_x

Es gilt auch

$$\mu_2(A_x) = \begin{cases} \mu_2(A_2), & x \in A_1, \\ 0, & x \notin A_1, \end{cases} = \mu_2(A_2)\, \mathbf{1}_{A_1}(x), \tag{3.21}$$

und somit ist $\mu_2(A_x)$ eine $\mathcal{S}_1$-messbare Funktion von x. Wir erhalten, dass $A \in G$, was die Inklusion $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \subset G$ beweist.

Schritt 2. *Zeigen wir, dass G abgeschlossen bezüglich endlicher disjunkten Vereinigungen ist.*

Seien A, B zwei disjunkte Mengen aus G. Da

$$(A \sqcup B)_x = A_x \sqcup B_x,$$

es folgt, dass $(A \sqcup B)_x \in \mathcal{S}_2$. Da

$$\mu_2\left((A \sqcup B)_x\right) = \mu_2\left(A_x \sqcup B_x\right) = \mu_2(A_x) + \mu_2(B_x),$$

es folgt, dass die Funktion $x \mapsto \mu_2\left((A \sqcup B)_x\right)$ $\mathcal{S}_1$-messbar ist. Somit $A \sqcup B \in G$.

Da $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \subset G$ und der Ring $\rho(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ aus den endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ besteht (Satz 1.3), so erhalten wir nach den Schritten 1 und 2, dass

$$\rho(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) \subset G. \tag{3.22}$$

Schritt 3. *Zeigen wir, dass G abgeschlossen bezüglich monotones Limes ist.*

Sei $\{A_n\} \subset G$ eine monoton steigende Folge und setzen wir

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n A_n.$$

Dann gilt für alle $x \in M_1$

$$A_x = \bigcup_n (A_n)_x$$

und somit $A_x \in \mathcal{S}_2$. Auch haben wir

$$\mu_2(A_x) = \lim_{n\to\infty} \mu_2\left((A_n)_x\right) \tag{3.23}$$

(Aufgabe 12), woraus folgt, dass $\mu_2(A_x)$ $\mathcal{S}_1$-messbar ist als ein punktweiser Grenzwert der Folge von $\mathcal{S}_1$-messbaren Funktionen. Somit $A \in G$.

Ist $\{A_n\}$ monoton fallend, dann gilt

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_n A_n$$

und somit

$$A_x = \bigcap_n (A_n)_x$$

und $A_x \in \mathcal{S}_2$. Nach der Voraussetzung $\mu_2(M_2) < \infty$ sind alle Maße $\mu_2(A_n)_x$ endlich, woraus folgt, dass die Identität (3.23) in diesem Fall auch gilt (Aufgabe 13).

Schritt 4. *Zeigen wir, dass $\mathcal{S} = G$.*

Nach (3.20), (3.22) und Schritt 3 erhalten wir

$$\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = \left(\rho(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)\right)^{\lim} \subset G^{\lim} = G,$$

woraus $\mathcal{S} = G$ folgt.

Schritt 5. *Beweisen wir, dass jede Menge $A \in \mathcal{S}$ die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt auch wenn $\mu_2(M_2) = \infty$.*

Da μ_2 σ-endlich ist, so gibt es eine Zerlegung

$$M_2 = \bigsqcup_k B_k$$

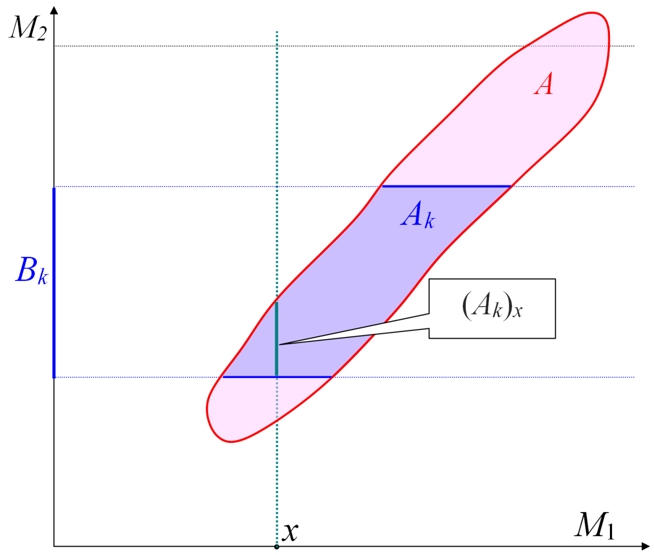
wobei $B_k \in \mathcal{S}_2$ und $\mu_2(B_k) < \infty$. Für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$A_k = A \cap (M_1 \times B_k)$$

so dass $A_k \in \mathcal{S}$ und

$$A = \bigsqcup_k A_k.$$

Da $\mu_2(B_k) < \infty$ und $A_k \subset M_1 \times B_k$ so erhalten wir nach dem obigen Argument in der Grundmenge $M_1 \times B_k$ dass A_k die Bedingung (i) und (ii) erfüllt.



Schnittmenge $(A_k)_x$

Es folgt, dass die Schnittmenge

$$A_x = \bigsqcup_k (A_k)_x$$

auch $\mathcal{S}_2$-messbar ist und die Funktion

$$\mu_2(A_x) = \sum_k \mu_2((A_k)_x)$$

auch $\mathcal{S}_1$-messbar ist.

Schritt 6. *Beweisen wir jetzt die Aussage (iii) d.h. die Identität (3.19).*

Für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$\nu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x)$$

und beweisen, dass ν ein Maß auch $\mathcal{S}$ ist. Offensichtlich gilt $\nu(A) \geq 0$ und $\nu(\emptyset) = 0$. Sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine disjunkte Folge von Elementen von $\mathcal{S}$. Für die Vereinigung $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt

$$A_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$$

und somit

$$\mu_2(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2((A_n)_x).$$

Nach Korollar 2.16 erhalten wir

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1 = \int_{M_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2((A_n)_x)\right) d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_1} \mu_2((A_n)_x)\, d\mu_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),\end{aligned}$$

was die σ-Additivität von ν beweist.

Die Identität (3.19) ist äquivalent zur Aussage, dass $\mu = \nu$ auf $\mathcal{S}$. Vergleichen wir die Maße μ und ν zuerst auf $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Für eine Menge $A \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ der Form $A = A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{S}_1$ und $A_2 \in \mathcal{S}_2$ erhalten wir nach (3.21)

$$\nu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x) = \int_{A_1} \mu_2(A_2)\, d\mu_1(x) = \mu_2(A_2)\, \mu_1(A_1) = \mu(A).$$

Da die Maße μ und ν auf dem Halbring $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ übereinstimmen so erhalten wir nach der Eindeutigkeit der Erweiterung (Satz 1.12) dass $\mu = \nu$ auf $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$, under der Bedingung, dass μ und ν σ-endlich sind. Das Maß μ ist σ-endlich nach dem Satz 3.1: es gibt eine Überdeckung

$$M = \bigcup_k C_k$$

mit $C_k \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ und $\mu(C_k) < \infty$. Da $\nu = \mu$ auf $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, so gilt auch $\nu(C_k) < \infty$,so dass ν auch σ-endlich ist. ■

10.12.21 Vorlesung 18

3.5 Beweis von dem Satz von Fubini

Beweis von dem Satz 3.4. Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ der Produktraum zweier Maßräume $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2. Bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ die Menge von allen nichtnegativen $\mathcal{S}$-messbaren Funktionen auf M, und mit $\mathcal{G}$ die Menge von allen Funktionen $f \in \mathcal{F}$, die alle Behauptungen des Satzes 3.4 erfüllen:

(i) die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{S}_2$-messbar für jedes $x \in M_1$,

(ii) die Funktion

$$\widetilde{f}(x) := \int_{M_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$$

ist $\mathcal{S}_1$-messbar,

(iii) und es gilt die Identität

$$\int_M f\,d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1 \quad \left(= \int_{M_1} \left(\int_{M_2} f(x,y)\,d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \right).$$

Wir müssen beweisen, dass die Eigenschaften (i)-(iii) für alle Funktionen $f \in \mathcal{F}$ gelten, d.h. dass $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Schritt 1. *Beweisen wir, dass jede Indikatorfunktion $f = \mathbf{1}_A$ mit $A \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{G}$ liegt.*

Nach (3.17) haben wir für alle $x \in M_1$ und $y \in M_2$

$$f(x,y) = \mathbf{1}_A(x,y) = \mathbf{1}_{A_x}(y).$$

Nach dem Satz 3.2 gilt $A_x \in \mathcal{S}_2$ und somit ist die Funktion $f(x,\cdot)$ $\mathcal{S}_2$-messbar. Darüber hinaus gilt

$$\widetilde{f}(x) = \int_{M_2} f(x,y)\; d\mu_2(y) = \int_{M_2} \mathbf{1}_{A_x}\, d\mu_2 = \mu_2(A_x). \tag{3.24}$$

Nach dem Satz 3.2 ist die Funktion $\widetilde{f}(x) = \mu_2(A_x)$ $\mathcal{S}_1$-messbar und es gilt

$$\int_M f\,d\mu = \mu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\,d\mu_1(x) = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1,$$

was beweist (3.13). Somit liegt $\mathbf{1}_A$ in $\mathcal{G}$ (und das ist äquivalent zum Prinzip von Cavalieri).

Schritt 2. *Beweisen wir, dass für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in [0,\infty)$*

$$f, g \in \mathcal{G} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{G}.$$

Da $f, g \in \mathcal{G}$ so sind die Funktionen $f(x,\cdot)$ und $g(x,\cdot)$ $\mathcal{S}_2$-messbar für jedes $x \in M_1$, die Funktionen

$$\widetilde{f}(x) = \int_{M_2} f(x,\cdot)\,d\mu_2 \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(x) = \int_{M_2} g(x,\cdot)\,d\mu_2$$

sind $\mathcal{S}_1$-messbar, und

$$\int_M f d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1 \quad \text{und} \quad \int_M g d\mu = \int_{M_1} \widetilde{g} d\mu_1.$$

Setzen wir $h = \alpha f + \beta g$. Es folgt, dass für jedes $x \in M_1$ die Funktion

$$h(x,\cdot) = \alpha f(x,\cdot) + \beta g(x,\cdot)$$

$\mathcal{S}_2$-messbar ist, die Funktion

$$\widetilde{h}(x) = \int_{M_2} h(x,\cdot)\,d\mu_2 = \alpha \widetilde{f}(x) + \beta \widetilde{g}(x)$$

$\mathcal{S}_1$-messbar ist, und

$$\int_M h d\mu = \alpha \int_M f d\mu + \beta \int_M g d\mu = \alpha \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1 + \beta \int_{M_1} \widetilde{g} d\mu_1 = \int_{M_1} \widetilde{h} d\mu_1.$$

Somit liegt h in $\mathcal{G}$.

Schritt 3. *Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{G}$. Gilt $f_n \to f$ punktweise und $f_n \le f$ für alle n, dann liegt f auch in $\mathcal{G}$ (d.h. $\mathcal{G}$ ist abgeschlossen bezüglich der einseitigen Konvergenz).*

Offensichtlich gilt $f \ge 0$ und nach dem Satz 2.3 ist die Funktion f $\mathcal{S}$-messbar. Nach dem Satz 2.13 gilt

$$\int_M f_n d\mu \to \int_M f d\mu. \tag{3.25}$$

Für jedes $x \in M_1$ gilt $f_n(x,\cdot) \to f(x,\cdot)$ so dass die Funktion $f(x,\cdot)$ $\mathcal{S}_2$-messbar ist. Da $f_n(x,\cdot) \le f(x,\cdot)$, so gilt nach dem Satz 2.13

$$\widetilde{f}_n(x) = \int_{M_2} f_n(x,\cdot)\, d\mu_2 \to \int_{M_2} f(x,\cdot)\, d\mu_2 = \widetilde{f}(x).$$

Offensichtlich gilt auch $\widetilde{f}_n(x) \le \widetilde{f}(x)$. Da die Funktionen $\widetilde{f}_n$ $\mathcal{S}_1$-messbar sind, so ist auch die Funktion $\widetilde{f}$ $\mathcal{S}_1$-messbar, und nach dem Satz 2.13 gilt

$$\int_{M_1} \widetilde{f}_n d\mu_1 \to \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1. \tag{3.26}$$

Für die Funktionen $f_n \in \mathcal{G}$ gilt die Identität

$$\int_M f_n\, d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f}_n d\mu_1,$$

was zusammen mit (3.25) und (3.26) ergibt (3.13), so dass $f \in \mathcal{G}$.

Schritt 4. *Beweisen wir jetzt dass jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ liegt.*

Nach dem Lemma 2.14 gibt es eine Folge $\{f_n\}$ von Elementarfunktionen mit $f_n \to f$ und $f_n \le f$. Nach den Schritten 1 und 2 liegen alle Elementarfunktionen f_n in $\mathcal{G}$. Nach dem Schritt 3 liegt f auch in $\mathcal{G}$, was zu beweisen war. ■

3.6 Satz von Fubini für signierte Funktionen

Sei $(M,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum. Sei $E = E(x)$ eine Aussage, die von $x \in M$ abhängt. Man sagt, dass E μ-fast überall gilt (kurz: μ-f.ü. oder f.ü.), wenn die Menge

$$N = \{x \in M : E(x) \text{ ist falsch}\}$$

eine Nullmenge ist. In diesem Fall sagt man auch, dass $E(x)$ für *μ-fast alle* x gilt.

Hauptsatz 3.7 (Satz von Fubini für integrierbare Funktionen) *Sei $(M,\mathcal{S},\mu)$ der Produktraum zweier Maßräume $(M_1,\mathcal{S}_1,\mu_1)$ und $(M_2,\mathcal{S}_2,\mu_2)$ mit σ-endlichen Maßen μ_1 und μ_2. Für jede μ-integrierbare Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt die Identität*

$$\int_M f d\mu = \int_{M_1}\left(\int_{M_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x).$$

Nämlich, the function $y \mapsto f(x,y)$ ist μ_2-integrierbar für μ_1-fast alle $x \in M_1$, die Funktion

$$\widetilde{f}(x) := \int_{M_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \tag{3.27}$$

ist μ_1-integrierbar, und es gilt

$$\int_M f d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1.$$

Bemerkung. Die Funktion $\widetilde{f}(x)$ wird von (3.27) nur für diejenigen x definiert für die die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ μ_2-integrierbar ist (was nach für μ_1-fast alle x der Fall ist). Ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ für ein x nicht μ_2-integrierbar, so setzen wir $\widetilde{f}(x) := 0$.

Beweis. Nach der Integrierbarkeit von f haben wir

$$\int_M f_+ d\mu < \infty \text{ und } \int_M f_- d\mu < \infty.$$

Nach dem Satz 3.4 sind die Funktionen

$$\widetilde{f_+}(x) := \int_{M_2} f_+(x,y)\, d\mu_2(y) \quad \text{und} \quad \widetilde{f_-}(x) := \int_{M_2} f_-(x,y)\, d\mu_2(y)$$

$\mathcal{S}_1$-messbar und es gelten die Identitäten

$$\int_M f_+ d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f_+}\, d\mu_1 \text{ und } \int_M f_- d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f_-}\, d\mu_1.$$

Die Funktionen $\widetilde{f_+}$ und $\widetilde{f_-}$ sind somit μ_1-integrierbar. Nach dem Satz 2.22 sind $\widetilde{f_+}(x)$ und $\widetilde{f_-}(x)$ endlich für μ_1-fast alle $x \in M_1$, d.h. die Menge

$$N := \left\{x \in M_1 : \widetilde{f_+}(x) = +\infty \text{ oder } \widetilde{f_-}(x) = +\infty\right\}$$

ist eine Nullmenge. Die Funktionen

$$y \mapsto f_+(x,y) \quad \text{und} \quad y \mapsto f_-(x,y)$$

sind somit μ_2-integrierbar für alle $x \in N^c$. Dann ist auch die Funktion

$$y \mapsto f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$$

μ_2-integrierbar für alle $x \in N^c$ (insbesondere für μ_1-fast alle $x \in M_1$), und für alle $x \in N^c$ gilt die Identität

$$\widetilde{f}(x) := \int_{M_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) = \widetilde{f_+}(x) - \widetilde{f_-}(x).$$

Für $x \in N$ setzen wir nach Definition

$$\widetilde{f}(x) := 0.$$

Dann ist $\widetilde{f}$ μ_1-messbar da die Menge N^c μ_1-messbar ist und

$$\widetilde{f} = \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f} = \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_+} - \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_-}.$$

Die Funktionen $\mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_+}$ und $\mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_-}$ sind μ_1-integrierbar da

$$\int_{M_1} \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_+}d\mu_1 = \int_{M_1} \widetilde{f_+}d\mu_1 < \infty \quad \text{und} \quad \int_{M_1} \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_-}d\mu_1 = \int_{M_1} \widetilde{f_-}d\mu_1 < \infty.$$

Es folgt daraus auch, dass $\widetilde{f}$ auch μ_1-integrierbar ist und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{M_1} \widetilde{f}d\mu_1 &= \int_{M_1} \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_+}d\mu_1 - \int_{M_1} \mathbf{1}_{N^c}\widetilde{f_-}d\mu_1 \\ &= \int_{M_1} \widetilde{f_+}d\mu_1 - \int_{M_1} \widetilde{f_-}d\mu_1 \\ &= \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu \\ &= \int_M f\, d\mu,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

3.7 Vollständiges Produktmaß

Ein Maß μ im Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ heißt vollständig wenn alle Nullmengen von μ $\mathcal{S}$-messbar sind. In diesem Fall bezeichnet man $(M, \mathcal{S}, \mu)$ als vollständigen Maßraum. Zum Beispiel, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ ist vollständig während $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n)$ ist nicht vollständig.

Ein σ-endliches Maß μ auf einem Halbring S lässt sich auf σ-Algebren $\sigma(S)$ und $\overline{\sigma}(S)$ erweitern (Satz 1.12), wobei $\overline{\sigma}(S)$ die kleinste σ-Algebra ist die $\sigma(S)$ und alle Nullmengen von μ enthält (Korollar 1.27). Somit ist μ mit dem Definitionsbereich $\overline{\sigma}(S)$ immer vollständig (insbesondere ist das der Fall für $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$).

Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ der Produktraum zweier Maßräume $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ mit σ-endlichen Maßen μ_1 und μ_2, wobei $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$. Betrachten wir auch die σ-Algebra $\overline{\mathcal{S}} = \overline{\sigma}(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ wo das Maß $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ auch definiert ist und vollständig ist.

Das Maß μ mit dem Definitionsbereich $\overline{\mathcal{S}}$ heißt das *vollständige Produktmaß*, und der Maßraum $\left(M, \overline{\mathcal{S}}, \mu\right)$ heißt der *vollständige Produktraum.*

Zum Beispiel, der vollständiger Produktraum von den Maßräumen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ und $(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m, \lambda_m)$ ist $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{M}_{n+m}, \lambda_{n+m})$.

Hauptsatz 3.8 (Satz von Fubini für vollständige Maße) *Sei $\left(M, \overline{\mathcal{S}}, \mu\right)$ der vollständige Produktraum zweier vollständigen Maßräume $(M_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$. Für jede $\overline{\mathcal{S}}$-messbare Funktion $f : M \to [0, \infty]$ gilt die Identität*

$$\int_M f d\mu = \int_{M_1} \left(\int_{M_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x).$$

Nämlich, the function $y \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{S}_2$-messbar für μ_1-fast alle $x \in M_1$, die Funktion

$$\widetilde{f}(x) := \int_{M_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$$

ist $\mathcal{S}_1$-messbar, und es gilt

$$\int_M f d\mu = \int_{M_1} \widetilde{f} d\mu_1.$$

Bemerkung. Ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ für ein $x \in M_1$ nicht $\mathcal{S}_2$-messbar, so setzen wir $\widetilde{f}(x) := 0$.

Bemerkung. Die ähnlichen Aussagen gelten für μ-integrierbare Funktionen f.

Beweis. Wie im Beweis von dem Satz 3.4, reicht es die obigen Aussagen im Fall $f = \mathbf{1}_A$ für alle $A \in \overline{\mathcal{S}}$ zu beweisen, d.h. die folgende version von dem Prinzip von Cavalieri: für jedes $A \in \overline{\mathcal{S}}$ ist A_x $\mathcal{S}_2$-messbar für μ_1-fast alle $x \in M_1$, die Funktion $x \mapsto \mu_2(A_x)$ ist $\mathcal{S}_1$-messbar und es gilt

$$\mu(A) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x),$$

wobei

$$A_x = \{y \in M_2 : (x,y) \in A\}$$

(im Fall wenn $A_x \notin \mathcal{S}_2$ setzen wir $\mu_2(A_x) := 0$).

Nach dem Satz 1.26, für jedes $A \in \overline{\mathcal{S}}$ gibt es eine Menge $B \in \mathcal{S}$ so dass $A \subset B$ und

$$N := B - A$$

eine Nullmenge ist. Nach dem Prinzip von Cavalieri (Satz 3.2) gilt folgendes: die Schnittmenge B_x ist $\mathcal{S}_2$-messbar für alle $x \in M_1$, die Funktion $x \mapsto \mu_2(B_x)$ ist $\mathcal{S}_1$-messbar und

$$\mu(B) = \int_{M_1} \mu_2(B_x)\, d\mu_1(x).$$

Zeigen wir, dass N_x eine Nullmenge in M_2 für μ_1-fast alle $x \in M_1$ ist. Da $N \in \overline{\mathcal{S}}$, so gibt eine Menge $L \in \mathcal{S}$ so dass $N \subset L$ und $\mu(L) = 0$. Nach dem Prinzip von Cavalieri (Satz 3.2) ist L_x $\mathcal{S}_2$-messbar für alle $x \in M_1$, die Funktion $x \mapsto \mu_2(L_x)$ ist $\mathcal{S}_1$-messbar und es gilt

$$\mu(L) = \int_{M_1} \mu_2(L_x)\, d\mu_1(x).$$

Da $\mu(L) = 0$, so folgt es dass $\mu_2(L_x) = 0$ für μ_1-fast alle $x \in M_1$ (Satz 2.22). Da $N_x \subset L_x$, so ist N_x eine Nullmenge in M_2 für μ_1-fast alle $x \in M_1$.

Da μ_2 vollständig ist, so gilt $N_x \in \mathcal{S}_2$ für μ_1-fast alle $x \in M_1$. Da

$$A_x = B_x - N_x$$

so erhalten wir, dass $A_x \in \mathcal{S}_2$ für μ_1-fast alle x, und

$$\mu_2(A_x) = \mu_2(B_x) \text{ für } \mu_1\text{-fast alle } x.$$

Es folgt, dass

$$\mu(A) = \mu(B) = \int_{M_1} \mu_2(B_x)\, d\mu_1(x) = \int_{M_1} \mu_2(A_x)\, d\mu_1(x),$$

was zu beweisen war. ∎

3.8 * Eine Eigenschaft von Produktraum

Das folgende Lemma ergibt (3.1).

Lemma 3.9 *Seien S_1, S_2 zwei Mengensysteme in Grundmengen M_1 bzw M_2 mit $M_1 \in S_1$ und $M_2 \in S_2$. Dann gilt die Identität*

$$\sigma(S_1 \times S_2) = \sigma(\sigma(S_1) \times \sigma(S_2)).$$

Beweis. Da $S_i \subset \sigma(S_i)$, so gilt

$$\sigma(S_1 \times S_2) \subset \sigma(\sigma(S_1) \times \sigma(S_2)).$$

Um die Inklusion "$\supset$" zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass

$$\sigma(S_1 \times S_2) \supset \sigma(\sigma(S_1) \times S_2), \tag{3.28}$$

da analog gilt

$$\sigma(S_1 \times S_2) \supset \sigma(S_1 \times \sigma(S_2))$$

und somit

$$\sigma(S_1 \times S_2) \supset \sigma(\sigma(S_1) \times S_2) \supset \sigma(\sigma(S_1) \times \sigma(S_2)).$$

Die Inklusion (3.28) ist äquivalent zu

$$\sigma(S_1 \times S_2) \supset \sigma(S_1) \times S_2, \tag{3.29}$$

d.h. für jedes $A \in \sigma(S_1)$ und $B \in S_2$ gilt

$$A \times B \in \sigma(S_1 \times S_2).$$

Um (3.29) zu beweisen, betrachten wir das Mengensystem

$$G = \{A \in \sigma(S_1) : A \times B \in \sigma(S_1 \times S_2) \text{ für alle } B \in S_2\}$$

und zeigen, dass $G \supset \sigma(S_1)$. Offensichtlich gilt $G \supset S_1$. Es reicht zu beweisen, dass G eine σ-Algebra in M_1 ist, woraus $G \supset \sigma(S_1)$ folgen wird.

(i) G enthält $\emptyset$ und M_1 da $M_1 \in S_1$ und $\emptyset \times B = \emptyset \in \sigma(S_1 \times S_2)$.

(ii) G ist abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Für eine Folge $A_k \in G$ and jedes $B \in S_2$ gilt

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \times B = \bigcup_k (A_k \times B) \in \sigma(S_1 \times S_2),$$

da $A_k \times B \in \sigma(S_1 \times S_2)$. Es folgt, dass $\bigcup_k A_k \in G$.

(iii) G ist abgeschlossen bezüglich des Komplements. Für jedes $A \in G$ und für jedes $B \in S_2$ haben wir

$$A^c \times B = (M_1 - A) \times B = M_1 \times B - A \times B \in \sigma(S_1 \times S_2),$$

da $M_1 \times B$ und $A \times B$ in $S_1 \times S_2$ liegen. Es folgt, dass $A^c \in G$.

Somit ist G eine σ-Algebra, was zu beweisen war. ∎

Chapter 4

Integration in $\mathbb{R}^n$

4.1 Transformationssatz

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion (wobei $a < b$ und $\alpha < \beta$). Die Substitutionsregel besagt, dass

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Sei φ monoton steigend mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Dann schreiben wir (4.1) um als die Identität für Lebesgue-Integralen:

$$\int_{[a,b]} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(x))\, |\varphi'(x)|\, d\lambda(x). \tag{4.2}$$

Sei jetzt φ monoton fallend mit $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$. Dann erhalten wir aus (4.1)

$$\int_a^b f(y)\, dy = -\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, dy = -\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx,$$

so dass wieder

$$\boxed{\int_{[a,b]} f(y)\, d\lambda(y) = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(x))\, |\varphi'(x)|\, d\lambda(x)}.$$

Somit gilt die Identität (4.2) in den beiden Fällen, insbesondere immer, wenn φ ein *Diffeomorphismus* von $[\alpha, \beta]$ nach $[a,b]$ ist.

15.12.21 **Vorlesung 19**

Definition. Seien U, V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\Phi : U \to V$ heißt *Diffeomorphismus* wenn Φ bijektiv und stetig differenzierbar ist, und die inverse Abbildung Φ^{-1} auch stetig differenzierbar ist.

Sei $\Phi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung. Die totale Ableitung $\Phi'(x)$ ist dann eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, deren Matrix mit der Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

übereinstimmt.

Bemerkung. Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to V$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn $\det \Phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. In der Tat, nach dem Satz von der inversen Funktion, die inverse Abbildung $\Phi^{-1} : V \to U$ ist stetig differenzierbar in der Nähe von jedem Punkt $\Phi(x)$ mit $\det \Phi'(x) \neq 0$, woraus folgt, dass Φ^{-1} stetig differenzierbar in V ist. Es gilt auch

$$\left(\Phi^{-1}(y)\right)' = \left(\Phi'(x)\right)^{-1}$$

für $y = \Phi(x)$.

Hauptsatz 4.1 (Transformationssatz) *Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für jede nichtnegative Borel-Funktion f auf V und für $\mu = \lambda_n$ gilt die Identität*

$$\boxed{\int_V f d\mu = \int_U (f \circ \Phi) \left|\det \Phi'\right| d\mu}. \tag{4.3}$$

Die Identität (4.3) gilt auch für jede integrierbare Borel-Funktion $f : V \to \mathbb{R}$.

Bemerkung. Nach dem Satz 2.2 ist die Funktion $f \circ \Phi$ Borel (als Komposition von Borel-Funktionen) und somit ist das Integral an der rechten Seite von (4.3) wohldefiniert. Die Identität (4.3) gilt auch für (Lebesgue-)messbare Funktionen f, aber die Messbarkeit von $f \circ \Phi$ ist in diesem Fall nicht automatisch und muss bewiesen werden.

Schreiben wir (4.3) ausführlicher um wie folgt:

$$\int_V f(y)\, d\mu(y) = \int_U f(\Phi(x)) \left|\det \Phi'(x)\right| d\mu(x), \tag{4.4}$$

was mit dem 1-dimensionalen Fall (4.2) übereinstimmt. Die Formel (4.4) lässt sich als eine Substitutionsregel betrachten: im Integral $\int_V f(y)\, d\mu(y)$ macht man die Substitution $y = \Phi(x)$ mit

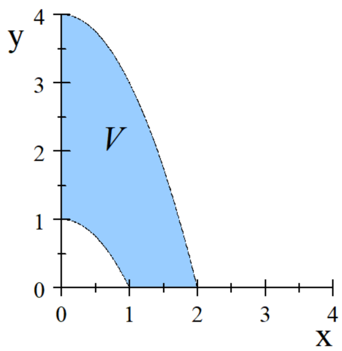
$$d\mu(y) = \left|\det \Phi'(x)\right| d\mu(x) = \left|\det \frac{dy}{dx}\right| d\mu(x),$$

wobei $\frac{dy}{dx}$ die andere Notation für $\Phi'(x)$ ist. Die Determinante $\det \Phi'(x)$ heißt die *Funktionaldeterminante* der Transformation $y = \Phi(x)$.

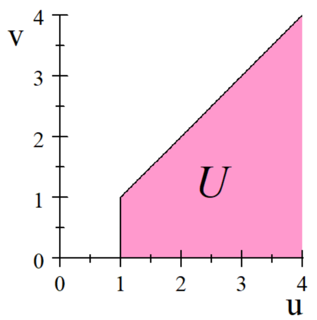
Beispiel. Berechnen wir $\lambda_2(V)$ wobei $V \subset \mathbb{R}^2$ die offenen Menge ist, die von den Parabeln

$$x^2 + y = 1, \quad x^2 + y = 4$$

im ersten Quadrant begrenzt ist.



Wir haben
$$V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y<4,\ x>0,\ y>0\right\}.$$
Betrachten wir die neuen Variablen
$$u=x^2+y,\quad v=y$$
und die entsprechende Abbildung
$$(u,v)=\Psi(x,y):=\left(x^2+y,y\right).$$
Offensichtlich haben wir
$$U:=\Psi(V)=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 1<u<4,\ 0<v<u\right\}.$$



Die Abbildung $\Psi : V\to U$ stetig differenzierbar, und die inverse Abbildung $\Phi=\Psi^{-1}$ existiert und sieht wie folgt aus:
$$(x,y)=\Phi(u,v)=\left(\sqrt{u-v},v\right).$$
Die Abbildung $\Phi : U\to V$ ist auch stetig differenzierbar und somit ist ein Diffeomorphismus. Wir haben
$$\Phi'=\begin{pmatrix}\partial_u\Phi_1 & \partial_v\Phi_1\\ \partial_u\Phi_2 & \partial_v\Phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{2\sqrt{u-v}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
und
$$\det\Phi'=\frac{1}{2\sqrt{u-v}}.$$
Mit Hilfe von den Transformationssatz 4.1 und Korollar 3.6 erhalten wir für $f=1$
$$\begin{aligned}\lambda_2(V) &= \int_V d\lambda_2=\int_U|\det\Phi'|\,d\lambda_2\\ &= \int_U\frac{1}{2\sqrt{u-v}}d\lambda_2(u,v)\\ &= \int_1^4\left(\int_0^u\frac{1}{2\sqrt{u-v}}dv\right)du\\ &= \int_1^4\left[-\sqrt{u-v}\right]_{v=0}^{v=u}du=\int_1^4\sqrt{u}du=\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^4=\frac{14}{3}.\end{aligned}$$

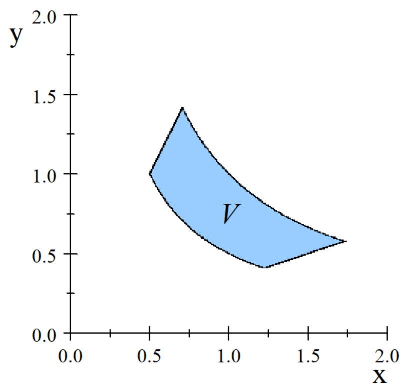
Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_V x^2 d\lambda_2(x,y),$$

wobei V die offene Teilmenge im ersten Quadrant ist, die von der folgenden vier Kurven

$$xy = 1/2, \quad xy = 1, \quad y = \frac{1}{3}x, \quad y = 2x$$

begrenzt ist.



Wir haben

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \ 1/2 < xy < 1, \quad 1/3 < y/x < 2\right\}.$$

Betrachten wir die neuen Variablen

$$u = xy, \quad v = x/y$$

und die Abbildung

$$(u,v) = \Psi(x,y) := (xy, x/y)$$

so dass

$$U := \Psi(V) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{1}{2} < u < 1, \quad \tfrac{1}{2} < v < 3\right\} = (\tfrac{1}{2}, 1) \times (\tfrac{1}{2}, 3).$$

Die Abbildung $\Psi : V \to U$ stetig differenzierbar, und die inverse Abbildung $\Phi = \Psi^{-1}$ existiert und sieht wie folgt aus:

$$(x,y) = \Phi(u,v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}\right).$$

Die Abbildung $\Phi : U \to V$ ist stetig differenzierbar und somit ein Diffeomorphismus. Die Funktionaldeterminante von Φ ist

$$\det \Phi' = \det \begin{pmatrix} \partial_u \Phi_1 & \partial_v \Phi_1 \\ \partial_u \Phi_2 & \partial_v \Phi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{v^2}} - \frac{1}{4\sqrt{v^2}} = -\frac{1}{2v},$$

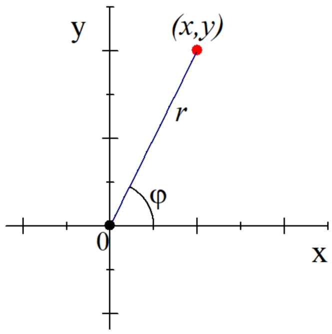
d.h. $|\det\Phi'| = \frac{1}{2v}$. Da $x^2 = uv$, so erhalten wir nach den Transformationssatz und Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned}
\int_V x^2 d\lambda_2(x,y) &= \int_U uv\,|\det\Phi'|\,d\lambda_2(u,v)\\
&= \int_U \frac{u}{2} d\lambda_2(u,v)\\
&= \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^3 dv\right)\frac{u}{2}du\\
&= \int_{1/2}^1 \frac{5}{4}udu = \frac{5}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{1/2}^1 = \frac{15}{32}.
\end{aligned}$$

4.2 Integration in Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

We benutzen hier die Transformationsformel, um die Integrale auf $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Polarkoordinaten zu bestimmen.



Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

Bezeichnen wir mit (r,φ) die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Definitionsbereich

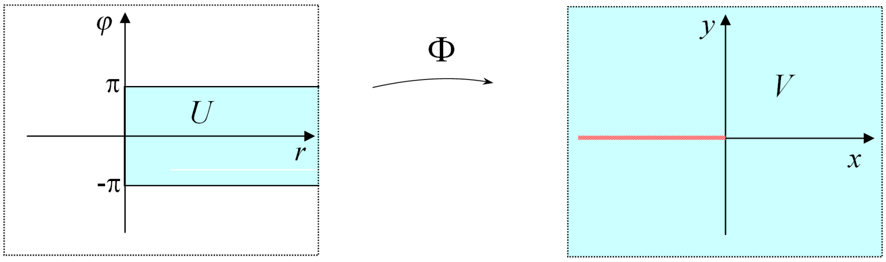
$$U = \{(r,\varphi) : r > 0,\ -\pi < \varphi < \pi\} = (0,\infty)\times(-\pi\times\pi).$$

Der Übergang zu den kartesischen Koordinaten (x,y) wird durch die folgende Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ angegeben:

$$(x,y) = \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Die Bildmenge von Φ ist

$$V := \Phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Halb-Achse X}.$$



Die Abbildung $\Phi : U \to V$ ist bijektiv, ihre Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \partial_r \Phi_1 & \partial_\varphi \Phi_1 \\ \partial_r \Phi_2 & \partial_\varphi \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

und somit

$$\det \Phi' = r \neq 0.$$

Folglich ist Φ ein Diffeomorphismus von U und V.

Der Satz 4.1 ergibt die folgende Identität für jede nichtnegative (bzw integrierbare) Borel-Funktion f auf V:

$$\boxed{\int_V f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\lambda_2(r,\varphi)}. \tag{4.5}$$

Ist f eine Borel-Funktion auf $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_V f d\lambda_2$$

da die Differenz $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine Nullmenge ist. Einsetzen dies in (4.5) und Anwendung an der rechten Seite den Satz von Fubini ergibt die Identität

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(-\pi,\pi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi \right) r dr.} \tag{4.6}$$

Beispiel. Sei

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

die Kreisscheibe von Radius R. Anwendung von (4.6) mit der Funktion $f = \mathbf{1}_D$ ergibt

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_D d\lambda_2 = \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{(0,R)}(r)\, d\varphi \right) r dr = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2.$$

Beispiel. Berechnen wir wieder das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d\lambda_2$$

mit Hilfe von (4.6):

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d\lambda_2 = \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} d\varphi \right) r dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^\infty e^{-r^2} dr^2 = \pi.$$

Wir haben oberhalb in (3.15) mit Hilfe von dem Satz von Fubini schon gesehen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d\lambda_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

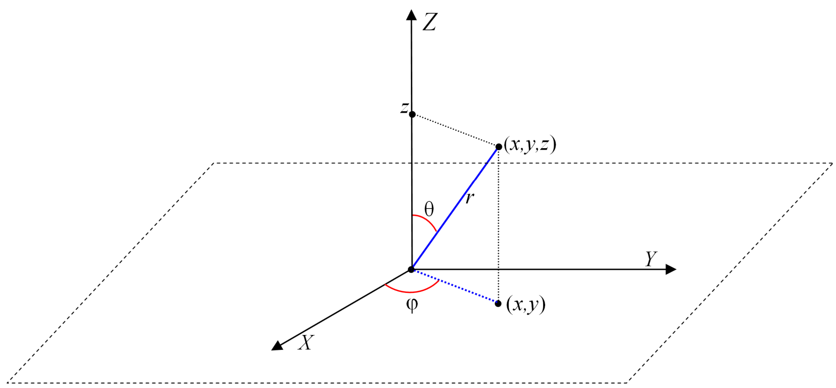
Somit bestimmen wir noch einmal den Wert von dem Gauß-Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$.

Betrachten wir jetzt die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ (Kugelkoordinaten): (r, φ, θ) mit dem Definitionsbereich

$$U = \{(r, \varphi, \theta) : r > 0, -\pi < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < \pi\} = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi).$$



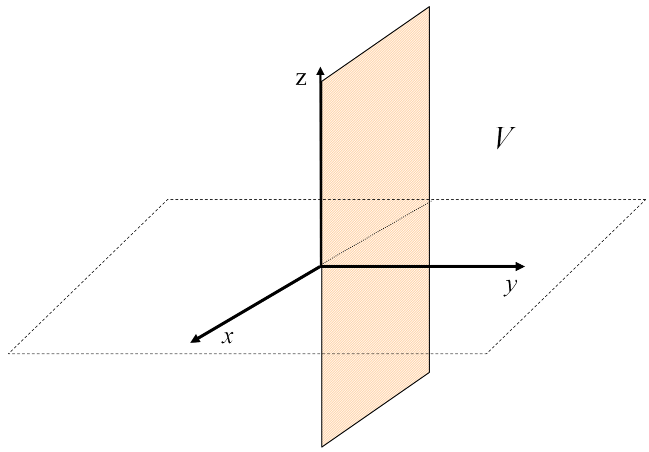
Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Der Übergang zu den kartesischen Koordinaten wird durch die folgende Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ angegeben:

$$(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta). \tag{4.7}$$

Die Bildmenge von Φ ist

$$V = \Phi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Halb-Ebene}.$$



Die Menge $V = \mathbb{R}^2 \backslash$Halb-Ebene

Die Abbildung $\Phi : U \to V$ ist bijektiv und ihre Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \partial_r \Phi_1 & \partial_\varphi \Phi_1 & \partial_\theta \Phi_1 \\ \partial_r \Phi_2 & \partial_\varphi \Phi_2 & \partial_\theta \Phi_2 \\ \partial_r \Phi_3 & \partial_\varphi \Phi_3 & \partial_\theta \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \det \Phi' &= \cos\theta \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \neq 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und

$$|\det \Phi'| = r^2 \sin\theta.$$

Nach dem Transformationssatz 4.1 erhalten wir für jede nichtnegative (bzw integrierbare) Borel-Funktion f auf $\mathbb{R}^3$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda_3 = \int_V f d\lambda_3 (x, y, z) = \int_U (f \circ \Phi) r^2 \sin\theta d\lambda_3 (r, \varphi, \theta),$$

woraus mit dem Satz von Fubini folgt, dass

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda_3 = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(-\pi,\pi)} \left(\int_{(0,\pi)} f(x, y, z) \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right) r^2 dr} \tag{4.8}$$

wobei x, y, z die Funktionen von r, φ, θ sind wie in (4.7).

Beispiel. Bestimmen wir $\lambda_3(K)$ wobei K der Kugel

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \right\}$$

von Radius $R>0$ ist. Nach (4.8) mit $f=\mathbf{1}_K$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_3(K) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_K d\lambda_3 \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^\pi \mathbf{1}_{(0,R)}(r)\sin\theta d\theta\right)d\varphi\right)r^2dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi d\varphi\right)\mathbf{1}_{(0,R)}(r)\,r^2dr \\ &= 4\pi\int_0^R r^2dr = \frac{4\pi}{3}R^3.\end{aligned}$$

17.12.21 Vorlesung 20

4.3 Beweis von dem Transformationssatz

Seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ein Diffeomorphismus $\Phi: U\to V$ heißt *gut* wenn (4.3) für alle nichtnegativen (und integrierbaren) Borel-Funktionen f auf V gilt, d.h.

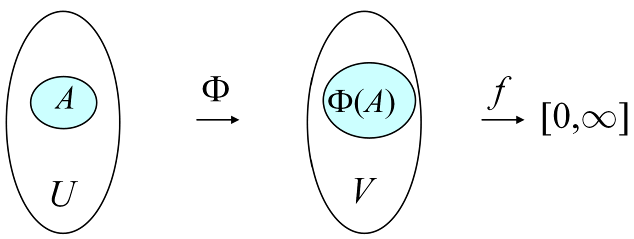
$$\int_V f(y)\,d\mu(y) = \int_U f(\Phi(x))\left|\det\Phi'(x)\right|d\mu(x)\,. \tag{4.9}$$

Um den Satz 4.1 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass jeder Diffeomorphismus Φ gut ist. Der Beweis besteht aus einer Reihe von Schritten.

Schritt 1. *Ein Diffeomorphismus $\Phi: U\to V$ ist gut genau dann, wenn für jede Borel-Menge $A\subset U$ gilt*

$$\mu(\Phi(A)) = \int_A \left|\det\Phi'\right|d\mu. \tag{4.10}$$

Beweis. Sei Φ gut, beweisen wir (4.10). Für jede Menge $A\in\mathcal{B}(U)$ gilt $\Phi(A)=\left(\Phi^{-1}\right)^{-1}(A)\in\mathcal{B}(V)$ nach dem Satz 2.1.



Die Identität (4.9) mit $f=\mathbf{1}_{\Phi(A)}$ ergibt

$$\begin{aligned}\mu(\Phi(A)) &= \int_V \mathbf{1}_{\Phi(A)}(y)\,d\mu(y) \\ &= \int_U \mathbf{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x))\left|\det\Phi'(x)\right|d\mu(x)\end{aligned}$$

$$= \int_U \mathbf{1}_A(x)\,|\det \Phi'(x)|\,d\mu(x) = \int_A |\det \Phi'|\,d\mu,$$

was (4.10) ergibt.

Beweisen wir jetzt die umgekehrte Implikation (4.10)⇒(4.9). Dafür betrachten wir zuerst eine Funktion $f = \mathbf{1}_B$ mit $B \in \mathcal{B}(V)$. Wir haben $B = \Phi(A)$ wobei $A = \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(U)$. Nach (4.10) erhalten wir

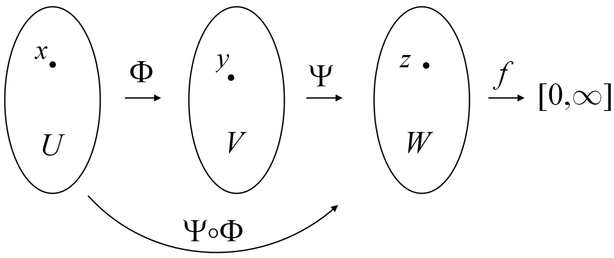
$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{1}_B(y)\,d\mu(y) &= \mu(B) = \mu(\Phi(A)) = \int_{\Phi^{-1}(B)} |\det \Phi'|\,d\mu \\
&= \int_U \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(B)}(x)\,|\det \Phi'(x)|\,d\mu(x) \\
&= \int_U \mathbf{1}_B(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,d\mu(x),
\end{aligned}$$

was (4.9) für $f = \mathbf{1}_B$ beweist. Nach Linearität gilt (4.9) auch für alle Elementarfunktionen f auf V. Für jede nichtnegative Borel-Funktion f auf V gibt es eine Folge $\{f_n\}$ von Elementarfunktionen mit $f_n \le f$ und $f_n \to f$. Da (4.9) für f_n gilt, so erhalten wir für $n \to \infty$ nach dem Satz von der einseitigen Konvergenz, dass (4.9) für alle nichtnegativen Borel-Funktionen f auf V gilt.

Sei jetzt f eine integrierbare Borel-Funktion. Dann erfüllen die beiden Funktionen f_+ und f_- die Identität (4.9), woraus (4.9) für f folgt. ■

Schritt 2. *Sind die Diffeomorphismen $\Phi : U \to V$ und $\Psi : V \to W$ gut, so ist die Komposition $\Psi \circ \Phi : U \to W$ auch gut.*

Beweis. Offensichtlich ist $\Psi \circ \Phi$ auch ein Diffeomorphismus. Sei $f : W \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Borel-Funktion.



Wir müssen beweisen, dass

$$\int_W f(z)\,d\mu(z) = \int_U f((\Psi \circ \Phi)(x))\,\left|\det(\Psi \circ \Phi)'(x)\right|\,d\mu(x), \tag{4.11}$$

was zur Substitution $z = (\Psi \circ \Phi)(x)$ entspricht. Da Ψ gut ist, so erhalten wir mit Substitution $z = \Psi(y)$

$$\int_W f(z)\,d\mu(z) = \int_V f(\Psi(y))\,|\det \Psi'(y)|\,d\mu(y) = \int_V g(y)\,d\mu(y),$$

wobei

$$g(y) = f(\Psi(y))\,|\det \Psi'(y)|\,.$$

Offensichtlich ist g eine nichtnegative Borel-Funktion auf V. Da Φ gut ist, so erhalten wir mit Substitution $y = \Phi(x)$

$$\begin{aligned}\int_V g(y)\, d\mu(y) &= \int_U g(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\, d\mu(x)\\ &= \int_U f(\Psi(\Phi(x)))\,|\det \Psi'(\Phi(x))|\,|\det \Phi'(x)|\, d\mu(x)\,.\end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt

$$(\Psi \circ \Phi)'(x) = (\Psi(\Phi(x)))' = \Psi'(\Phi(x))\,\Phi'(x)$$

und somit

$$\det(\Psi \circ \Phi)'(x) = \det \Psi'(\Phi(x)) \det \Phi'(x)\,,$$

woraus folgt

$$\int_W f(z)\, d\mu(z) = \int_V g(y)\, d\mu(y) = \int_U f((\Psi \circ \Phi)(x))\,\left|\det(\Psi \circ \Phi)'(x)\right| d\mu(x)\,,$$

was zu beweisen war. ∎

Schritt 3. *Eine Permutation von Komponenten in $\mathbb{R}^n$ ist gut.*

Beweis. In anderen Wörter, die folgende Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

(Permutation von x_i und x_j) ist gut. Betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$, $i = 1, j = 2$, d.h. die Abbildung in $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)\,.$$

Wir haben

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit $\det \Phi'(x) = -1$. Nach dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, d\lambda_2(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, d\lambda(x_2) \right) d\lambda(x_1)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y_2, y_1)\, d\lambda(y_1) \right) d\lambda(y_2)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y_2, y_1)\, d\lambda_2(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'|\, d\lambda_2,\end{aligned}$$

wobei wir den Wechsel von Notation (keine Substitution!) $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$ benutzt haben und $|\det \Phi'| = 1$.

Für $n > 2$ reicht es die Permutation von x_i und x_{i+1} zu betrachten da eine beliebige Permutation eine Komposition der Permutationen von nacheinander stehenden Koordinaten ist. In diesem Fall haben wir

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \underbrace{x_i, x_{i+1}}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \underbrace{x_{i+1}, x_i}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

und

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}_{i-1}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\mathrm{Id}_{n-i-1}} \end{pmatrix},$$

wobei Id_k die identische Matrix der Dimension k, woraus folgt $\det \Phi'(x) = -1$.

Stellen wir jedes $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$x = (u, x_i, x_{i+1}, v)$$

wobei

$$u = (x_1, ..., x_{i-1}), \quad v = (x_{i+2}, ..., x_n).$$

Da

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-i-1}$$

und

$$u \in \mathbb{R}^{i-1}, \quad (x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^{n-i-1},$$

so erhalten wir nach dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{i-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-i-1}} f(u, x_i, x_{i+1}, v) d\lambda_{n-i-1}(v) \right) d\lambda_2(x_i, x_{i+1}) \right) d\lambda_{i-1}(u). \tag{4.12}$$

Das mittlere Integral hat die Form

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(u, x_i, x_{i+1}) \, d\lambda_2 (x_i, x_{i+1}), \tag{4.13}$$

wobei

$$g(u, x_i, x_{i+1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-i-1}} f(u, x_i, x_{i+1}, v) \, d\lambda_{n-i-1}(v).$$

Nach dem obigen Fall $n = 2$ können wir in (4.13) x_i und x_{i+1} vertauschen, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(u, x_i, x_{i+1}) \, d\lambda_2 (x_i, x_{i+1}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, x_{i+1}, x_i) \, d\lambda_2 (x_i, x_{i+1}).$$

Somit lässt die Funktion $f(u, x_i, x_{i+1}, v)$ in der rechten Seite von (4.12) durch

$$f(u, x_{i+1}, x_i, v) = (f \circ \Phi)(u, x_i, x_{i+1}, v)$$

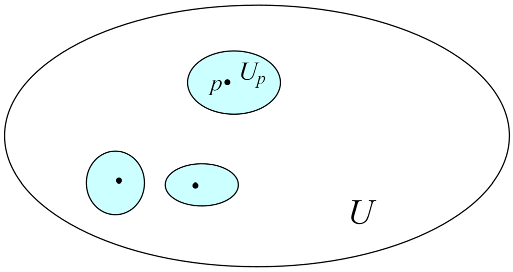
ersetzen, woraus folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \Phi) \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \Phi) \, |\det \Phi'| \, d\lambda_n,$$

was zu beweisen war. ■

Schritt 4. *Wir sagen, dass ein Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$* lokal gut *ist wenn für jeden Punkt $p \in U$ existiert eine offene Umgebung U_p von p in U so dass $\Phi|_{U_p}$ gut ist. Beweisen wir die Implikation:*

$$\Phi \textit{ ist lokal gut} \Rightarrow \Phi \textit{ ist gut.}$$



Beweis. Beweisen wir die Identität

$$\mu(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'| \, d\mu \tag{4.14}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(U)$. Die beiden Seiten dieser Gleichung sind Maße auf $\mathcal{B}(U)$ und zwar σ-endliche Maße (da das Lebesgue-Maß $\mu = \lambda_n$ σ-endlich ist). Betrachten wir das Mengensystem

$$S = \{A \in \mathcal{B}(U) : \exists p \in U \text{ mit } A \subset U_p\},$$

d.h. S besteht aus den Borel-Mengen die in einem U_p liegen. Da $\Phi|_{U_p}$ gut ist, so gilt (4.14) für alle $A \in S$.

Das Mengensystem S ist ein Halbring, da S abgeschlossen bezüglich der Differenz und des Schnittes ist. In der Tat, für $A, B \in S$ sei $A \subset U_p$. Dann sind $A \setminus B$ und $A \cap B$ auch Borel-Mengen die in U_p liegen, so dass $A \setminus B$ und $A \cap B$ zu S gehören. Nach dem Satz von Carathéodory gilt (4.14) dann für alle $A \in \sigma(S)$.

Zeigen wir, dass $\sigma(S) = \mathcal{B}(U)$, woraus folgen wird, dass (4.14) für alle $A \in \mathcal{B}(U)$ gilt. Da $\{U_p\}_{p \in U}$ eine offene Überdeckung von U ist, so existiert eine abzählbare Teilüberdeckung $\{U_{p_i}\}_{i=1}^{\infty}$ von U. Für jede Menge $A \in \mathcal{B}(U)$ gilt die Identität

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap U_{p_i}),$$

woraus folgt, dass $A \in \sigma(S)$ da alle $A \cap U_{p_i}$ in S liegen. ■

Schritt 5. *Beweisen wir den Satz 4.1 im Fall $n = 1$, d.h. alle Diffeomorphismen im Fall $n = 1$ gut sind.*

Beweis. Nach Schritt 1 reicht es zu beweisen, dass für jedes $A \in \mathcal{B}(U)$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\Phi'(x)| \, d\lambda(x). \tag{4.15}$$

Da die beiden Seiten von (4.15) σ-endliche Maße auf $\mathcal{B}(U)$ sind, so reicht es diese Identität für alle Intervalle A zu beweisen. Sei $A = [a, b] \subset U$. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, so gilt $\Phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Daraus folgt, dass entweder $\Phi'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$

oder $\Phi'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. die Funktion Φ ist entweder monoton steigend oder monoton fallend auf $[a,b]$. Im ersten Fall gilt

$$\lambda(\Phi(A)) = \lambda([\Phi(a), \Phi(b)]) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx = \int_A |\Phi'(x)|\,d\lambda(x)$$

und im zweiten Fall

$$\lambda(\Phi(A)) = \lambda([\Phi(b), \Phi(a)]) = \Phi(a) - \Phi(b) = -\int_a^b \Phi'(x)\,dx = \int_A |\Phi'(x)|\,d\lambda(x),$$

was beweist (4.15) für abgeschlossene Intervalle. Ein beliebiges Intervall A ist immer ein monoton steigender Limes von abgeschlossen Intervallen, woraus (4.15) für alle Intervalle folgt.

22.12.21 Vorlesung 21

$\blacksquare$

Schritt 6. *Beweisen wir jetzt per Induktion nach n, dass jeder Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ gut ist.*

Beweis. Der Induktionsanfang gilt nach Schritt 5, so es bleibt den Induktionsschritt von $n-1$ nach n durchzuführen, was der Hauptteil von dem Beweis ist. Nach dem Schritt 4 reicht es zu beweisen, dass Φ lokal gut ist. Wählen wir einen Punkt $p \in U$ und beweisen, dass es eine offene Umgebung U_p von p in U gibt, so dass $\Phi|_{U_p}$ gut ist. Da $\det \Phi'(p) \neq 0$, so es gibt ein Element $\partial_{x_j}\Phi_1(p)$ in der ersten Zeile von $\Phi'(p)$, das nicht Null ist. Da Permutation von x_1 und x_j eine gute Abbildung ist, so können wir annehmen, dass $j=1$, d.h.

$$\partial_{x_1}\Phi_1(p) \neq 0.$$

Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi &: U \to \mathbb{R}^n \\ \Psi(x_1,...,x_n) &= (\Phi_1(x), x_2, ..., x_n). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wir haben

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi_1 & * \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathrm{Id}_{n-1}} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det \Psi' = \partial_{x_1}\Phi_1. \tag{4.17}$$

Insbesondere gilt $\det \Psi'(p) \neq 0$, und nach dem Satz von der inversen Funktion existiert eine offene Umgebung U' von p in U wo $\Psi|_{U'}$ ein Diffeomorphismus ist. Wir werden zeigen, dass $\Phi|_{U'}$ gut ist (und somit können U_p als U' nehmen).

Um die Notation zu vereinfachen, benennen wir U' nach U um und setzen $W = \Psi(U)$ so dass $\Psi : U \to W$ ein Diffeomorphismus ist. Auch definieren wir die neue Menge V mit $V = \Phi(U)$, so dass $\Phi : U \to V$ wieder ein Diffeomorphismus ist.

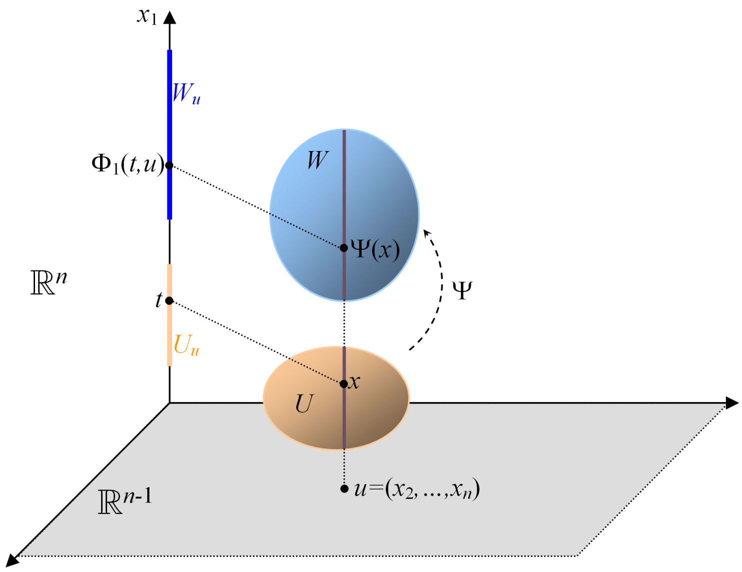


Abbildung $\Psi : U \to W$

Zeigen wir, dass Ψ gut ist. Bezeichnen wir $t = x_1$ und $u = (x_2, ..., x_n)$ so dass $x = (t, u)$. Mit dieser Notation gilt nach (4.16)

$$\Psi(t, u) = (\Phi_1(t, u), u).$$

Für jedes $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind die u-Schnittmengen U_u und W_u offene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Fixieren wir ein $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ so dass U_u nichtleer ist. Betrachten wir die Abbildung

$$t \mapsto \Phi_1(t, u), \quad t \in U_u.$$

Die Bildmenge dieser Abbildung ist W_u da

$$\begin{aligned}\{\Phi_1(t, u) : t \in U_u\} &= \{\Phi_1(t, u) : (t, u) \in U\} \\ &= \{\Phi_1(t, u) : (\Phi_1(t, u), u) \in W\} = W_u.\end{aligned}$$

Die Abbildung $t \mapsto \Phi_1(t, u)$ ist ein Diffeomorphismus von U_u nach W_u, da $\Phi_1(\cdot, u) = \Psi|_{U_u}$ bijektiv ist und $\partial_t \Phi_1 = \det \Psi' \neq 0$ in U_u.

Für jede nichtnegative Borel-Funktion $f(s)$ auf W_u erhalten wir nach dem Induktionsanfang mit Hilfe von Substitution $s = \Phi_1(t, u)$

$$\int_{W_u} f(s)\, d\lambda(s) = \int_{U_u} f(\Phi_1(t, u)) \left|\partial_t \Phi_1(t, u)\right| d\lambda(t).$$

Sei jetzt $f(s, u)$ eine nichtnegative Borel-Funktion auf W. Anwendung von der obigen Identität auf die Funktion $s \mapsto f(s, u)$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_{W_u} f(s, u)\, d\lambda(s) &= \int_{U_u} f(\Phi_1(t, u), u) \left|\partial_t \Phi_1(t, u)\right| d\lambda(t) \\ &= \int_{U_u} f(\Psi(t, u)) \left|\det \Psi'(t, u)\right| d\lambda(t),\end{aligned}$$

wobei wir auch (4.17) benutzt haben. Ferner erhalten wir nach dem Satz von Fubini (cf. (3.16)), dass

$$\begin{aligned}\int_W f d\lambda_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{W_u} f(s,u)\, d\lambda(s) \right) d\lambda_{n-1}(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{U_u} f(\Psi(t,u)) \left|\det \Psi'(t,u)\right| d\lambda(t) \right) d\lambda_{n-1}(u) \\ &= \int_U (f \circ \Psi) \left|\det \Psi'\right| d\lambda_n .\end{aligned}$$

Somit ist Ψ eine gute Abbildung.

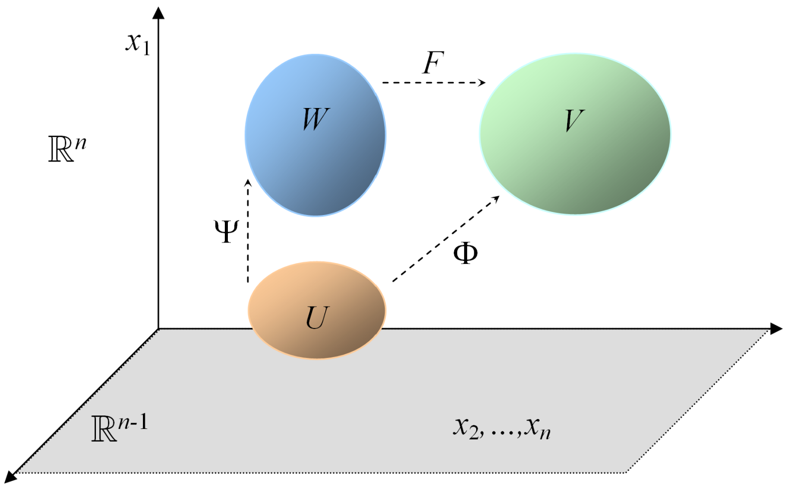
Wir haben zwei Diffeomorphismen $\Phi : U \to V$ und $\Psi : U \to W$, woraus folgt, dass auch die Komposition

$$F := \Phi \circ \Psi^{-1} : W \to V$$

ein Diffeomorphismus ist. Dann gilt

$$\Phi = F \circ \Psi$$

da $F \circ \Psi = (\Phi \circ \Psi^{-1}) \circ \Psi = \Phi \circ (\Psi^{-1} \circ \Psi) = \Phi$.



Abbildungen $\Phi = F \circ \Psi$

Da Ψ gut ist, so reicht es zu zeigen, dass F gut ist, woraus nach dem Schritt 2 folgen wird dass auch Φ gut ist. Nach der Definition von F haben wir für alle $(t,u) \in U$

$$\Phi(t,u) = F(\Psi(t,u)) = F(\Phi_1(t,u), u)$$

d.h.

$$F(\Phi_1(t,u), u) = (\Phi_1(t,u), \Phi_2(t,u), \ldots).$$

Es folgt, dass für jedes $(t,u) \in W$ gilt

$$F_1(t,u) = t,$$

und somit

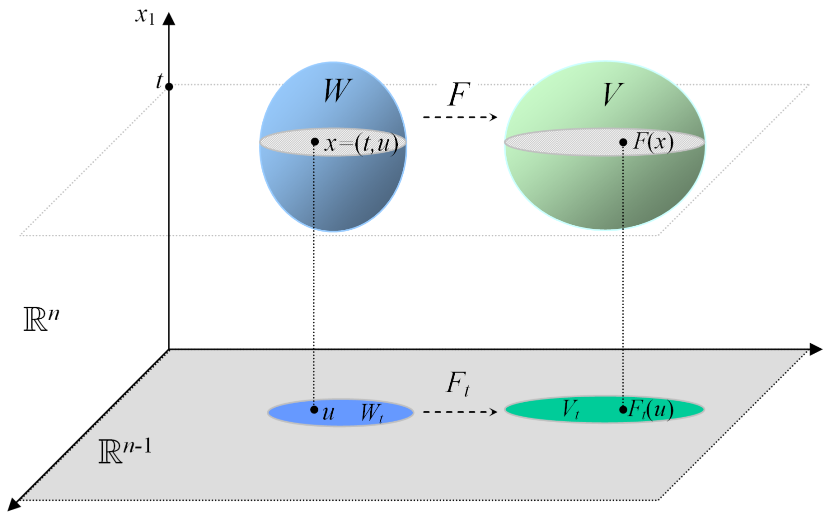
$$F(t,u) = (t, F_2(t,u), \ldots, F_n(t,u)).$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die t-Schnittmengen W_t und V_t offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n-1}$. Betrachten wir die Abbildung

$$F_t(u) = (F_2(t,u), ..., F_n(t,u)), \quad u \in W_t,$$

deren Bildmenge ist

$$\begin{aligned} F_t(W_t) &= \left\{(F_2(t,u), ..., F_n(t,u)) \in \mathbb{R}^{n-1} : u \in W_t\right\} \\ &= \left\{(F_2(t,u), ..., F_n(t,u)) \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,u) \in W\right\} = F(W)_t = V_t. \end{aligned}$$



Die Abbildung $F : W \to V$

Die Abbildung $F_t : W_t \to V_t$ ist stetig differenzierbar und bijektiv, und es gilt

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ * & \boxed{F_t'} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det F' = \det F_t'. \tag{4.18}$$

Es folgt, dass $\det F_t' \neq 0$, so dass F_t ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Induktionsvoraussetzung erhalten wir für jede nichtnegative Borel-Funktion $f(v)$ auf V_t mit Hilfe von Substitution $v = F_t(u)$, dass

$$\int_{V_t} f(v)\, d\lambda_{n-1}(v) = \int_{W_t} f(F_t(u)) \left|\det F_t'\right| d\lambda_{n-1}(u).$$

Nach dem Satz von Fubini erhalten wir für jede nichtnegative Borel-Funktion $f(t,v)$ auf V, dass

$$\begin{aligned} \int_V f(t,v)\, d\lambda_n(t,v) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{V_t} f(t,v)\, d\lambda_{n-1}(v)\right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{W_t} f(t, F_t(u)) \left|\det F_t'\right| d\lambda_{n-1}(u)\right) d\lambda(t) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{W_t} f\left(F\left(t,u\right)\right) \left|\det F'\right| d\lambda_{n-1}\left(u\right) \right) d\lambda\left(t\right)$$
$$= \int_{W} \left(f \circ F\right) \left|\det F'\right| d\lambda_n,$$

wobei wir auch (4.18) und $F\left(t,u\right) = \left(t, F_t\left(u\right)\right)$ benutzt haben. Somit ist der Diffeomorphismus $F : W \to V$ gut, was zu beweisen war. ■

Korollar 4.2 (Transformationssatz für Lebesgue-messbare Funktionen) *Sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus von offenen Teilmengen U, V von $\mathbb{R}^n$. Für jede nichtnegative (bzw integrierbare) Lebesgue-messbare Funktion f auf V und für $\mu = \lambda_n$ gilt*

$$\int_V f\, d\mu = \int_U \left(f \circ \Phi\right) \left|\det \Phi'\right|\, d\mu. \tag{4.19}$$

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten. Hier betrachten wir das Maß $\mu = \lambda_n$ im Definitionsbereich $\mathcal{M}_n$ – die σ-Algebra von Lebesgue-messbaren Mengen.

Schritt 1. *Für jede Nullmenge $C \subset U$ ist die Bildmenge $\Phi\left(C\right)$ eine Nullmenge.*

Nach dem Satz 4.1 haben wir für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}\left(U\right)$

$$\mu\left(\Phi\left(B\right)\right) = \int_V \mathbf{1}_{\Phi(B)} d\mu = \int_U \mathbf{1}_B \left|\det \Phi'\right| d\mu = \int_B \left|\det \Phi'\right| d\mu.$$

Die Nullmenge C ist nicht unbedingt Borel, aber nach dem Satz 1.24 liegt C immer in einer Borel-Nullmenge B. Dann gilt

$$\Phi\left(C\right) \subset \Phi\left(B\right)$$

und

$$\mu\left(\Phi\left(B\right)\right) = \int_B \left|\det \Phi'\right| d\mu = 0,$$

woraus folgt, dass $\Phi\left(C\right)$ auch eine Nullmenge ist.

Schritt 2. *Für jede $\mathcal{M}_n$-messbare Menge $A \subset U$ ist $\Phi\left(A\right)$ auch $\mathcal{M}_n$-messbar und es gilt*

$$\mu\left(\Phi\left(A\right)\right) = \int_A \left|\det \Phi'\right| d\mu.$$

Nach dem Satz 1.26 hat jede $\mathcal{M}_n$-messbare Menge A die Form $A = B - C$ wobei B eine Borel-Menge und C eine Nullmenge ist. Somit erhalten wir

$$\Phi\left(A\right) = \Phi\left(B\right) - \Phi\left(C\right).$$

Da $\Phi\left(B\right)$ Borel-Menge und $\Phi\left(C\right)$ eine Nullmenge ist, so ist $\Phi\left(A\right)$ $\mathcal{M}_n$-messbar. Somit erhalten wir

$$\mu\left(\Phi\left(A\right)\right) = \mu\left(\Phi\left(B\right)\right) - \mu\left(\Phi\left(C\right)\right) = \mu\left(\Phi\left(B\right)\right) = \int_B \left|\det \Phi'\right| d\mu = \int_A \left|\det \Phi'\right| d\mu.$$

Schritt 3. *Beweisen wir jetzt die Transformationsformel (4.19) für alle nichtnegativen $\mathcal{M}_n$–messbaren Funktionen f.*

Nach Schritt 2 gilt (4.19) für $f = \mathbf{1}_{\Phi(A)}$ für alle $\mathcal{M}_n$-messbaren Mengen $A \subset U$, d.h. für alle $\mathcal{M}_n$-messbaren Indikatorfunktionen auf V. Nach der Linearität des Integral gilt (4.19) auch für alle Elementarfunktionen auf V. Für jede nichtnegative $\mathcal{M}_n$-messbare Funktion f auch V gibt es eine Folge $\{f_n\}$ von Elementarfunktionen so dass $f_n \to f$ und $f_n \leq f$. Die Identität (4.19) gilt für alle Funktionen f_n, und für $n \to \infty$ erhalten wir nach dem Satz 2.13 dass (4.19) auch für die Funktion f gilt. ■

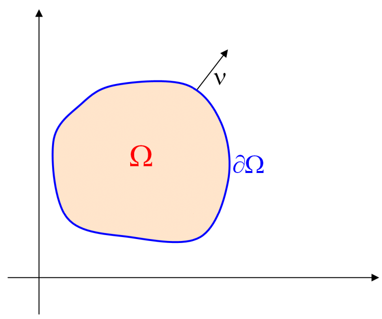
4.4 Preview von dem Gaußschen Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz ist eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Analysis, der folgendes besagt: für eine beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit *glattem Rand* $\partial\Omega$ und für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gilt für jedes $i = 1, ..., n$ die folgende Identität:

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f \, d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\sigma_{n-1}, \tag{4.20}$$

wobei die folgenden Bezeichnungen benutzt werden:

- σ_{n-1} ist das *Oberflächenmaß* auf der *Fläche* $\partial\Omega$;
- ν ist die *äußere Einheitsnormale* ν zum Rand $\partial\Omega$;
- ν_i ist die i-te Komponente von ν.



Im Fall $n = 1$ und $\Omega = (a, b)$ hat (4.20) die Form der Fundamentalsatz der Analysis:

$$\int_{(a,b)} f' d\lambda = f(b) - f(a).$$

In der Tat, die Differenz $f(b) - f(a)$ lässt sich als

$$\int_{\partial(a,b)} f \nu d\sigma_0$$

darstellen, wobei σ_0 das Zählmaß auf $\partial(a,b) = \{a,b\}$ ist, d.h. $\sigma_0\{a\} = \sigma_0\{b\} = 1$, und $\nu(a) = -1,\ \nu(b) = 1$.

In den nächsten Abschnitten werden wir zunächst die Begriffe von Fläche, Oberflächenmaß und Normale einführen und ihre notwendigen Eigenschaften beweisen.

12.01.22 Vorlesung 22

4.5 Oberflächenmaß

4.5.1 Begriff von Karte

Fixieren wir natürliche Zahlen k und n mit $1 \le k \le n$.

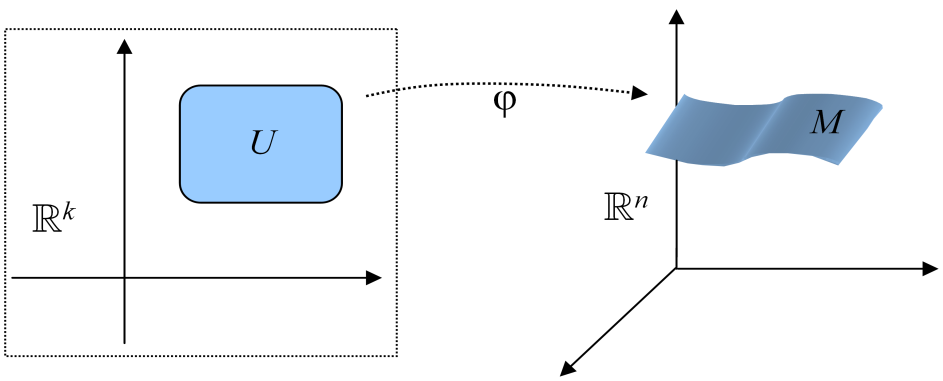
Definition. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *Parametrisierung* wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv
2. φ ist stetig differenzierbar;
3. die Jacobi-Matrix φ' ist nichtsingulär, d.h.

$$\operatorname{rang} \varphi'(u) = k \quad \forall u \in U. \tag{4.21}$$

Die Menge $M = \varphi(U)$ heißt *k-dimensionale Karte*. Das Paar (U, φ) heißt *Parametrisierung* von M und das Dreifache (M, U, φ) heißt *parametrisierte Karte*.

Die Menge M heißt auch *Flächenstück* oder *lokale Fläche*.



Parametrisierung (U, φ)

Offensichtlich ist die Abbildung $\varphi : U \to M$ bijektiv. Wir bezeichnen die Punkte in U mit u und die Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit x. Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es genau einen Punkt $u \in U$ mit

$$x = \varphi(u) = (\varphi_1(u), ..., \varphi_n(u)).$$

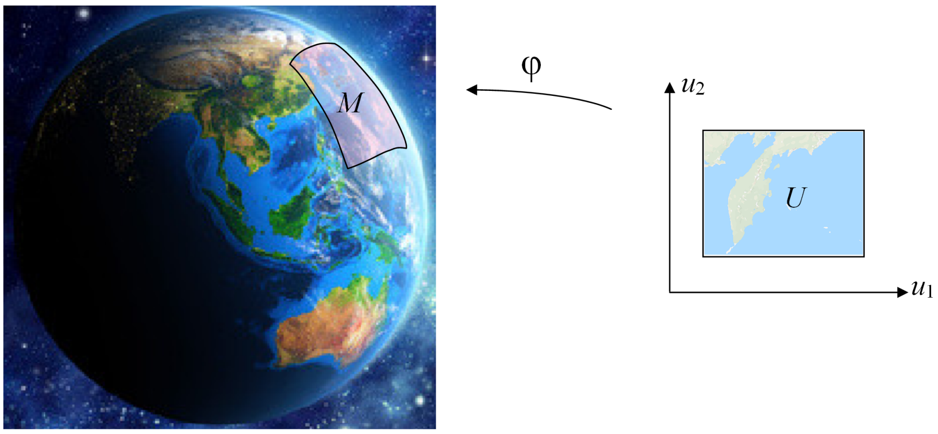
Die Komponenten $u_1, ..., u_k$ heißen die *lokalen Koordinaten* von x. Die Jacobi-Matrix (=totale Ableitung) von φ ist

$$\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1}\varphi_1 & \partial_{u_2}\varphi_1 & ... & \partial_{u_k}\varphi_1 \\ \partial_{u_1}\varphi_2 & \partial_{u_2}\varphi_2 & ... & \partial_{u_k}\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_{u_1}\varphi_n & \partial_{u_2}\varphi_n & ... & \partial_{u_k}\varphi_n \end{pmatrix},$$

die eine $n \times k$ Matrix ist. Die Bedingung (4.21) dass φ nichtsingulär ist, bedeutet, dass der Rang der Matrix $\varphi'(u)$ an jeder Stelle $u \in U$ *maximal* möglich ist.

Die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : M \to U$ ist nicht immer stetig. Ist φ^{-1} stetig so heißt die Parametrisierung (U, φ) *regulär*. Reguläre Parametrisierungen werden später im Abschnitt 4.6.1 besprochen.

Beispiel. Als Beispiel betrachten wir ein Gebiet M auf der Oberfläche der Erde. Mit Hilfe von *Googlemap* erhält man eine Karte U von M auf dem Bildschirm, wo es die natürlichen Koordinaten u_1, u_2 gibt.



Die Parametrisierung φ ergibt dann die 3-dimensionalen Koordinaten von dem Punkt mit den Koordinaten (u_1, u_2) auf dem Bildschirm. Wir nennen die Karte nicht die Menge U, sondern die Menge M.

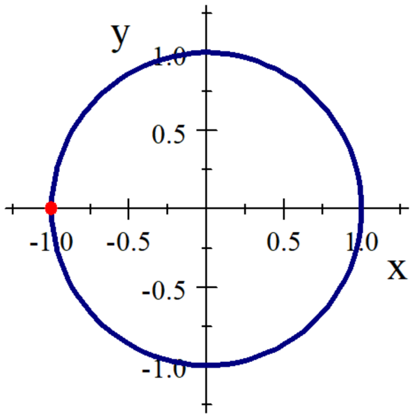
Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi &: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar, injektiv und nichtsingulär, da

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

und $\operatorname{rang} \varphi' = 1$ da immer $\sin t \neq 0$ oder $\cos t \neq 0$. Somit ist $M = \varphi(U)$ eine 1-dimensionale Karte, die der Einheitskreis ohne den Punkt $(-1, 0)$ ist.



Der Kreis

Der ganze Kreis lässt sich wie folgt darstellen

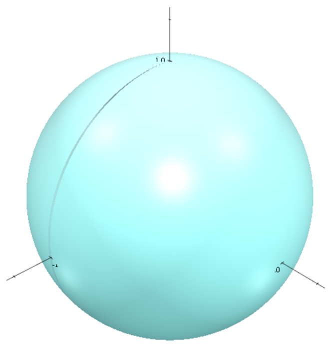
$$\begin{aligned}\varphi &: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= (\cos t, \sin t),\end{aligned}$$

aber dies keine richtige Parametrisierung ist, da $[-\pi, \pi]$ nicht offen ist und φ nicht injektiv ist. Der ganze Kreis ist somit keine Karte.

Beispiel. Sei $U = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ und

$$\begin{aligned}\varphi &: U \to \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v) &= (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v),\end{aligned}$$

wobei $u \in (-\pi, \pi)$ und $v \in (0, \pi)$. Die Abbildung φ ist offensichtlich stetig differenzierbar und injektiv, da u, v die Polarwinkel von dem Punkt $\varphi(u, v)$ sind (u ist Horizontalwinkel und v ist Vertikalwinkel). Das Bild $M = \varphi(U)$ ist die Sphäre von Radius 1 ohne einen Längengrad (die Werte $u = \pm\pi$ entsprechen dem Längengrad und $v = 0, \pi$ entsprechen den Polen).



Sphäre

Die Jacobi-Matrix ist

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \\ \partial_u \varphi_3 & \partial_v \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin v \sin u & \cos v \cos u \\ \sin v \cos u & \cos v \sin u \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix}.$$

Da $\sin v \neq 0$ und einer von $\sin u, \cos u$ ist immer $\neq 0$, so erhalten wir, dass entweder

$$\begin{vmatrix} \sin v \cos u & \cos v \sin u \\ 0 & -\sin v \end{vmatrix} = -(\sin v)^2 \cos u \neq 0$$

order

$$\begin{vmatrix} -\sin v \sin u & \cos v \cos u \\ 0 & -\sin v \end{vmatrix} = (\sin v)^2 \sin u \neq 0,$$

woraus folgt, dass $\operatorname{rang} \varphi' = 2$. Somit ist M eine Karte.

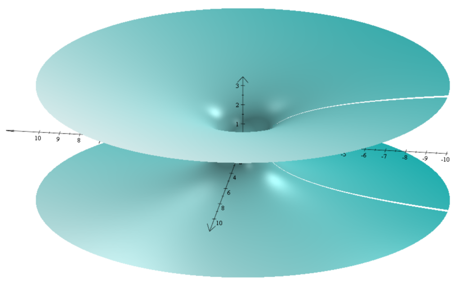
Beispiel. Sei $U = (-\pi, \pi) \times (-\infty, \infty)$ und

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v) &= (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Abbildung φ ist stetig differenzierbar und injektiv, da das System

$$\begin{aligned} x &= \cosh v \cos u \\ y &= \cosh v \sin u \\ z &= v \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung (u, v) für gegebene (x, y, z) besitzt. Das Bild $M = \varphi(U)$ ist das *Katenoid* mit einem fehlenden Längengrad.



Katenoid

Die Jacobi-Matrix ist

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -\cosh v \sin u & \sinh v \cos u \\ \cosh v \cos u & \sinh v \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\cosh v \neq 0$ und entweder $\sin u \neq 0$ oder $\cos u \neq 0$, so gilt $\operatorname{rang} \varphi' = 2$. Somit ist M eine Karte.

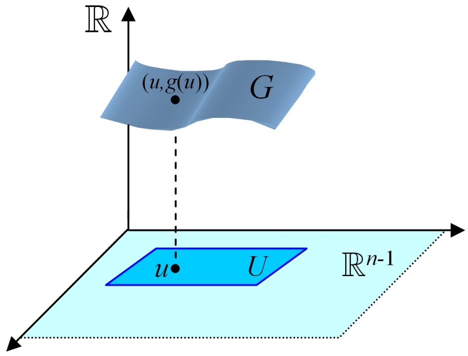
Beispiel. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir den Graph von g:

$$G = \{(u, g(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\} . \tag{4.23}$$

Betrachten auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{R}^n \\ \varphi(u) &= (u, g(u)) \end{aligned}$$

und bemerken, dass φ stetig differenzierbar und injektiv ist.



Graph als eine Karte

Auch ist φ nichtsingulär, da

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ \partial_{u_1} g & \partial_{u_2} g & \cdots & \partial_{u_{n-1}} g \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

und offensichtlich rang $\varphi' = n-1$. Somit ist $G = \varphi(U)$ eine $(n-1)$-dimensionale Karte. Offensichtlich ist die inverse Abbildung

$$\varphi^{-1} : G \to U$$
$$\varphi^{-1}(u, g(u)) = u$$

stetig, so dass G eine reguläre Karte ist.

4.5.2 Oberflächenmaß der Karte

Wir fangen mit der folgenden Bemerkung an.

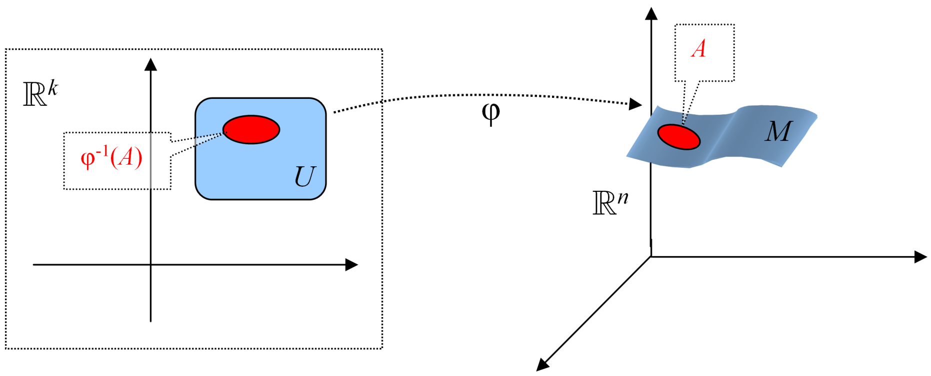
Behauptung. *Jede Karte $M = \varphi(U)$ ist immer eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Die offene Menge U ist immer eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, z.B. wenn $\{K_i\}$ die Sammlung von allen in U liegenden abgeschlossen Kugeln mit rationalen Radien und rationalen Koordinaten der Zentren. Somit gilt auch $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(K_i)$. Da alle Bildmengen $\varphi(K_i)$ kompakt sind, so folgt es daraus, dass M Borel ist. ■

Für jede Borel-Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(M)$ die Borel-σ-Algebra in M, d.h. $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(M)$ (da M selbst Borel ist, so liegt M auch in $\mathcal{B}(M)$).

Definition. Sei (M, U, φ) eine k-dimensionale parametrisierte Karte. Für jede Teilmenge $A \in \mathcal{B}(M)$ definieren wir das *k-dimensionale Oberflächenmaß* $\sigma_{M,U,\varphi}(A)$ mit

$$\sigma_{M,U,\varphi}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det\left((\varphi')^T \varphi'\right)} d\lambda_k. \tag{4.25}$$



Lemma 4.3 *Die rechte Seite von* (4.25) *ist wohldefiniert, und die Funktion* $\sigma_{M,U,\varphi}$ *ist ein Maß auf* $\mathcal{B}(M)$.

Definition. Die Determinante $\det\left((\varphi')^T \varphi'\right)$ heißt die *Gramsche Determinante* von φ und wird mit $\operatorname{gram}\varphi$ bezeichnet, d.h.

$$\boxed{\operatorname{gram}\varphi = \det\left((\varphi')^T \varphi'\right)}.$$

Das Maß $\sigma_{M,U,\varphi}$ heißt das *Oberflächenmaß* der parametrisierten Karte (M,U,φ). Man kann (4.25) wie folgt umschreiben:

$$\boxed{\sigma_{M,U,\varphi}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\operatorname{gram}\varphi}\, d\lambda_k}.$$

Beweis. Setzen wir $m = \varphi'$ so dass m eine $n \times k$ Matrix ist. Dann ist $m^T m$ eine $k \times k$ Matrix, so dass $\det\left(m^T m\right)$ definiert ist. Die Matrix $m^T m$ ist symmetrisch, da

$$\left(m^T m\right)^T = m^T \left(m^T\right)^T = m^T m,$$

und nichtnegativ definit, da für alle Spaltenvektoren $\xi \in \mathbb{R}^k$

$$\left(m^T m\xi, \xi\right) = (m\xi, m\xi) \geq 0,$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^k$ bzw $\mathbb{R}^n$ ist. Somit sind alle Eigenwerte von $m^T m$ reell und nichtnegativ, woraus folgt $\det\left(m^T m\right) \geq 0$.

Folglich ist die Funktion $\sqrt{\operatorname{gram}\varphi}$ reell und nichtnegativ. Da sie auch stetig ist, so ist das Integral $\int_B \sqrt{\operatorname{gram}\varphi}\, d\lambda_k$ für alle Borel-Teilmengen $B \subset U$ definiert. Nach dem Satz 2.19 ist die Funktion

$$B \mapsto \int_B \sqrt{\operatorname{gram}\varphi}\, d\lambda_k$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(U)$.

Da $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und somit Borel ist, so ist die Menge $\varphi^{-1}(A)$ Borel für alle Borel-Teilmengen $A \in \mathcal{B}(M)$ (Satz 2.1). Somit ist das Integral in (4.25) wohldefiniert. Da φ^{-1} mit allen Mengenoperationen vertauschbar ist (Aufgabe 8), insbesondere mit disjunkten Vereinigungen, so erhalten wir, dass auch die Funktion

$$A \mapsto \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\operatorname{gram}\varphi}\, d\lambda_k$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(M)$ ist, was zu beweisen war. ∎

Bemerkung. Da φ' nichtsingulär ist, so ist auch die Gramsche Matrix $(\varphi')^T \varphi'$ nichtsingulär woraus folgt $\operatorname{gram}\varphi > 0$.

Beispiel. Sei (M, U, φ) eine parametrisierte Karte mit $k = n$. Nehmen wir auch an, dass M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Die Abbildung $\varphi : U \to M$ zwischen den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist bijektiv, stetig differenzierbar und es gilt $\det \varphi' \neq 0$ (was im Fall von $n \times n$ Matrizen äquivalent zu $\operatorname{rang}\varphi' = n$ ist). Somit ist φ ein Diffeomorphismus von U und M. Da die Matrix φ' quadratisch ist, so erhalten wir

$$\det\left((\varphi')^T \varphi'\right) = \det(\varphi')^T \det\varphi' = (\det\varphi')^2 .$$

Aus dem Transformationssatz (und (4.10)) folgt es, dass für alle $A \in \mathcal{B}(M)$

$$\sigma_{M,U,\varphi}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det\varphi'|\, d\lambda_n = \lambda_n\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(A)\right)\right) = \lambda_n(A) .$$

Somit stimmen das n-dimensionale Oberflächenmaß $\sigma_{M,U,\varphi}$ und das Lebesgue-Maß λ_n in M überein. Insbesondere ist $\sigma_{M,U,\varphi}$ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Wir werden unterhalb sehen, dass die Unabhängigkeit von der Parametrisierung auch für $k < n$ gilt. Deshalb wird häufig das Maß $\sigma_{M,U,\varphi}$ einfach mit σ_M bezeichnet und das *Oberflächenmaß* auf M genannt. Man benutzt für σ_M auch die folgenden Bezeichnungen: $\sigma_{k,M}$ und σ_k.

Satz 4.4 *Sei (M, U, φ) eine Karte. Dann gilt für alle nichtnegative (bzw $\sigma_{M,U,\varphi}$-integrierbare) Borel-Funktionen f auf M die Identität*

$$\int_M f d\sigma_{M,U,\varphi} = \int_U f \circ \varphi \sqrt{\operatorname{gram}\varphi}\, d\lambda_k. \tag{4.26}$$

Bemerkung. Die Identität (4.26) lässt sich als die folgende *Substitutionsregel* betrachten:

$$\int_M f(x)\, d\sigma_{M,U,\varphi}(x) = \int_U f(\varphi(u)) \sqrt{\operatorname{gram}\varphi(u)}\, d\lambda_k(u)$$

mit $x = \varphi(u)$ und

$$\boxed{d\sigma_{M,U,\varphi}(x) = \sqrt{\operatorname{gram}\varphi(u)}\, d\lambda_k(u)}.$$

Beweis. Die Identität (4.26) für $f = \mathbf{1}_A$ mit $A \in \mathcal{B}(M)$ ist äquivalent zu (4.25), da

$$\int_M \mathbf{1}_A d\sigma_{M,U,\varphi} = \sigma_{M,U,\varphi}(A)$$

und

$$\int_U \mathbf{1}_A \circ \varphi \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k = \int_U \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k.$$

Dann gilt (4.26) auch für alle Elementarfunktionen nach der Linearität von Integralen. Für beliebige nichtnegative Borel-Funktion f auf M gibt es eine Folge $\{f_i\}$ von Elementarfunktionen mit $f_i \to f$ und $f_i \leq f$. Da (4.26) für alle f_i gilt, so erhalten wir diese Identität auch für f nach dem Satz von der einseitigen Konvergenz. Für eine integrierbare Funktion f folgt (4.26) mit Hilfe von $f = f_+ - f_-$. ■

Bemerkung. Die Gramsche Determinante $\operatorname{gram} \varphi$ lässt sich expliziter wie folgt darstellen. Die Jacobi-Matrix φ' hat k Spalten $\partial_{u_i}\varphi$, $i = 1, ..., k$, woraus folgt, dass

$$(\varphi')^T \varphi' = \left((\partial_{u_i}\varphi, \partial_{u_j}\varphi)\right)_{i,j=1}^k$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist. Somit gilt

$$\boxed{\operatorname{gram} \varphi = \det \left((\partial_{u_i}\varphi, \partial_{u_j}\varphi)\right)_{i,j=1}^k}.$$

4.5.3 Beispiele von Karten und Oberflächenmaßen

Dimension $k = 1$.

Das 1-dimensionale Oberflächenmaß σ_1 heißt *Länge*. Seien U ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und (M, U, φ) eine 1-dimensionale parametrisierte Karte in $\mathbb{R}^n$. Diese Karte heißt in diesem Fall eine *parametrisierte Kurve*.

Alle Komponenten $\varphi_1, ..., \varphi_n$ von φ hängen von einer Variable $t \in U$ ab, und es gilt

$$\varphi' = (\varphi_1', ..., \varphi_n')^T.$$

Es folgt, dass

$$\operatorname{gram} \varphi = \det \left((\varphi')^T \varphi'\right) = (\varphi', \varphi') = \sum_{i=1}^n (\varphi_i')^2 = \|\varphi'\|^2,$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist und $\|\cdot\|$ die 2-Norm ist. Somit erhalten wir, dass

$$\boxed{d\sigma_1 = \|\varphi'\|\, d\lambda_1} \tag{4.27}$$

und

$$\boxed{\sigma_1(M) = \int_U \|\varphi'\|\, d\lambda_1 = \int_\alpha^\beta \|\varphi'\|\, dt,}$$

wenn $U = (\alpha, \beta)$.

Beispiel. Die Parametrisierung (U, φ) mit $U = (-\pi, \pi)$ und

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$$

bestimmt die Menge $K = \varphi(U)$ die der punktierte Einheitskreis ist. Wir erhalten

$$\|\varphi'\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

und

$$\sigma_1(K) = \int_{-\pi}^{\pi} \|\varphi'\| \, dt = 2\pi.$$

14.01.22 Vorlesung 23

Beispiel. Die Zykloide Z hat eine Parametrisierung

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \qquad t \in (0, 2\pi)$$

(siehe S.35). Wir erhalten

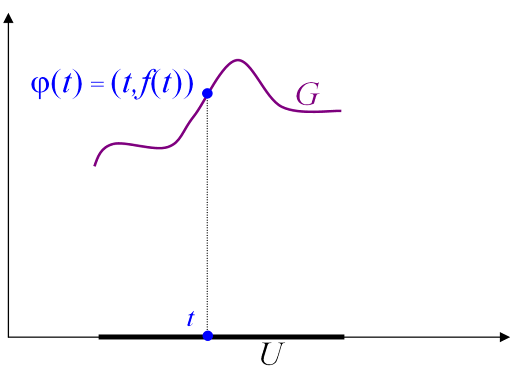
$$\|\varphi'\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma_1(Z) &= \int_0^{2\pi} \|\varphi'\| \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt \qquad (t = 2s) \\
&= 4 \int_0^{\pi} \sin s \, ds = 8.
\end{aligned}$$

Beispiel. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall U. Der Graph G dieser Funktion ist eine 1-dimensionale Karte mit der Parametrisierung

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (t, f(t)).$$



Da
$$\varphi' = (1, f'(t))$$
so erhalten wir, dass die Länge von G ist
$$\sigma_1(G) = \int_U \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$
Zum Beispiel, für die Parabel, die der Graph der Funktion $f(t) = \frac{t^2}{2}$ auf einem Intervall $(0, a)$ ist, erhalten wir
$$\sigma_1(G) = \int_0^a \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) + \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+1}.$$

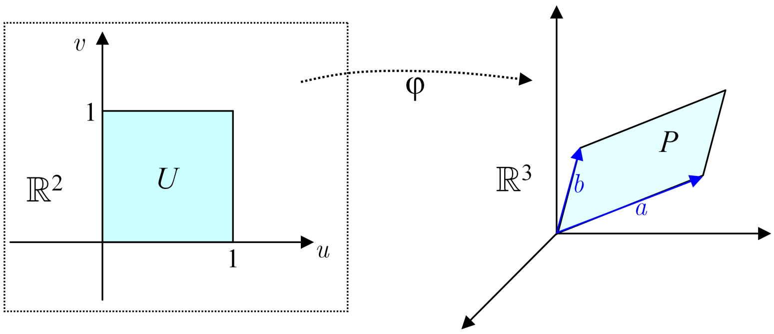
Dimension $k = 2$.

Das 2-dimensionale Oberflächenmaß σ_2 heißt *Flächeninhalt.* Sei (M, U, φ) eine 2-dimensionale parametrisierte Karte in $\mathbb{R}^n$. Die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ und in U bezeichnen wir mit (u, v). Wir haben
$$\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \\ \dots & \dots \\ \partial_u \varphi_n & \partial_v \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\partial_u \varphi} & \boxed{\partial_v \varphi} \end{pmatrix},$$
wobei $\partial_u \varphi$ und $\partial_v \varphi$ die Spaltenvektoren $(\partial_u \varphi_1, ..., \partial_u \varphi_n)^T$ bzw $(\partial_v \varphi_1, ..., \partial_v \varphi_n)^T$ bezeichnen. Dann gilt
$$(\varphi')^T \varphi' = \begin{pmatrix} (\partial_u \varphi, \partial_u \varphi) & (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) \\ (\partial_v \varphi, \partial_u \varphi) & (\partial_v \varphi, \partial_v \varphi) \end{pmatrix},$$
und somit erhalten wir
$$\operatorname{gram} \varphi = \|\partial_u \varphi\|^2 \|\partial_v \varphi\|^2 - (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi)^2. \tag{4.28}$$
Folglich erhalten wir
$$\boxed{d\sigma_2 = \sqrt{\|\partial_u \varphi\|^2 \|\partial_v \varphi\|^2 - (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi)^2}\, d\lambda_2}.$$

Beispiel. Für beliebige zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt die Identität
$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a, b)^2,$$
wobei $\times$ das Kreuzprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ist. Somit erhalten wir im Fall $n = 3$ aus (4.28), dass
$$\operatorname{gram} \varphi = \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|^2$$
und
$$d\sigma_2 = \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|\, d\lambda_2.$$

Als Beispiel betrachten wir ein Parallelogram P in $\mathbb{R}^3$ mit den Seiten $a, b \in \mathbb{R}^3$. Es lässt sich als eine parametrisierte Karte mit der folgenden Parametrisierung darstellen:

$$\varphi : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi(u,v) = ua + vb.$$



Ein Parallelogram P

Da $\partial_u \varphi = a$ und $\partial_v \varphi = b$, so erhalten wir

$$\sigma_2(P) = \int_{(0,1)\times(0,1)} \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, d\lambda_2 = \|a \times b\| .$$

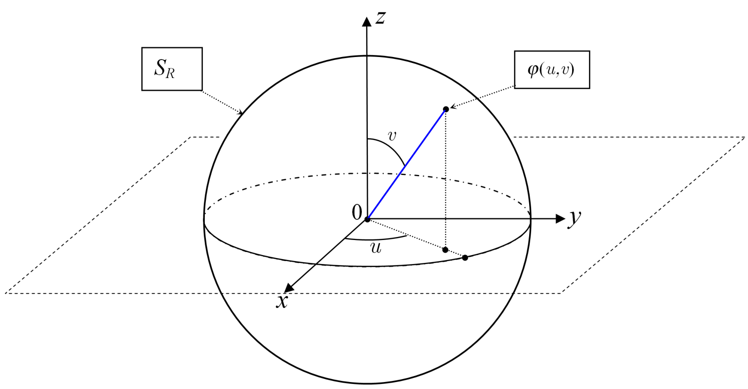
Beispiel. Betrachten wir eine Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ wobei

$$U = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$$

und

$$\varphi = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v),$$

mit einem $R > 0$. Die Parameters (u,v) sind die Polarwinkel in $\mathbb{R}^3$, und die 2-dimensionale Karte $M = \varphi(U)$ ist die Sphäre S_R von Radius R minus einen Längengrad.



Die Polarwinkel u und v

Dann haben wir

$$\partial_u\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin v\sin u \\ R\sin v\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v\varphi = \begin{pmatrix} R\cos v\cos u \\ R\cos v\sin u \\ -R\sin v \end{pmatrix}$$

und nach (4.28)

$$\begin{aligned} \operatorname{gram}\varphi &= \|\partial_u\varphi\|^2 \|\partial_v\varphi\|^2 - (\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)^2 \\ &= R^2\sin^2 v \cdot R^2 - 0 \\ &= R^4\sin^2 v \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_2(M) &= \int_U R^2 |\sin v| \, d\lambda_2(u, v) \\ &= R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin v dv \right) du \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Beispiel. Betrachten wir eine Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$U = (-\pi, \pi) \times (-R, R)$$

und

$$\varphi(u, v) = (\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, v),$$

wobei $u \in (-\pi, \pi)$ und $v \in (-R, R)$. Die Karte $M = \varphi(U)$ ist ein beschränktes Katenoid minus einen Längengrad – siehe Seite 145. Wir haben

$$\partial_u\varphi = \begin{pmatrix} -\cosh v\sin u \\ \cosh v\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v\varphi = \begin{pmatrix} \sinh v\cos u \\ \sinh v\sin u \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{gram}\varphi &= \|\partial_u\varphi\|^2 \|\partial_v\varphi\|^2 - (\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)^2 \\ &= \cosh^2 v \, \left(1 + \sinh^2 v\right) - 0 \\ &= \cosh^4 v. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \sigma_2(M) &= \int_U \cosh^2 v \, d\lambda_2(v, u) \\ &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\pi}^{\pi} du \right) \cosh^2 v \, dv \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \cosh^2 v \, dv \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \frac{\cosh 2v + 1}{2}\, dv \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}\sinh 2v + \frac{1}{2}v\right]_{-R}^{R} \\
&= \pi \left(\sinh 2R + 2R\right).
\end{aligned}
$$

Graph als eine Karte ($k = n - 1$).

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir den Graph G von g:

$$G = \{(u, g(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\}.$$

Wir wissen schon, dass G eine Karte mit der Parametrisierung (U, φ) ist, wobei

$$
\begin{gathered}
\varphi : U \to \mathbb{R}^n \\
\varphi(u) = (u, g(u))
\end{gathered}
\tag{4.29}
$$

(siehe (4.23)). Berechnen wir $\operatorname{gram}\varphi$. Bezeichnen

$$\alpha_i = \partial_{u_i} g$$

und bemerken, dass nach (4.24)

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} =: \left(\boxed{v_1} \; \boxed{v_2} \; \dots \; \boxed{v_{n-1}} \right),$$

wobei v_i die i-te Spalte von φ' bezeichnet. Dann haben wir

$$B := (\varphi')^T \varphi' = ((v_i, v_j))_{i,j=1}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \dots & \alpha_1\alpha_{n-1} \\ \alpha_1\alpha_2 & 1+\alpha_2^2 & \dots & \alpha_2\alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_1\alpha_{n-1} & \alpha_2\alpha_{n-1} & \dots & 1+\alpha_{n-1}^2 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

und

$$\operatorname{gram}\varphi = \det B.$$

Lemma 4.5 *Für die Matrix (4.30) gilt*

$$\det B = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2, \tag{4.31}$$

Folglich haben wir für die Parametrisierung (4.29)

$$\operatorname{gram}\varphi = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\partial_{u_i} g\right)^2 = 1 + \|g'\|^2 \tag{4.32}$$

und

$$\boxed{d\sigma_{n-1} = \sqrt{1 + \|g'\|^2}\, d\lambda_{n-1}}. \tag{4.33}$$

Es folgt aus (4.33) dass

$$\boxed{\sigma_{n-1}(G) = \int_U \sqrt{1 + \|g'\|^2}\, d\lambda_{n-1}}. \tag{4.34}$$

Beweis. Um $\det B$ zu berechnen, betrachten die folgende $n \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} & \alpha_1 \\ & 1 & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & & ... \\ \mathbf{0} & & & 1 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_{n-1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & ... & \boxed{v_{n-1}} & \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_{n-1} \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass

$$A^T A = \begin{pmatrix} \boxed{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \alpha_1^2 + ... + \alpha_{n-1}^2 + 1$, woraus folgt, dass

$$(\det A)^2 = \det\left(A^T A\right) = \left(\alpha_1^2 + ... + \alpha_{n-1}^2 + 1\right) \det B. \tag{4.35}$$

Die Determinante $\det A$ lässt sich mit Hilfe von Entwicklung nach der n-ten Zeile berechnen, da alle Minoren Dreiecksmatrizen sind. Zum Beispiel, der Minor von dem Eintrag $(n, 1)$ der Matrix A ist

$$\begin{vmatrix} 0 & ... & 0 & \alpha_1 \\ 1 & & \mathbf{0} & \alpha_2 \\ & \ddots & & ... \\ \mathbf{0} & & 1 & \alpha_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_2 & 1 & & \mathbf{0} \\ ... & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \mathbf{0} & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \alpha_1,$$

and der Kofaktor ist $(-1)^{n+1}(-1)^{n-2}\alpha_1$. Die anderen Minoren und Kofaktoren lassen sich analog bestimmen, und wir erhalten

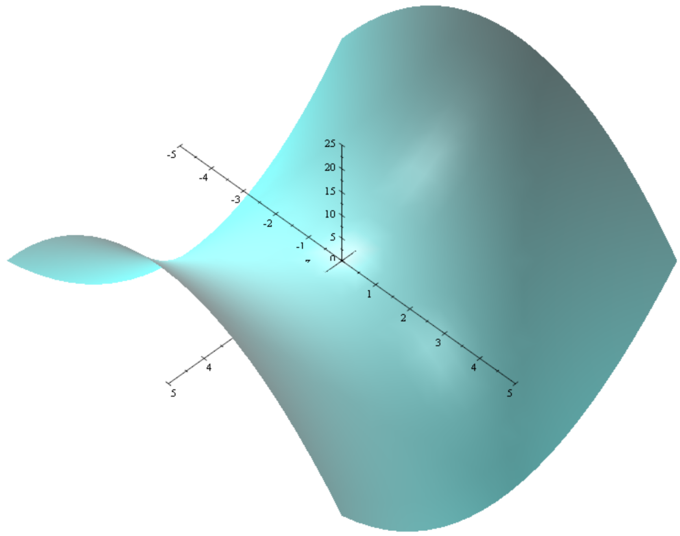
$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n+1}(-1)^{n-2}\alpha_1 \cdot \alpha_1 + (-1)^{n+2}(-1)^{n-3}\alpha_2 \cdot \alpha_2 + ... \\ &+ (-1)^{n+(n-1)}(-1)^{n-n}\alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} + (-1)^{n+n} 1 \cdot (-1) \\ &= -\left(\alpha_1^2 + ... + \alpha_{n-1}^2 + 1\right). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Einsetzen (4.36) in (4.35) ergibt (4.31). ∎

Beispiel. Das *hyperbolische Paraboloid* wird durch die Gleichung

$$z = x^2 - y^2 \tag{4.37}$$

angegeben.



Das hyperbolische Paraboloid

Bestimmen wir den Flächeninhalt des Graphes G der Funktion $g\,(x,y) = x^2 - y^2$ auf der Kreisscheibe

$$U = \left\{x^2 + y^2 < R^2\right\}.$$

Wir haben $g' = (2x, -2y)$, und (4.34) ergibt

$$\begin{aligned}
\sigma_2\,(G) &= \int_U \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\lambda_2\,(x,y) \\
&= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + 4r^2} d\varphi\right) r dr \\
&= 2\pi \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} \frac{1}{8} d\left(1 + 4r^2\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left(\left(1 + 4R^2\right)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

4.6 Flächen

4.6.1 Reguläre Karten

Sei (M, U, φ) eine parametrisierte Karte. Da M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, so ist die Euklidische Abstandsfunktion d auf M definiert, und somit ist (M, d) ein metrischer Raum. Betrachten wir die Abbildung $\varphi : U \to M$ als eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Diese Abbildung ist bijektiv und stetig. Die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : M \to U$ ist somit wohldefiniert, aber ist nicht unbedingt stetig.

Die Stetigkeit von φ^{-1} ist sehr gewünscht, da φ in diesem Fall ein *Homöomorphismus* zwischen U und M ist.

Definition. Eine Parametrisierung (U, φ) von der Karte $M = \varphi(U)$ heißt *regulär* wenn $\varphi : U \to M$ ein Homöomorphismus ist (d.h. wenn $\varphi^{-1} : M \to U$ stetig ist). Eine Karte M heißt regulär wenn sie eine reguläre Parametrisierung hat.

Alle oberhalb gegebenen Beispiele von Karten sind regulär. Insbesondere ist der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ eine reguläre Karte (siehe (4.23)). Tatsächlich hat die Parametrisierung $\varphi(u) = (u, g(u))$ des Graphes einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathbb{R}^n$ die inverse Abbildung $\varphi^{-1}(u, g(u)) = u$ die offensichtlich stetig ist.

Zeigen wir ein Beispiel einer nicht regulären Karte.

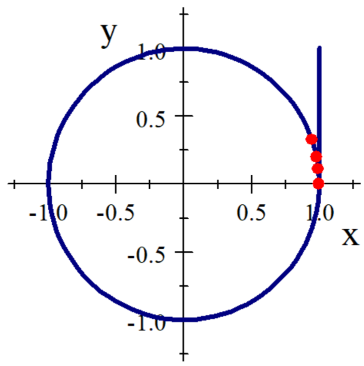
Beispiel. Die Abbildung

$$\varphi : (0, 2\pi + 1) \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & 0 < t \le 2\pi, \\ (1, t - 2\pi), & 2\pi < t < 2\pi + 1 \end{cases}$$

ist eine Parametrisierung. In der Tat ist φ stetig differenzierbar da

$$\varphi'(t) = \begin{cases} (-\sin t, \cos t), & 0 < t \le 2\pi, \\ (0, 1), & 2\pi < t < 2\pi + 1 \end{cases} \tag{4.38}$$

stetig ist, und φ ist nichtsingulär was auch aus (4.38) folgt.



Allerdings ist φ nicht regulär. Zum Beispiel, die Folge von Punkten $x_k = \left(\cos \frac{1}{k}, \sin \frac{1}{k}\right)$ für $k \to \infty$ gegen $x = (1, 0)$ konvergiert, während

$$\varphi^{-1}(x_k) = \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi \ne 0.$$

Folglich ist $\varphi^{-1} : M \to U$ nicht stetig.

Wir beweisen einige Eigenschaften von regulären Karten.

Lemma 4.6 *Sei (M, U, φ) eine parametrisierte Karte.*

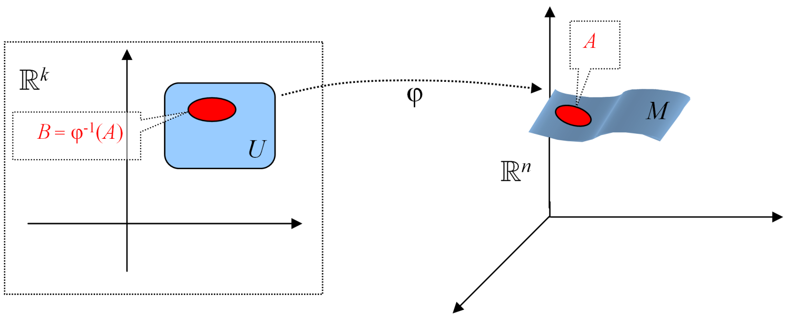
(a) Ist (U, φ) regulär so gilt $\sigma_{M,U,\varphi}(A) < \infty$ für jede kompakte Teilmenge $A \subset M$.

(b) Sei U' eine offene Teilmenge von U so dass $\overline{U'}$ kompakt ist und $\overline{U'} \subset U$. Dann ist die Restriktion $\varphi|_{U'}$ ein Homöomorphismus zwischen U' und $M' = \varphi(U')$, so dass (φ, U') eine reguläre Parametrisierung ist.

Ein Borel-Maß ν heißt *Radon-Maß* wenn $\nu(A) < \infty$ für jede kompakte Menge A aus dem Definitionsbereich von ν. Die Aussage (a) von Lemma 4.6 besagt somit, dass $\sigma_{M,U,\varphi}$ ein Radon-Maß ist wenn die Parametrisierung (U, φ) regulär ist.

19.01.22 Vorlesung 24

Beweis. (a) Da φ^{-1} stetig ist, so ist die Menge $B = \varphi^{-1}(A) \subset U$ kompakt.

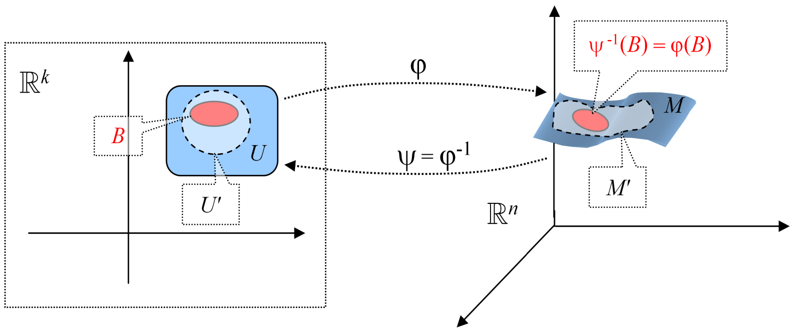


Es folgt, dass

$$\sigma_{M,U,\varphi}(A) = \int_B \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k < \infty,$$

da $\lambda_k(B) < \infty$ und die stetige Funktion $\sqrt{\operatorname{gram} \varphi}$ auf B beschränkt ist.

(b) Wir müssen beweisen, dass die Abbildung $\psi = \varphi^{-1} : M' \to U'$ stetig ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass für jede abgeschlossene Teilmenge $B \subset U'$ das Urbild $\psi^{-1}(B) = \varphi(B)$ abgeschlossen in M' ist.



Da $\overline{U'}$ kompakt ist, so ist B auch kompakt. Dann nach der Stetigkeit von φ ist die Menge $\varphi(B)$ kompakt, woraus folgt, dass $\psi^{-1}(B)$ abgeschlossen ist. ∎

Satz 4.7 *Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei reguläre k-dimensionale Parametrisierungen einer Karte M. Dann stimmen die Maße $\sigma_{M,U,\varphi}$ und $\sigma_{M,V,\psi}$ auf $\mathcal{B}(M)$ überein.*

Im speziellen Fall $n = k$ wurde diese Aussage im Beispiel im Abschnitt 4.5.2 bewiesen. Der vollständige Beweis von dem Satz 4.7 wird im Abschnitt 4.10 angegeben.

4.6.2 Begriff von Fläche

Fixieren wir eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und betrachten M als einen metrischen Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Definition. Die Menge M heißt *k-dimensionale Fläche*, wenn es eine abzählbare Überdeckung $M = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} M_\alpha$ gibt, wobei jede Menge M_α die folgenden Eigenschaften hat:
(i) M_a ist eine offene Teilmenge von M;
(ii) M_a ist eine k-dimensionale reguläre Karte.
Das Mengensystem $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ heißt in diesem Fall ein *Atlas* von M.

Da die Fläche M eine abzählbare Vereinigung von Karten ist, so ist M eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Jede Teilmengen $K \subset M$ die (i) und (ii) erfüllt (d.h. K eine offene k-dimensionale reguläre Karte ist) wird als eine *Karte in M* bezeichnet.

Satz 4.8 *Für jede k-dimensionale Fläche M gibt es genau ein Maß σ_M auf $\mathcal{B}(M)$ so dass für jede Karte K in M gilt*

$$\sigma_M(A) = \sigma_K(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(K).$$

Darüber hinaus ist σ_M σ-endlich.

In anderen Wörter, es gibt eine eindeutige Erweiterung der Oberflächenmaßen von den Karten in M auf das ganze Fläche M. Der Beweis wird im Abschnitt 4.10 angegeben.

Definition. Das Maß σ_M heißt das *Oberflächenmaß* auf der Fläche M.

Das Maß σ_M wird auch $\sigma_{k,M}$ oder σ_k bezeichnet.

4.7 Hyperflächen und Normalen

Definition. Eine $(n-1)$-dimensionale Fläche in $\mathbb{R}^n$ heißt *Hyperfläche.*

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wie wir schon wissen, der Graph

$$G = \{(u, g(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale Karte mit der Parametrisierung $\varphi(u) = (u, g(u))$ ist. Diese Parametrisierung ist regulär da die inverse Abbildung

$$\varphi^{-1}(u, g(u)) = u$$

offensichtlich stetig ist. Somit ist G eine reguläre $(n-1)$-dimensionale Karte, eine $(n-1)$-dimensionale Fläche und auch eine Hyperfläche.

4.7.1 Niveaumengen

Betrachten wir eine andere Typ von Hyperflächen.

Definition. Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $F:\Omega\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die *Niveaumenge* von F, d.h. die Menge

$$M=\{x\in\Omega : F(x)=0\}. \tag{4.39}$$

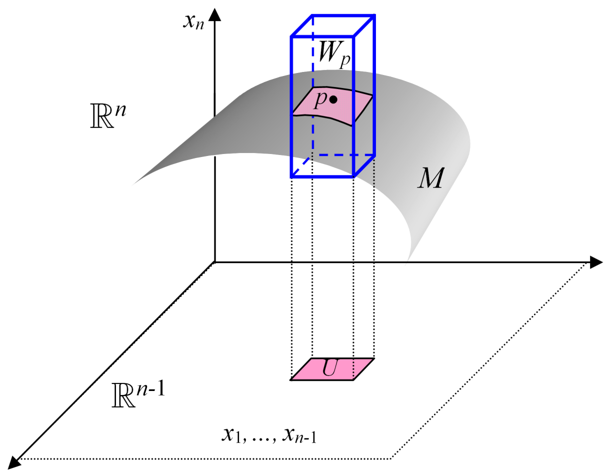
Die Niveaumenge M heißt *nichtsingulär*, wenn $F'(x)\neq 0$ für alle $x\in M$.

Lemma 4.9 *Eine nichtsinguläre Niveaumenge M von F ist eine Hyperfläche.*

Beweis. Für jeden Punkt $p\in M$ gibt es ein $i=1,...,n$ mit $\partial_{x_i}F(p)\neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $i=n$, d.h. $\partial_{x_n}F(p)\neq 0$. Nach dem Satz von der impliziten Funktion lässt die Gleichung $F(x_1,...,x_n)=0$ sich in der Nähe von p eindeutig bezüglich x_n lösen: es gibt eine offene Umgebung W_p von p in der Form $W_p=U\times J$ wobei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und J ein offenes Intervall, und eine stetig differenzierbare Funktion $g:U\to J$ so dass

$$F(x)=0\Leftrightarrow x_n=g(x_1,...,x_{n-1})\qquad\forall x\in W_p$$

Folglich ist $M_p:=M\cap W_p$ ein Graph und somit eine reguläre Karte. Die Menge M_p ist eine offene Teilmenge von M da W_p eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.



Zylinder W_p

Somit haben wir bewiesen, dass die Niveaumenge M lokal ein Graph ist. Das Mengensystem $\{W_p\}_{p\in M}$ ergibt eine offene Überdeckung von M. Da M eine abgeschlossene Teilmenge von Ω ist, so gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung $\{W_{p_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ von M, woraus folgt, dass $\{M_{p_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein Atlas ist und M eine Hyperfläche ist. ■

Bestimmen wir das Oberflächenmaß σ_M in der Karte M_p wie oberhalb. Da $F=0$ in M_p, so erhalten wir für alle $x\in W_p$ die Identität

$$F(x_1,...,x_{n-1},g(x_1,...,x_{n-1}))=0.$$

Es folgt, dass für jedes $i = 1, ..., n-1$

$$\partial_{x_i} F + (\partial_{x_n} F)\, \partial_{x_i} g = 0 \tag{4.40}$$

und somit

$$\partial_{x_i} g = -\frac{1}{\partial_{x_n} F} \partial_{x_i} F. \tag{4.41}$$

Nach (4.33) haben wir für das Oberflächenmaß σ_{n-1} auf M

$$d\sigma_{n-1} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_{x_i} g)^2}\, d\lambda_{n-1}.$$

Da

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_{x_i} g)^2 = 1 + \frac{1}{(\partial_{x_n} F)^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_{x_i} F)^2 = \frac{1}{(\partial_{x_n} F)^2} \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} F)^2 = \frac{\|F'\|^2}{(\partial_{x_n} F)^2},$$

so erhalten wir die folgende Identität:

$$\boxed{d\sigma_{n-1} = \frac{\|F'\|}{|\partial_{x_n} F|} d\lambda_{n-1} (x_1, ..., x_{n-1})}. \tag{4.42}$$

Beispiel. Betrachten wir in $\mathbb{R}^n$ die Funktion

$$F(x) = \|x\|^2 - R^2$$

so dass die Niveaumenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$$

die Sphäre von Radius R ist. Es gilt

$$F' = (2x_1, 2x_2, ..., 2x_n)$$

und somit auf S

$$\|F'\| = \sqrt{4x_1^2 + ... + 4x_n^2} = 2R \neq 0.$$

Insbesondere ist S eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. Es folgt aus (4.42), dass in jede Karte wo S ein Graph bezüglich x_n ist, gilt

$$d\sigma_{n-1} = \frac{\|F'\|}{|\partial_{x_n} F|} d\lambda_{n-1} = \frac{R}{x_n} d\lambda_{n-1}. \tag{4.43}$$

Z.B. die Halbsphäre

$$S_+ = \{x \in S : \ x_n > 0\}$$

ist der Graph der Funktion

$$x_n = g(u) = \sqrt{R^2 - \|u\|^2}, \quad u \in U,$$

wobei $u = (x_1, ..., x_{n-1})$ und
$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^{n-1} : \|u\| < R\right\}.$$
In der Karte S_+ gilt nach (4.43)
$$d\sigma_{n-1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|u\|^2}} d\lambda_{n-1}(u)$$
und somit
$$\sigma_{n-1}(S_+) = \int_U \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|u\|^2}} d\lambda_{n-1}(u).$$
Zum Beispiel, im Fall $n = 4$ ist S eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^4$ und U die Kugel von Radius R in $\mathbb{R}^3$. Mit Hilfe Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ (siehe (4.8) erhalten wir
$$\begin{aligned}
\sigma_3(S_+) &= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sin\theta d\theta\right) d\varphi\right) r^2 dr \\
&= 4\pi R \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\
&= 4\pi R \left(\int_0^R \frac{R^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \int_0^R \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr\right) \\
&= 4\pi R \left(R^2 \left[\arcsin \frac{r}{R}\right]_0^R - \left[\frac{1}{2} r\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{2} R^2 \arcsin \frac{r}{R}\right]_0^R\right) \\
&= 4\pi R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi^2 R^3.
\end{aligned}$$
Daraus folgt, dass
$$\sigma_3(S) = 2\pi^2 R^3. \tag{4.44}$$

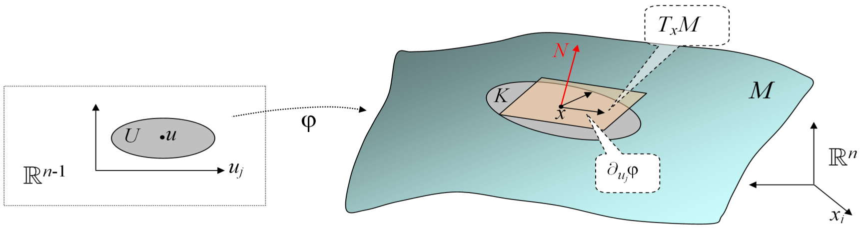
Beispiel. Betrachten wir das ganze Katenoid $K = \varphi\left(\overline{U}\right)$ wobei $\overline{U} = [-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty)$ und
$$\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$$
(siehe auch (4.22). Die Menge K ist keine Karte, aber wir zeigen, dass K eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ ist. Für jeden Punkt $(x, y, z) \in K$ gilt
$$x^2 + y^2 = (\cosh v \cos u)^2 + (\cosh v \sin u)^2 = \cosh^2 v = \cosh^2 z,$$
so dass die folgende Funktion
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \cosh^2 z$$
auf K verschwindet. Es ist leicht zu sehen, dass K die Niveaumenge der Funktion F in $\mathbb{R}^3$ ist. Wir haben
$$F' = (2x, 2y, -2\cosh z \sinh z),$$
so dass F' nur am Punkt $0 \notin K$ verschwindet. Somit ist die Niveaumenge K nichtsingulär und K ist eine Hyperfläche.

4.7.2 Normale zur Hyperfläche

Definition. Seien M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und K eine Karte in M mit einer Parametrisierung (U, φ). Die Vektoren $\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_{n-1}}\varphi \in \mathbb{R}^n$ und ihre lineare Kombinationen heißen *Tangentialvektoren* zu M im Punkt $x = \varphi(u)$. Die lineare Hülle

$$T_x M := \operatorname{span}\left(\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_{n-1}}\varphi\right) \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *Tangentialraum* zu M im Punkt x.



Der Tangentialraum $T_x M$ und die Normale N

Lemma 4.10 *Es gilt folgendes.*

(a) $\dim T_x M = n - 1$

(b) *Der Tangentialraum $T_x M$ ist unabhängig von der Wahl der Karte $K \ni x$.*

21.01.22 Vorlesung 25

Beweis von Lemma 4.10(a). Die Vektoren $\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_{n-1}}\varphi$ sind die Spalten der Jacobi-Matrix φ'. Da $\operatorname{rang}\varphi' = n - 1$, so sind die Vektoren $\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_{n-1}}\varphi$ linear unabhängig, woraus folgt, dass $\dim T_x M = n - 1$. ∎

Beweis von Lemma 4.10(b) befindet sich im Abschnitt 4.10.

Es folgt aus $\dim T_x M = n - 1$ dass das orthogonale Komplement $(T_x M)^\perp$ von $T_x M$ in $\mathbb{R}^n$ eindimensional ist.

Definition. Jeder Vektor $N \in (T_x M)^\perp \setminus \{0\}$ heißt *Normale* zum M im Punkt x.

Beispiel. Betrachten wir das Katenoid K in $\mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung

$$\varphi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

wobei $u \in (-\pi, \pi)$ und $v \in \mathbb{R}$ (siehe (4.22)). Somit erhalten wir die Tangentialvektoren

$$\begin{aligned}\partial_u\varphi &= (-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0)\\ \partial_v\varphi &= (\sinh v \cos u, \quad \sinh v \sin u, \quad 1).\end{aligned}$$

Bestimmen wir eine Normale zum K. Das Kreuzprodukt $\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi$ ist orthogonal zu den Vektoren $\partial_u\varphi$ und $\partial_v\varphi$, so dass der Vektor $N = \partial_u\varphi \times \partial_v\varphi$ eine Normale ist. Somit erhalten wir

$$N = \left(\begin{vmatrix} \cosh v \cos u & 0 \\ \sinh v \sin u & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\cosh v \sin u & 0 \\ \sinh v \cos u & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\cosh v \sin u & \cosh v \cos u \\ \sinh v \cos u & \sinh v \sin u \end{vmatrix} \right)$$

$$= (\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ -\cosh v \sinh v)$$
$$= \left(x,\ y,\ -\tfrac{1}{2}\sinh 2z\right).$$

Beispiel. Sei G der Graph in $\mathbb{R}^n$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wobei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ ist (siehe (4.23)). Für die Parametrisierung

$$\varphi(u) = (u, g(u)) = (u_1, ..., u_{n-1}, g(u_1, ..., u_{n-1}))$$

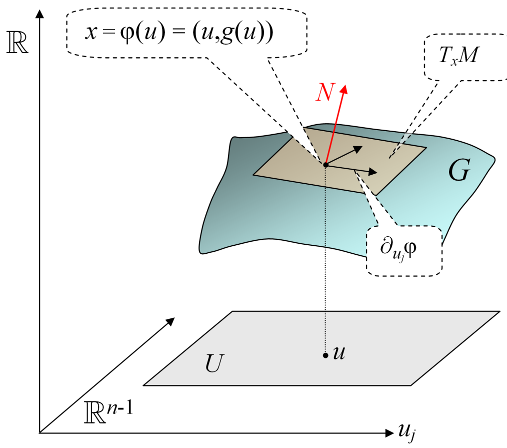
von G erhalten wir, für jedes $j = 1, ..., n-1$, dass

$$\partial_{u_j}\varphi = (0, ..., \overset{j}{\widehat{1}}, ..., 0, \partial_{u_j} g),$$

wobei 1 in der Position j steht. Betrachten wir den folgenden Vektor:

$$\boxed{N = (-g', 1) = (-\partial_{u_1} g, ... - \partial_{u_j} g, ..., -\partial_{u_{n-1}} g, 1)}. \tag{4.45}$$

Offensichtlich gilt $\left(N, \partial_{u_j}\varphi\right) = 0$ für alle $j = 1, ..., n-1$ so dass N orthogonal zu allen $\partial_{u_j}\varphi$ ist. Somit ist N eine Normale zum G.



Zum Beispiel, das hyperbolische Paraboloid P in $\mathbb{R}^3$ (siehe (4.37)) ist der Graph der Funktion $g(x, y) = x^2 - y^2$. Somit erhalten wir nach (4.45) die folgende Normale zum P:

$$N = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, 2y, 1).$$

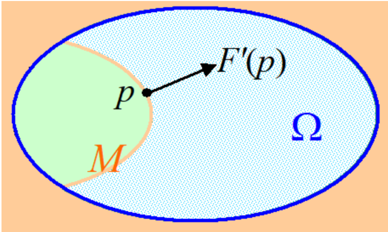
4.7.3 Normale zur Niveaumenge

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $F : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die Niveaumenge von F

$$M = \{x \in \Omega : F(x) = 0\}$$

und nehmen wir an, dass M nichtsingulär ist, d.h. $F' \neq 0$ auf M. Wir wissen schon, dass M eine Hyperfläche ist.

Lemma 4.11 *In jedem Punkt $p \in M$ ist der Vektor $F'(p)$ eine Normale zu M.*



Beweis. Wie im Beweis von dem Lemma 4.9, in der Nähe von jedem Punkt $p \in M$ lässt sich M als ein Graph darstellen. Sei M in der Nähe von p der Graph einer Funktion $x_n = g(u)$ mit $u = (x_1, ..., x_{n-1}) \in U$. Nach (4.45) ist der Vektor

$$N = \left(-\partial_{x_1} g, ..., -\partial_{x_{n-1}} g, 1\right)$$

eine Normale zu M im Punkt p. Nach (4.41) haben wir

$$-\partial_{x_i} g = \frac{1}{\partial_{x_n} F} \partial_{x_i} F,$$

woraus folgt, dass auch der Vektor

$$\left(\partial_{x_n} F\right) N = \left(\partial_{x_1} F, ..., \partial_{x_{n-1}} F, \partial_{x_n} F\right) = F'$$

eine Normale ist. ■

Zusammen mit $F'(p)$ ist auch jeder Vektor der Form

$$N = cF'(p)$$

mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Normale zu M im Punkt p. Für $c = \pm \frac{1}{\|F'(p)\|}$ erhalten wir, dass $\|N\| = 1$.

Definition. Eine Normale mit der Norm 1 heißt *Einheitsnormale.*

Jetzt besprechen wir eine natürliche Wahl des Vorzeichens von c, d.h. die Richtung der Einheitsnormale. Dafür betrachten wir die Mengen

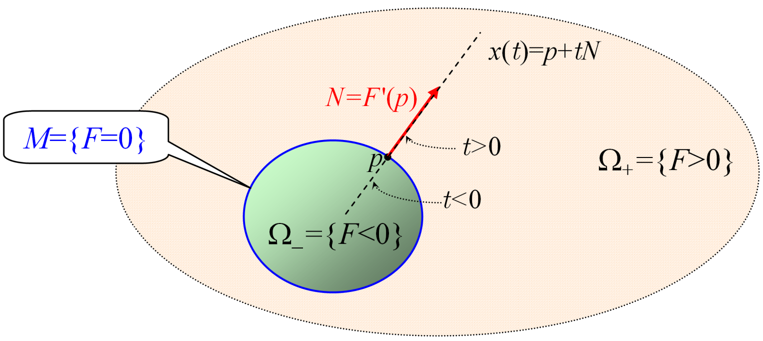
$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : F(x) > 0\} \quad \text{und} \quad \Omega_- = \{x \in \Omega : F(x) < 0\}.$$

Für eine Normale N im Punkt $p \in M$ betrachten wir die Gerade $x(t)$ die durch p in die Richtung N geht:

$$x(t) = p + tN, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definition. Die Normale N zum M heißt *äußere Normale* bezüglich Ω_- (und auch *innere Normale* bezüglich Ω_+) wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$x(t) \in \begin{cases} \Omega_- & \text{wenn } t < 0 \\ \Omega_+ & \text{wenn } t > 0. \end{cases}$$



Lemma 4.12 *Die Normale $N = F'(p)$ ist eine äußere Normale bezüglich Ω_-.*

Beweis. Wir haben nach der Differenzierbarkeit von F

$$F(p+h) = F(p) + (F'(p), h) + o(\|h\|)$$

für $\|h\| \to 0$. Insbesondere für $h = tF'(p)$ und $x(t) = p + tF'(p)$ gilt

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= F(p) + (F'(p), F'(p)\,t) + o(t) \\ &= \|F'(p)\|^2\,t + o(t) \quad \text{für } t \to 0. \end{aligned}$$

Da $\|F'(p)\|^2 > 0$, so erhalten wir $F(x(t)) > 0$ und somit $x(t) \in \Omega_+$ für kleine positive Werte von t, und $F(x(t)) < 0$ und $x(t) \in \Omega_-$ für kleine negative Werte von t, was zu beweisen war. ∎

Es folgt, dass auch $N = cF'(p)$ mit $c > 0$ eine äußere Normale bezüglich Ω_- ist.

Bezeichnen wir mit ν die äußere bezüglich Ω_- Einheitsnormale zu M, die somit eindeutig bestimmt ist:

$$\boxed{\nu = \frac{F'(p)}{\|F'(p)\|}}. \tag{4.46}$$

Beispiel. Set $R > 0$. Die Niveaumenge der Funktion

$$F(x) = \|x\|^2 - R^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - R^2$$

in $\mathbb{R}^n$ ist die Sphäre

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$$

von Radius R, und die Menge $\{F < 0\}$ ist die Kugel

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$$

von Radius R. Die Niveaumenge S_R ist nichtsingulär, da $F'(x) = 2x \neq 0$ auf S_R. Die äußere bezüglich B_R Einheitsnormale zum S_R ist somit

$$\nu = \frac{F'}{\|F'\|} = \frac{2x}{\|2x\|} = \frac{x}{R}. \tag{4.47}$$

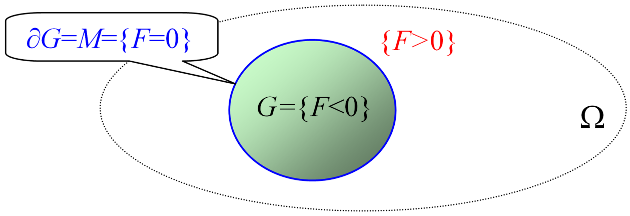
4.8 Gaußscher Integralsatz

Definition. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*, wenn folgendes gilt:

(i) G ist eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$;

(ii) es gibt eine offene Umgebung Ω von $\overline{G}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $G = \{x \in \Omega : F(x) < 0\}$;

(iii) die Niveaumenge $M = \{x \in \Omega : F(x) = 0\}$ ist nichtsingulär (d.h. $F' \neq 0$ auf M).



Beispiel. Die Kugel B_R in $\mathbb{R}^n$ von Radius $R > 0$ ist ein Gebiet, da für die Funktion

$$F(x) = \|x\|^2 - R^2$$

in $\mathbb{R}^n$ gilt $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\}$, und die Niveaumenge S_R nichtsingulär ist.

Behauptung. *Für ein Gebiet G gilt $\partial G = M$. Folglich ist ∂G eine Hyperfläche.*

Beweis. Für jeden Punkt $p \in M$ gilt nach der Voraussetzung $F'(p) \neq 0$. Somit ist p kein lokales Extremum von F. Da $F(p) = 0$, so gibt es in jeder Umgebung von p die Punkte x mit $F(x) < 0$ und $F(x) > 0$. Es folgt, dass

$$p \in \overline{G} \cap \overline{G^c} =: \partial G \quad \left(= \overline{G} \cap G^c = \overline{G} \setminus G\right).$$

Umgekehrt, für $p \in \partial G$ gibt es in jeder Umgebung die Punkte von G und G^c, d.h. die Punkte mit $F(x) < 0$ und $F(x) \geq 0$, woraus $F(p) = 0$ und $p \in M$ folgt.

Nach Lemma 4.9 ist die Niveaumenge M eine Hyperfläche, somit ist auch ∂G eine Hyperfläche. ■

Bezeichnen wir mit ν die äußere bezüglich G Einheitsnormale zum $\partial G = M$.

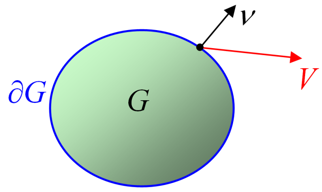
Definition. Ein *Vektorfeld* V in Ω ist eine Abbildung $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ist V differenzierbar, so definieren wir die *Divergenz* von V als eine Funktion $\operatorname{div} V : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{div} V := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} V_i = \operatorname{Spur} V'.$$

Hauptsatz 4.13 (Gaußscher Integralsatz) *Seien G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und ν die äußere bezüglich G Einheitsnormale zum Rand ∂G. Dann gilt für jeden stetig differenzierbaren Vektorfeld $V : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ die Identität*

$$\boxed{\int_G \operatorname{div} V \, d\lambda_n = \int_{\partial G} (V, \nu) \, d\sigma_{n-1}}, \tag{4.48}$$

wobei (V, ν) *das Skalarprodukt in* $\mathbb{R}^n$ *ist.*



Der Beweis von dem Satz 4.13 befindet sich im Abschnitt 4.11. Jetzt betrachten wir einige Anwendungen und Beispiele.

Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für den Vektorfeld

$$V = (0, ..., f, ..., 0)$$

mit f auf der Position i erhalten wir

$$\operatorname{div} V \ = \partial_{x_i} f \quad \text{und} \quad (V, \nu) = f \nu_i,$$

so dass (4.48) ergibt

$$\boxed{\int_G \partial_{x_i} f \, d\lambda_n = \int_{\partial G} f \nu_i d\sigma_{n-1}}, \tag{4.49}$$

was mit (4.20) übereinstimmt.

Flächeninhalt. Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Für den Vektorfeld

$$V(x) = x = (x_1, x_2)$$

erhalten wir

$$\operatorname{div} V = \partial_{x_1} x_1 + \partial_{x_2} x_2 = 2$$

so dass nach (4.48)

$$2\lambda_2 (G) = \int_{\partial G} (x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2) \, d\sigma_1. \tag{4.50}$$

Der Rand ∂G ist eine 1-dimensionale Fläche, d.h. ein Kurve. Nehmen wir an, dass ∂G eine Parametrisierung zulässt:

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2,$$

mit $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, d.h.

$$\partial G = \left\{ (\varphi_1 (t), \varphi_2 (t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

Der tangentiale Vektor im Punkt $\varphi(t)$ ist dann

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)),$$

und wir nehmen an, dass $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Der folgende Vektor ist eine Normale zum ∂G:

$$N = (\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t)),$$

da $(N, \varphi') = 0$. Für die äußere Einheitsnormale ν gilt somit

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2}} (\varphi_2', -\varphi_1')$$

(das Vorzeichen its entweder + oder − auf dem ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$), woraus folgt

$$x_1\nu_1 + x_2\nu_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2}} (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1') .$$

Nach (4.27) gilt für das Oberflächenmaß σ_1 auf ∂G

$$d\sigma_1 = \|\varphi'\| \, d\lambda_1 (t) = \sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2} d\lambda_1 (t) .$$

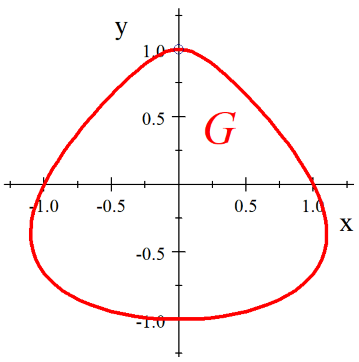
Einsetzen in (4.50) ergibt

$$\boxed{\lambda_2 (G) = \pm\tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1') \, dt} = \pm \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} dt. \tag{4.51}$$

Die Wahl von $\pm$ ist hier offensichtlich, da $\lambda_2 (G) \geq 0$.

Beispiel. Sei ∂G eine Kurve mit der folgenden Parametrisierung:

$$\varphi (t) = \left(\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t, - \cos t \right), \quad t \in [-\pi, \pi] . \tag{4.52}$$



Das Gebiet G mit dem Rand (4.52).

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' &= \left(\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \sin t + \cos t \left(\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \\ &= \sin^2 t + \frac{1}{4} \sin 2t \sin t + \cos^2 t + \frac{1}{2} \cos 2t \cos t \\ &= 1 + \frac{1}{8} (\cos t - \cos 3t) + \frac{1}{4} (\cos t + \cos 3t) \\ &= 1 + \frac{3}{8} \cos t + \frac{1}{8} \cos 3t, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\lambda_2 (G) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{3}{8} \cos t + \frac{1}{8} \cos 3t \right) dt = \pi.$$

Flächeninhalt in Polarkoordinaten. Nehmen wir an, dass der Rand ∂G eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^2$ parametrisch in Polarkoordinaten angegeben ist als $(r(t), \theta(t))$ mit $t \in [\alpha, \beta]$, wobei r der Polarradius ist und θ der Polarwinkel. Die Parametrisierung von ∂G in kartesischen Koordinaten ist wie folgt:

$$\varphi(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

und die Determinante in (4.51) ist gleich

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta' & r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta' \end{vmatrix} \\
&= (r\cos\theta)(r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta') - (r\sin\theta)(r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta') \\
&= r^2\theta'.
\end{aligned}$$

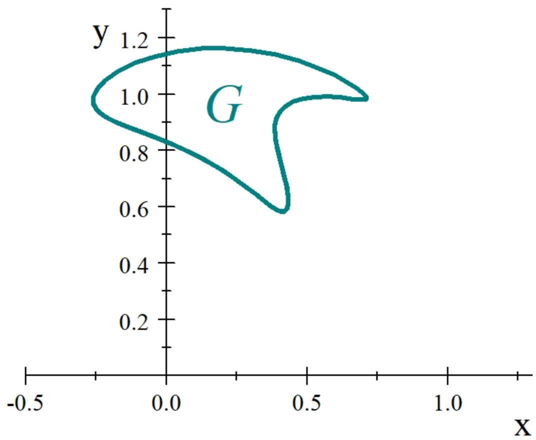
Einsetzen in (4.51) ergibt die Identität

$$\boxed{\lambda_2(G) = \pm\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(t)\,\theta'(t)\,dt}. \tag{4.53}$$

Beispiel. Betrachten wir den Rand ∂G mit der folgenden Parametrisierung in Polarkoordinaten:

$$r(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos t}, \qquad \theta(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{2}\sin^2 t \tag{4.54}$$

wobei $t \in [-\pi, \pi]$.



Das Gebiet G mit dem Rand (4.54).

Nach (4.53) erhalten wir

$$\lambda_2(G) = \pm\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{3}\cos t + \sin t\cos t\right)dt.$$

Da

$$\left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{3}\cos t + \sin t\cos t\right) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t\sin t + \cos t\sin t + \frac{1}{6}\cos^2 t$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{2}\frac{1+\cos 2t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{6}\frac{1+\cos 2t}{2} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\cos 2t \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{12}\cos 2t,\end{aligned}$$

so sehen wir, dass alle Glieder außer $\frac{1}{12}$ nach Integration von $-\pi$ bis π die Null ergeben. Somit erhalten wir

$$\lambda_2(G) = \frac{\pi}{12}.$$

Beispiel. Bestimmen wir in $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) das Integral

$$\int_S x^2 y^2 d\sigma_2,$$

wobei $S = \{\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre ist. Wir haben $S = \partial B$ wobei B die Einheitskugel ist, und die äußere Einheitsnormale ν zum S ist $\nu = (x, y, z)$ (nach (4.47)). Wir stellen das gegebene Integral in der folgenden Form dar:

$$\int_S x^2 y^2 d\sigma_2 = \int_S f \nu_1 d\sigma_2$$

mit einer geeigneten Funktion $f(x, y, z)$. Da $\nu_1 = x$, so gilt diese Identität für $f = xy^2$. Nach (4.49) haben wir

$$\int_S f\nu_1 d\sigma_2 = \int_B (\partial_x f)\, d\lambda_3 = \int_B y^2 d\lambda_3.$$

Das letzte Integral lässt sich mit Hilfe von Kugelkoordinaten bestimmen, aber ist es leichter zu bemerken, dass die folgenden drei Integrale

$$\int_B x^2 d\lambda_3, \quad \int_B y^2 d\lambda_3, \quad \int_B z^2 d\lambda_3$$

gleich sind und dass ihre Summe gleich $\int_B r^2 d\lambda_3$ ist, wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. In Kugelkoordinaten erhalten wir nach (4.8)

$$\int_B r^2 d\lambda_3 = \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right) r^2 dr = 4\pi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{5},$$

woraus folgt, dass

$$\int_B y^2 d\lambda_3 = \frac{1}{3}\int_B r^2 d\lambda_3 = \frac{4}{15}\pi.$$

Somit erhalten wir

$$\int_S x^2 y^2 d\sigma_2 = \frac{4}{15}\pi.$$

Beispiel. Berechnen wir in $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x, y) das Integral

$$\int_B \arccos x\, d\lambda_2,$$

wobei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe ist. Dafür betrachten wir die Funktion $f(x,y) = y \arccos x$ so dass $\partial_y f = \arccos x$. Nach (4.49) erhalten wir

$$\int_B \arccos x \, d\lambda_2 = \int_B (\partial_y f) \, d\lambda_2 = \int_S f \nu_2 d\sigma_1 = \int_S y^2 \arccos x \, d\sigma_1,$$

wobei $S = \partial B$ und $\nu = (x,y)$. Mit der Parametrisierung von S

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

erhalten wir $\|\varphi'\| = 1$ und

$$\begin{aligned}
\int_S y^2 \arccos x \, d\sigma_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, (\arccos \cos t) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t\right) |t| \, dt \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} t dt \\
&= \int_0^{\pi} t \, d\left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) \\
&= \left[t \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) dt \\
&= \pi^2 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4} [\cos 2t]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \pi^2.
\end{aligned}$$

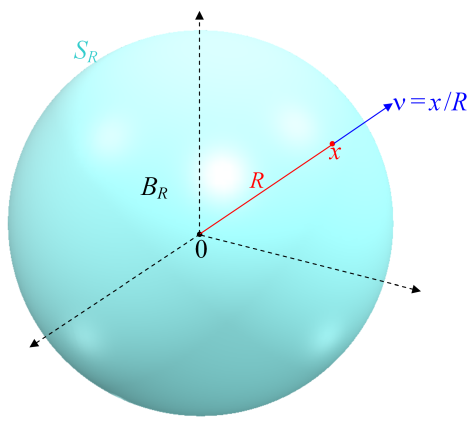
Es folgt, dass

$$\int_B \arccos x \; d\lambda_2 = \frac{1}{2} \pi^2.$$

26.01.22 Vorlesung 26

4.9 Weitere Beispiele zum Gaußschen Integralsatz

Beispiel. Betrachten wir die Kugel $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ von Radius R in $\mathbb{R}^n$ und die Sphäre $S_R = \partial B_R$. Nach (4.47), die äußere Einheitsnormale zur Sphäre S_R ist $\nu = \frac{x}{R}$.



Verwenden wir den Integralsatz (4.48), d.h.

$$\int_{B_R} \operatorname{div} V \, d\lambda_n = \int_{S_R} (V, \nu) \, d\sigma_{n-1} \ ,$$

mit dem Vektorfeld $V(x) = x$. Da $\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} V_i = n$, so gilt

$$\int_{B_R} \operatorname{div} V \, d\lambda_n = n\lambda_n(B_R) \, .$$

Andererseits haben wir

$$\int_{S_R} (V, \nu) \, d\sigma_{n-1} = \int_{S_R} \left(x, \frac{x}{R} \right) d\sigma_{n-1} = \int_{S_R} \frac{R^2}{R} d\sigma_{n-1} = R\sigma_{n-1}(S_R) \, ,$$

wobei wir benutzt haben, dass $(x, x) = \|x\|^2 = R^2$ auf S_R. Somit erhalten wir die folgende Identität:

$$\boxed{n\lambda_n(B_R) = R\sigma_{n-1}(S_R)}. \tag{4.55}$$

Zum Beispiel, in $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\lambda_3(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

woraus folgt, dass

$$\sigma_2(S_R) = 4\pi R^2.$$

In $\mathbb{R}^4$ gilt nach (4.44)

$$\sigma_3(S_R) = 2\pi^2 R^3,$$

woraus folgt, dass

$$\lambda_4(B_R) = \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

Nach der Aufgabe 64 gilt in $\mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(B_R) = c_n R^n$$

für eine von n abhängige Konstante $c_n > 0$. Es folgt aus (4.55) dass

$$\sigma_{n-1}(S_R) = c_n n R^{n-1}.$$

Insbesondere gilt die Identität

$$\lambda_n(B_R) = \int_0^R \sigma_{n-1}(S_r)\,dr.$$

Beispiel. Seien G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $f, g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ - stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen wir die folgende Regel der *partiellen Integration* in G:

$$\int_G (\partial_{x_i} f)\, g\, d\lambda_n = -\int_G f\,(\partial_{x_i} g)\, d\lambda_n + \int_{\partial G} f g\, \nu_i d\sigma_{n-1}. \tag{4.56}$$

Dafür verwenden wir die Identität (4.49) mit der Funktion fg anstatt f so dass

$$\int_G \partial_{x_i}(fg)\, d\lambda_n = \int_{\partial G} (fg)\, \nu_i d\sigma_{n-1}.$$

Es folgt nach der Produktregel

$$\int_G \partial_{x_i}(fg)\, d\lambda_n = \int_G (\partial_{x_i} f)\, g\, d\lambda_n + \int_G f\,(\partial_{x_i} g)\, d\lambda_n,$$

woraus (4.56) folgt.

Beispiel. Der elektromagnetische Feld in $\mathbb{R}^3$ besteht aus zwei zeittabhängigen Vektorfeldern D und B in $\mathbb{R}^3$, wobei D die *elektrische Flussdichte* ist und B die *magnetische Flussdichte*. Die Bewegung von D und B lässt sich mit vier *Maxwell-Gleichungen* beschreiben. Die ersten zwei der Maxwell-Gleichungen sind unabhängig von Zeit und besagen, dass für D und B als Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$ folgendes gilt:

$$\operatorname{div} D = \rho \quad \text{und} \quad \operatorname{div} B = 0,$$

wobei ρ die *Ladungsdichte* ist. Es folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, dass für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (D, \nu)\, d\sigma_{n-1} &= \int_G \rho d\lambda_3 \\ \int_{\partial G} (B, \nu)\, d\sigma_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Der Betrag $\int_G \rho d\lambda_3$ ist die elektrische Ladung im Gebiet G. Das Integral $\int_{\partial G} (D, \nu)\, d\sigma_{n-1}$ heißt der *elektrische Fluss* durch die Oberfläche ∂G des G. Somit stimmt der elektrische Fluss durch ∂G mit der Ladung von G überein. Diese Identität heißt *Gaußsches Gesetz,* und es war die Quelle für den Gaußschen Integralsatz. Der magnetische Fluss $\int_{\partial G} (B, \nu)\, d\sigma_{n-1}$ durch ∂G ist immer gleich 0, da es keine magnetische Ladung gibt.

4.10 Reguläre Parametrisierungen (Beweise)

Hier beweisen wir die Sätze 4.7, 4.8 und Lemma 4.10. Zuerst erinnern wir uns an Definition von parametrisierter Karte.

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$. Eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Parametrisierung wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv

2. φ ist stetig differenzierbar;

3. die Jacobi-Matrix φ' ist nichtsingulär, d.h. $\operatorname{rang} \varphi'(u) = k \quad$ für alle $u \in U$.

Die Menge $M = \varphi(U)$ heißt k-dimensionale Karte. Das Paar (U, φ) heißt Parametrisierung von M und das Dreifache (M, U, φ) heißt parametrisierte Karte.

Offensichtlich ist die Abbildung $\varphi : U \to M$ bijektiv. Ist die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : M \to U$ stetig, so heißt die Parametrisierung (U, φ) regulär.

Für jede Borel-Teilmenge $A \subset M$ definieren wir das Oberflächenmaß von A mit

$$\sigma_{M,U,\varphi}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k,$$

wobei

$$\operatorname{gram} \varphi = \det \left((\varphi')^T \varphi' \right).$$

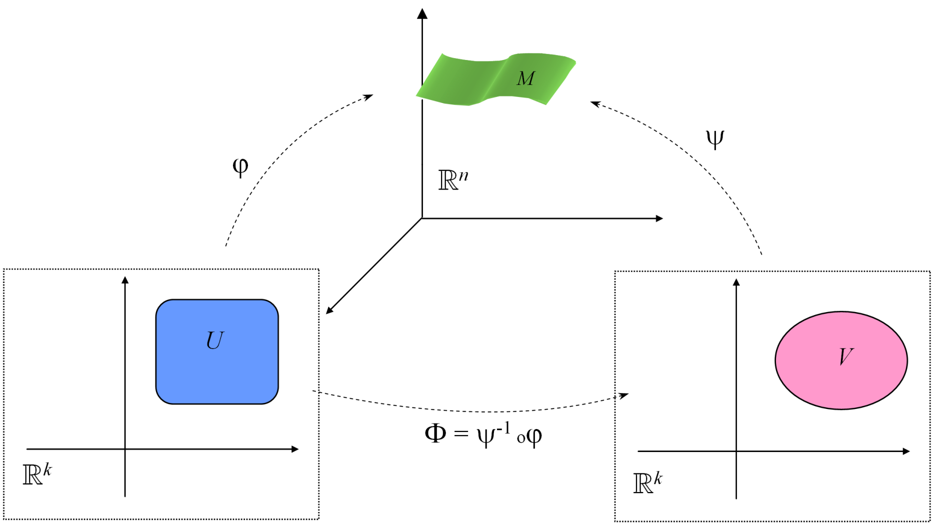
Nach dem Satz 4.4 gilt für jede nichtnegative Borel-Funktion f auf M

$$\int_M f d\sigma_{M,U,\varphi} = \int_U f \circ \varphi \sqrt{\operatorname{gram} \varphi}\, d\lambda_k \tag{4.57}$$

Beweis von dem Satz 4.7. Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei reguläre Parametrisierungen einer Karte M. Wir müssen beweisen, dass die Maße $\sigma_{M,U,\varphi}$ und $\sigma_{M,V,\psi}$ auf $\mathcal{B}(M)$ übereinstimmen. Da $\varphi : U \to M$ und $\psi : V \to M$ Homöomorphismen sind, so ist die Abbildung

$$\Phi := \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V \tag{4.58}$$

auch ein Homöomorphismus. Die Abbildung Φ heißt der *Koordinatenwechsel* zwischen U und V.



Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$

Behauptung. *Der Koordinatenwechsel $\Phi : U \to V$ ist ein Diffeomorphismus.*

Diese Behauptung wird unterhalb bewiesen. Jetzt zeigen wir, dass

$$\sigma_{M,U,\varphi} = \sigma_{M,V,\psi} \ ,$$

was äquivalent zur Identität

$$\int_M f d\sigma_{M,U,\varphi} = \int_M f d\sigma_{M,V,\psi}$$

für beliebige nichtnegative Borel-Funktion f auf M. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, so erhalten wir nach (4.57) und Transformationssatz, dass für jede

$$\begin{aligned} \int_M f d\sigma_{M,V,\psi} &= \int_V f \circ \psi \sqrt{\operatorname{gram} \psi}\, d\lambda_k \\ &= \int_U f \circ \psi \circ \Phi \sqrt{(\operatorname{gram} \psi) \circ \Phi}\ |\det \Phi'|\, d\lambda_k. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Da $\varphi = \psi \circ \Phi$ so gilt

$$f \circ \psi \circ \Phi = f \circ \varphi.$$

Nach der Kettenregel haben wir

$$\varphi' = (\psi' \circ \Phi)\, \Phi', \tag{4.60}$$

woraus folgt, dass

$$(\varphi')^T \varphi' = ((\psi' \circ \Phi)\, \Phi')^T (\psi' \circ \Phi)\, \Phi' = (\Phi')^T (\psi' \circ \Phi)^T (\psi' \circ \Phi)\, \Phi'$$

und somit

$$\begin{aligned} \operatorname{gram} \varphi &= \det \left((\varphi')^T \varphi' \right) \\ &= \det (\Phi')^T \det \left((\psi' \circ \Phi)^T (\psi' \circ \Phi) \right) \det \Phi' \\ &= (\det \Phi')^2 (\operatorname{gram} \psi) \circ \Phi. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\sqrt{\operatorname{gram} \varphi} = \sqrt{(\operatorname{gram} \psi) \circ \Phi}\ |\det \Phi'|\,,$$

und Einsetzen in (4.59) ergibt nach (4.57)

$$\int_M f d\sigma_{M,V,\psi} = \int_U f \circ \varphi \sqrt{\operatorname{gram} \varphi} d\lambda_k = \int_M f d\sigma_{M,U,\varphi}.$$

was zu beweisen war.

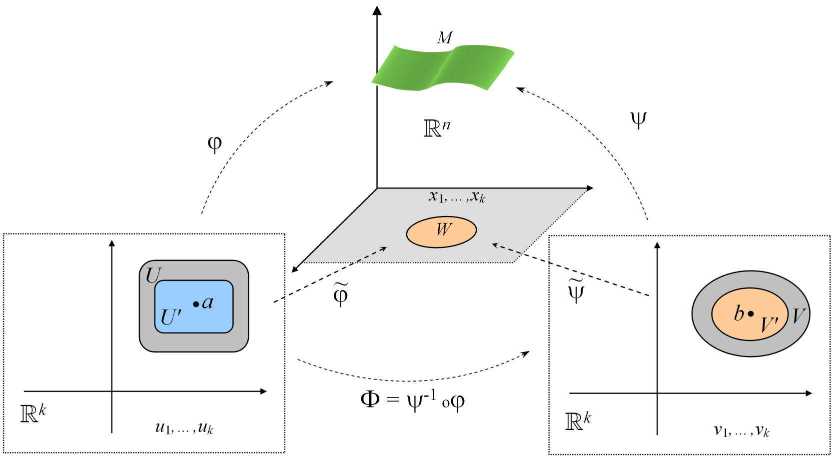
Jetzt beweisen wir die oben genannte Behauptung, dass der Koordinatenwechsel $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Zunächst beweisen wir, dass Φ stetig differenzierbar ist. Es reicht zu zeigen, dass Φ in einer Umgebung von beliebigem Punkt $a \in U$ stetig differenzierbar ist. Setzen wir $b = \Phi(a) \in V$ und betrachten die Jacobi-Matrix ψ' an der Stelle b:

$$\psi'(b) = \begin{pmatrix} \boxed{\partial_{v_1} \psi_1 \quad \dots \quad \partial_{v_k} \psi_1} \\ \boxed{\partial_{v_1} \psi_2 \quad \dots \quad \partial_{v_k} \psi_2} \\ \dots \\ \boxed{\partial_{v_1} \psi_n \quad \dots \quad \partial_{v_k} \psi_n} \end{pmatrix}$$

Da rang $\psi'(b) = k$, so gibt es in $\psi'(b)$ k linear unabhängige Zeilen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die ersten k Zeilen linear unabhängig sind. Betrachten wir dann die Abbildung

$$\widetilde{\psi} : V \to \mathbb{R}^k$$
$$\widetilde{\psi}(u) = (\psi_1(u), ..., \psi_k(u))$$

die in der Nähe von b die Bedingung rang $\widetilde{\psi}' = k$ erfüllt.



Zwei Parametrisierungen (U, φ) **und** (V, ψ) **von** M

Da $\widetilde{\psi}'$ eine $k \times k$ Matrix ist, so gilt auch $\det \widetilde{\psi}'(b) \neq 0$. Nach dem Satz von der inversen Funktion gibt es eine offene Umgebung V' von b, so dass $W = \widetilde{\psi}(V')$ offen ist, $\widetilde{\psi}|_{V'}$ invertierbar ist, und die inverse Abbildung $\widetilde{\psi}^{-1} : W \to V'$ stetig differenzierbar ist. Insbesondere ist $\widetilde{\psi}$ ein Diffeomorphismus von V' nach W.

Nach der Stetigkeit von Φ es gibt eine offene Umgebung U' von a, so ist $\Phi(U') \subset V'$. Betrachten wir auch die Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : U' \to \mathbb{R}^k$$
$$\widetilde{\varphi}(u) = (\varphi_1(u), ..., \varphi_k(u))$$

Für ein $u \in U'$ setzen wir $v = \Phi(u)$ so dass $v \in V'$. Dann gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} v = \Phi(u) &\Rightarrow \psi(v) = \varphi(u) \\ &\Rightarrow \widetilde{\psi}(v) = \widetilde{\varphi}(u) \\ &\Rightarrow v = \widetilde{\psi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}(u) \end{aligned}$$

(was auch ergibt, dass $\widetilde{\varphi}(u) \in W$ und somit $\widetilde{\varphi}(U') \subset W$). Wir erhalten, dass $\Phi = \widetilde{\psi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ in U'. Da $\widetilde{\psi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ stetig differenzierbar ist, so folgt es, dass Φ stetig differenzierbar ist.

Analog beweist man, dass $\Phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ auch stetig differenzierbar ist. Somit ist $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. ∎

Erinnern wir uns an Definition von einer Fläche. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt eine (k-dimensionale) Karte in M wenn K offen in M ist und

K eine k-dimensionale reguläre Karte ist. Die Menge M heißt eine (k-dimensionale) Fläche wenn $M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} M_\alpha$ wobei jedes M_α eine (k-dimensionale) Karte in M ist. Das Mengensystem $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ heißt ein *Atlas* von M.

Besweis von dem Satz 4.8. Wir müssen beweisen, dass für jede k-dimensionale Fläche M in $\mathbb{R}^n$ es genau ein Maß σ_M auf $\mathcal{B}(M)$ gibt so dass für jede Karte K in M gilt

$$\sigma_M(A) = \sigma_K(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(K)$$

(wobei σ_K das Oberflächenmaß auf K ist das unabhängig von der Parametrisierung von K ist). Darüber hinaus ist σ_M σ-endlich.

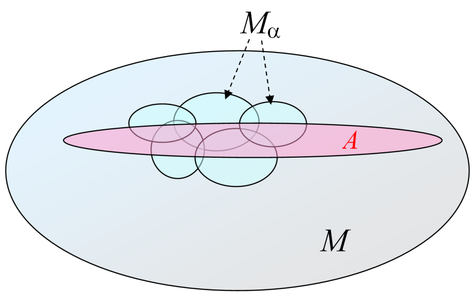
Betrachten wir das folgende Mengensystem

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{B}(K) \text{ für eine Karte } K \text{ in } M\} = \bigcup_K \mathcal{B}(K).$$

Offensichtlich $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(M)$ und $\mathcal{S}$ ist ein Halbring, da $\mathcal{S}$ abgeschlossen bezüglich der Mengenoperationen Differenz und Schnitt ist. In der Tat, für $A, B \in \mathcal{S}$ sind die Mengen $A \cap B$ und $A \setminus B$ Borel und liegen in dieselber Karte wie A, so dass $A \cap B$ und $A \setminus B$ Elemente von $\mathcal{S}$ sind. Zeigen wir dass

$$\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(M), \tag{4.61}$$

wobei $\sigma(\mathcal{S})$ die kleinste σ-Algebra ist die $\mathcal{S}$ umfasst. Da $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(M)$ so gilt auch $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(M)$.



Umgekehrt, für jede Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ gilt

$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} (A \cap M_\alpha) \in \sigma(\mathcal{S}),$$

da $A \cap M_\alpha \in \mathcal{B}(M_\alpha) \subset \mathcal{S}$, woraus folgt $\mathcal{B}(M) \subset \sigma(\mathcal{S})$ und somit auch (4.61).

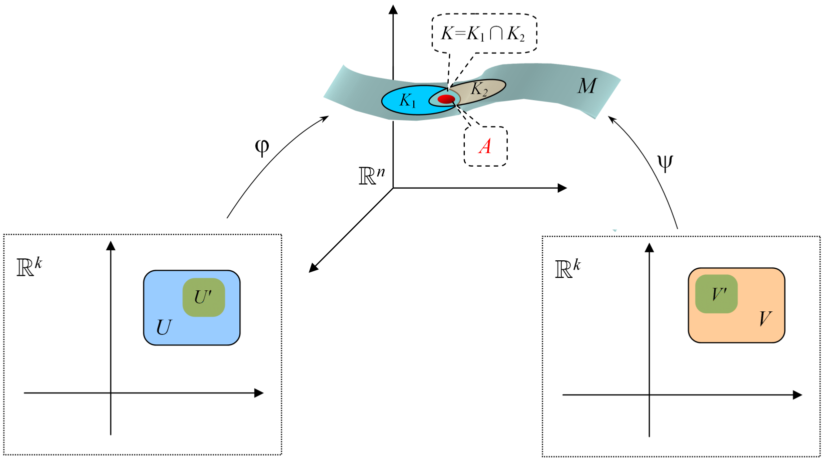
28.01.22 Vorlesung 27

Definieren wir die Funktion σ_M auf dem Halbring $\mathcal{S}$ wie folgt:

$$\sigma_M(A) = \sigma_K(A) \quad \text{wenn } A \in \mathcal{B}(K),$$

wobei K eine Karte in M ist. Zeigen wir zuerst, dass die Funktion σ_M wohldefiniert ist, d.h. $\sigma_M(A)$ ist unabhängig von der Wahl der Karte K ist wenn A in mehreren Karten liegt.

Seien K_1 und K_2 zwei Karten in M mit $A \subset K_1 \cap K_2$.



Die Karte $K = K_1 \cap K_2$

Seien (U, φ) und (V, ψ) reguläre Parametrisierungen von K_1 bzw K_2. Wir müssen beweisen, dass

$$\sigma_{K_1}(A) = \sigma_{K_2}(A). \tag{4.62}$$

Da $K = K_1 \cap K_2$ eine offene Teilmenge von M ist, so sind die Mengen

$$U' = \varphi^{-1}(K) \quad \text{und} \quad V' = \psi^{-1}(K)$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Somit ist K eine Karte in M mit zwei regulären Parametrisierungen (U', φ) und (V', ψ), und die Identität (4.62) folgt aus dem Satz 4.7:

$$\sigma_{K_1}(A) = \sigma_{K,U',\varphi}(A) = \sigma_{K,V',\psi}(A) = \sigma_{K_2}(A).$$

Somit ist $\sigma_M(A)$ auf $\mathcal{S}$ wohldefiniert.

Zeigen wir, dass die Funktion σ_M σ-additiv auf $\mathcal{S}$ ist. Gilt $A = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $A, A_i \in \mathcal{S}$, so liegt die Menge A in einer Karte K, und somit liegen auch alle A_i in K, woraus folgt

$$\sigma_M(A) = \sigma_K(A) = \sum_i \sigma_K(A_i) = \sum_i \sigma_M(A_i),$$

da σ_K ein Maß auf $\mathcal{B}(K)$ ist.

Zeigen wir, dass σ_M σ-endlich ist. In der Tat ist jede Karte M_α eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen, und jede kompakte Teilmenge hat endliches Maß (Lemma 4.6(a)). Es folgt, dass M eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen mit endlichen Maßen ist, d.h. σ_M σ-endlich ist.

Nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory lässt sich σ_M eindeutig auf $\mathcal{B}(M) = \sigma(\mathcal{S})$ erweitern. ∎

Bemerkung. In Differentialgeometrie definiert man eine k-dimensionale *Mannigfaltigkeit* als ein Hausdorff topologischer Raum M mit einem Atlas $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- alle K_α sind offene Teilmengen von M und $M = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} K_\alpha$;

- für jedes α gibt ein Homöomorphismus $\varphi_a : U_\alpha \to K_\alpha$ wobei U_α eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ ist;

- der Koordinatenwechsel $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ ist für beliebige α, β ein Diffeomorphismus zwischen $\varphi_\alpha^{-1}(K_\alpha \cap K_\beta)$ und $\varphi_\beta^{-1}(K_\alpha \cap K_\beta)$ (die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ sind).

In diesem Fall ist die Differenzierbarkeit von dem Koordinatenwechsel ein Teil von Definition während im Fall von einer k-dimensionalen Fläche M in $\mathbb{R}^n$ die Differenzierbarkeit von dem Koordinatenwechsel aus der Differenzierbarkeit und Regularität von Parametrisierungen folgt. Folglich können wir besagen, dass jede Fläche auch eine Mannigfaltigkeit ist.

Beweis von Lemma 4.10(b)**.** Hier besagt man, dass der Tangentialraum $T_x M$ einer Hyperfläche M unabhängig von der Wahl der Karte $K \ni x$ ist. Eine Hyperfläche M ist eine Fläche in $\mathbb{R}^n$ von Dimension $n-1$. Wir beweisen diese Aussage für eine Fläche M in $\mathbb{R}^n$ von beliebiger Dimension $k \le n$.

Fixieren wir ein $x \in M$ und sei $K \ni x$ eine (k-dimensionale) Karte in M mit einer Parametrisierung (U, φ). Der Tangentialraum definiert man wie folgt:

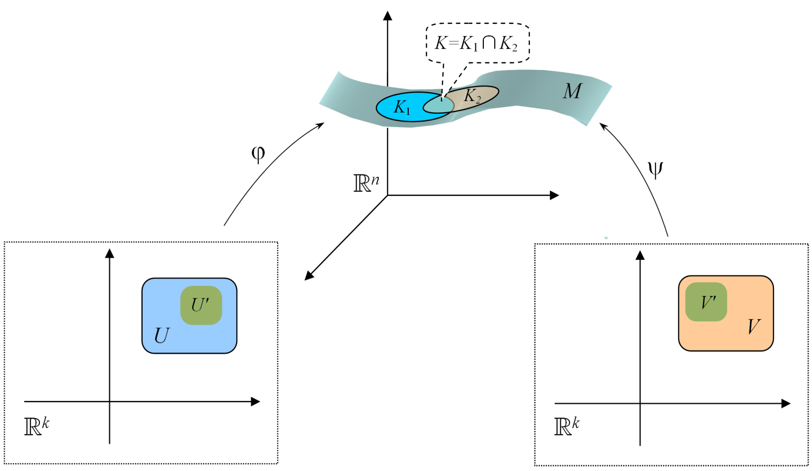
$$T_x M = \operatorname{span}(\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_k}\varphi) \subset \mathbb{R}^n.$$

Da $\partial_{u_1}\varphi, ..., \partial_{u_k}\varphi$ die Spalten der Jacobi-Matrix φ' sind und $\operatorname{rang}\varphi' = k$, so sind diese Vektoren linear unabhängig und somit $\dim T_x M = k$.

Wir beweisen, dass $T_x M$ unabhängig von der Wahl der Karte K und Parametrisierung (U, φ) ist. Seien K_1 und K_2 zwei Karten in M mit $x \in K_1 \cap K_2$. Seien (U, φ) und (V, ψ) reguläre Parametrisierungen von K_1 bzw K_2. Da $K = K_1 \cap K_2$ eine offene Teilmenge von M ist, so sind die Mengen

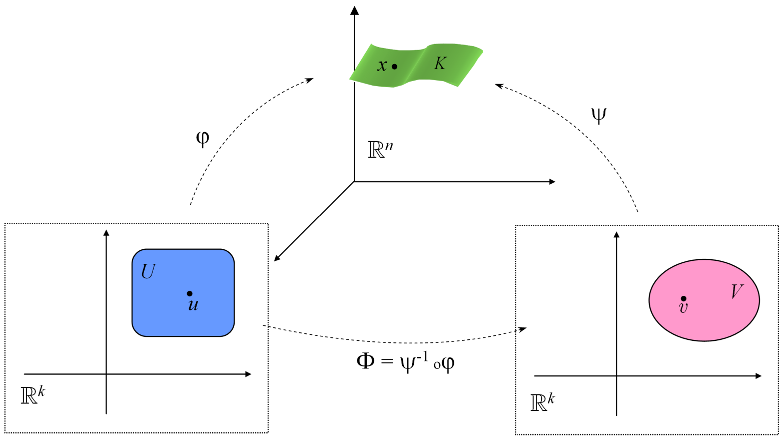
$$U' = \varphi^{-1}(K) \quad \text{und} \quad V' = \psi^{-1}(K)$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Somit ist K eine Karte in M mit zwei regulären Parametrisierungen (U', φ) und (V', ψ).



Die Karte $K = K_1 \cap K_2$

Umbenennen wir U' und V' in U bzw V. So reicht es zu beweisen, dass T_xM für $x \in K$ unabhängig von der Wahl von Parametrisierungen (U, φ) und (V, ψ) ist. Für jedes $x \in K$ gibt es $u \in U$ und $v \in V$ so dass $x = \varphi(u) = \psi(v)$.



Die Abbildung $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi$

Zeigen wir, dass

$$\operatorname{span}\left(\partial_{u_1}\varphi(u), ..., \partial_{u_k}\varphi(u)\right) = \operatorname{span}\left(\partial_{v_1}\psi(v), ..., \partial_{v_k}\psi(v)\right). \tag{4.63}$$

Betrachten wir den Koordinatenwechsel in K

$$\Phi := \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V.$$

Nach der Behauptung im Beweis von dem Satz 4.7 ist Φ ein Diffeomorphismus ist, d.h. Φ und Φ^{-1} stetig differenzierbar sind (siehe (4.58)). Wir haben $\varphi = \psi \circ \Phi$, insbesondere für jedes $i = 1, ..., n$

$$\varphi_i(u) = \psi_i(\Phi(u)) = \psi_i(\Phi_1(u), ..., \Phi_l(u), ..., \Phi_k(u)).$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\partial_{u_j}\varphi_i(u) = \sum_{l=1}^{k} (\partial_{v_l}\psi_i)(\Phi(u))\,\partial_{u_j}\Phi_l(u) = \sum_{l=1}^{k} \partial_{v_l}\psi_i(v)\,\partial_{u_j}\Phi_l(u),$$

da $v = \Phi(u)$. Da $\partial_{u_j}\Phi_l(u)$ von i unabhängig ist, so folgt es, dass für die Spaltenvektoren $\partial_{u_j}\varphi$ gilt

$$\partial_{u_j}\varphi(u) = \sum_{l=1}^{k} \partial_{v_l}\psi(v)\,\partial_{u_j}\Phi_l(u).$$

Somit ist $\partial_{u_j}\varphi(u)$ eine lineare Kombination von den Vektoren $\partial_{v_l}\psi(v)$. Analog ist $\partial_{v_l}\psi(v)$ eine lineare Kombination von den Vektoren $\partial_{u_j}\varphi(u)$, woraus (4.63) folgt. ∎

4.11 Beweis von dem Gaußschen Integralsatz

Beweis von dem Satz 4.13. Die Identität (4.48) ist äquivalent zu folgendes: für jedes Gebiet G in $\mathbb{R}^n$, für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ und für jedes $i = 1, ..., n$ gilt

$$\int_G \partial_{x_i} f \; d\lambda_n = \int_{\partial G} f \nu_i d\sigma_{n-1}. \tag{4.64}$$

In der Tat, gilt (4.64) so für einen Vektorfeld V auf $\overline{G}$ verwenden wir (4.64) mit $f = V_i$ und addieren über alle $i = 1, ..., n$. Wir erhalten

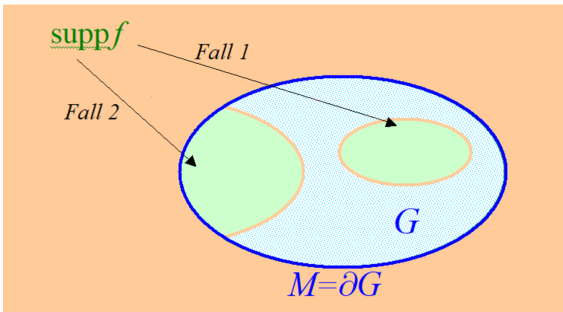
$$\int_G \operatorname{div} V \; d\lambda_n = \sum_{i=1}^n \int_G \partial_{x_i} V_i \; d\lambda_n = \sum_{i=1}^n \int_{\partial G} V_i \nu_i d\sigma_{n-1} = \int_{\partial G} (V, \nu) \, d\sigma_{n-1},$$

d.h. (4.48).

Wir beweisen (4.64) in drei Schritten abhängig von dem Träger

$$\operatorname{supp} f = \overline{\left\{x \in \overline{G} : f \neq 0\right\}}.$$

Wir betrachten separat drei Fälle: wenn $\operatorname{supp} f$ im G liegt, wenn $\operatorname{supp} f$ in der Nähe von einem Punkt am Rand ∂G liegt und wenn $\operatorname{supp} f$ beliebig ist.



Fall 1. *Beweisen wir (4.64) im Fall wenn* $\operatorname{supp} f$ *eine Teilmenge von* G *ist.*

In diesem Fall verschwindet f in der Nähe von ∂G, und man muss in diesem Fall beweisen, dass

$$\int_G \partial_{x_i} f \; d\lambda_n = 0. \tag{4.65}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an dass $i = 1$. Erweitern wir die Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ indem wir $f = 0$ in $\overline{G}^c$ setzen. Dann ist f in $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, in G integrierbar, und es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_G \partial_{x_1} f \; d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} f \; d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} f \; d\lambda\,(x_1) \right) d\lambda_{n-1}\,(x_2, ..., x_n)\,.$$

Da die Funktion $x_1 \mapsto f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ einen beschränkten Träger in $\mathbb{R}$ hat, so erhalten wir nach dem Fundamentalsatz der Analysis, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} f \; d\lambda\,(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_1} f \, dx_1 = 0,$$

woraus (4.65) folgt.

Weiter benutzen wir die Notation Ω, F, M aus der Definition des Gebietes G, d.h. Ω ist eine offene Umgebung von $\overline{G}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion, $G = \{F < 0\}$, und F' ist nichtsingulär auf $M = \{F = 0\}$. Wir wissen, dass $M = \partial G$.

Fall 2. *Sei $Q \subset \Omega$ ein offener Quader so dass $M \cap Q$ ein Graph ist. Beweisen wir (4.64) für alle stetig differenzierbare Funktionen f mit* $\operatorname{supp} f \subset Q$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $Q = U \times (\alpha, \beta)$, wobei U ein offener Quader in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist und $\alpha < \beta$, und dass für eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to (\alpha, \beta)$ gilt

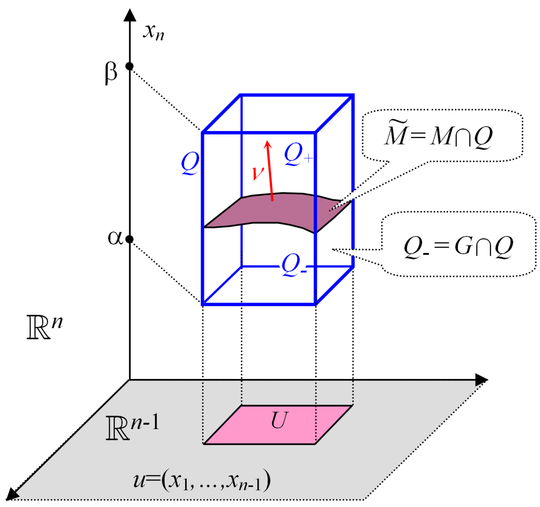
$$\widetilde{M} := M \cap Q = \{(u, x_n) \in Q : x_n = g(u)\}, \tag{4.66}$$

wobei $u = (x_1, ..., x_{n-1})$. Die Menge $\widetilde{M}$ als ein Graph ist eine reguläre Karte mit Parametrisierung (U, φ), wobei

$$\varphi(u) = (u, g(u)).$$

Insbesondere ist $\widetilde{M}$ eine Karte in M. Betrachten wir den Untergraph Q_- und den Obergraph Q_+ der Funktion g:

$$Q_- = \{(u, x_n) \in Q : x_n < g(u)\}, \tag{4.67}$$
$$Q_+ = \{(u, x_n) \in Q : x_n > g(u)\}. \tag{4.68}$$



Die Mengen Q_- und Q_+

Zeigen wir, dass die Menge $G \cap Q$ mit entweder Q_- oder Q_+ übereinstimmt. In $Q_- \cup Q_+$ verschwindet F nicht. Da Q_+ und Q_- zusammenhängend sind (weil U zusammenhängend ist), so folgt es, dass das Vorzeichen von F in Q_+ und in Q_- konstant ist. Hat F das gleiche Vorzeichen in Q_+ und Q_-, so sind alle Punkte in $\widetilde{M}$ Extrempunkte von F, woraus folgt, dass $F' = 0$ auf $\widetilde{M}$, was ein Widerspruch ist, da M nichtsingulär ist. Somit hat F in Q_- und Q_+ die verschiedenen Vorzeichen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $F < 0$ in Q_- und somit $F > 0$ in Q_+ (sonst ersetzen wir F mit $-F$). Dann erhalten wir

$$G \cap Q = Q_-. \tag{4.69}$$

Bestimmen wir in Q die äußere bezüglich G Einheitsnormale ν zum M. Nach (4.69) ist ν auch die äußere bezüglich Q_- Einheitsnormale zum $\widetilde{M}$. Betrachten wir in Q die Funktion

$$\widetilde{F}(x) = x_n - g(u)$$

so dass

$$\widetilde{M} = \left\{x \in Q : \widetilde{F} = 0\right\} \quad \text{und} \quad Q_- = \left\{x \in Q : \widetilde{F} < 0\right\}.$$

Nach (4.46) erhalten wir für die äußere bezüglich Q_- Einheitsnormale zum $\widetilde{M}$:

$$\nu = \frac{\widetilde{F}'}{||\widetilde{F}'||}.$$

Da

$$\widetilde{F}' = \left(-\partial_{u_1} g, ..., -\partial_{u_{n-1}} g, 1\right)$$

so erhalten wir

$$\nu = \frac{\left(-\partial_{u_1} g, ..., -\partial_{u_{n-1}} g, 1\right)}{\sqrt{1 + \|g'\|^2}}. \tag{4.70}$$

Nach (4.33) haben wir

$$d\sigma_{\widetilde{M}} = \sqrt{1 + \|g'\|^2}\, d\lambda_{n-1}(u). \tag{4.71}$$

Jetzt beweisen wir (4.64) separat in zwei Fällen: $i = n$ und $i < n$.

Fall $i = n$. Da Q_- die Menge zwischen den Graphen von Funktionen $x_n = g(u)$ und $x_n = \alpha$ ist, so erhalten wir nach dem Korollar 3.6 und Fundamentalsatz

$$\begin{aligned}
\int_G \partial_{x_n} f \; d\lambda_n &= \int_{Q_-} \partial_{x_n} f \; d\lambda_n \\
&= \int_U \left(\int_\alpha^{g(u)} \partial_{x_n} f(u, x_n)\, dx_n\right) d\lambda_{n-1}(u) \\
&= \int_U \left[f(u, x_n)\right]_{x_n=\alpha}^{x_n=g(u)} d\lambda_{n-1}(u) \\
&= \int_U f(u, g(u))\, d\lambda_{n-1}(u) \\
&= \int_U (f \circ \varphi)\, d\lambda_{n-1},
\end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass $f(u, \alpha) = 0$ da $\operatorname{supp} f \subset Q$. Andererseits erhalten wir mit Hilfe von (4.26), (4.70) und (4.71), dass

$$\int_M f \nu_n d\sigma_M = \int_{\widetilde{M}} f \nu_n d\sigma_{\widetilde{M}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_U (f\circ\varphi)\,(\nu_n\circ\varphi)\,\sqrt{1+\|g'\|^2}d\lambda_{n-1}\\
&= \int_U (f\circ\varphi)\,\frac{1}{\sqrt{1+\|g'\|^2}}\sqrt{1+\|g'\|^2}\,d\lambda_{n-1}\\
&= \int_U (f\circ\varphi)\,d\lambda_{n-1},
\end{aligned}
$$

woraus (4.64) folgt.

Fall $i<n$. Wir fangen wieder mit der folgenden Identität an:

$$\int_G \partial_{x_i} f\ d\lambda_n = \int_U \left(\int_\alpha^{g(u)} \partial_{u_i} f\,(u,x_n)\,dx_n\right) d\lambda_{n-1}(u). \tag{4.72}$$

Um das innere Integral zu berechnen (wo wir ∂_{u_i} und $\int dx_n$ vertauschen möchten), betrachten wir zuerst die Funktion

$$h\,(u,v) = \int_\alpha^v f\,(u,x_n)\,dx_n.$$

Nach der Kettenregel und dem Satz 2.26 erhalten wir, dass

$$
\begin{aligned}
\partial_{u_i}\left(\int_\alpha^{g(u)} f\,(u,x_n)\,dx_n\right) &= \partial_{u_i}\left(h\,(u,g(u))\right)\\
&= (\partial_{u_i}h)\,(u,g(u)) + (\partial_v h)\,(u,g(u))\,\partial_{u_i}g\\
&= \int_\alpha^{g(u)} \partial_{u_i} f\,(u,x_n)\,dx_n + f\,(u,g(u))\,\partial_{u_i}g. \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

02.02.22 Vorlesung 28

Jetzt integrieren wir die Identität (4.73) über U. Dafür betrachten wir die folgende Funktion in U:

$$\widetilde{f}(u) = h\,(u,g(u)) = \int_\alpha^{g(u)} f\,(u,x_n)\,dx_n$$

und bemerken, dass $\operatorname{supp}\widetilde{f}$ eine Teilmenge der Projektion von $\operatorname{supp} f$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Da nach Voraussetzung $\operatorname{supp} f\subset Q$, so erhalten wir $\operatorname{supp}\widetilde{f}\subset U$. Somit erhalten wir nach der Identität (4.65) von dem Fall 1 (im Dimension $n-1$), dass

$$\int_U \partial_{u_i}\widetilde{f}\,d\lambda_{n-1} = 0.$$

Integrieren von (4.73) auf U bezüglich $d\lambda_{n-1}(u)$ ergibt

$$
\begin{aligned}
&\int_U \left(\int_\alpha^{g(u)} \partial_{u_i} f\,(u,x_n)\,dx_n\right) d\lambda_{n-1}(u) + \int_U f\,(u,g(u))\,\partial_{u_i}g(u)d\lambda_{n-1}(u)\\
&= \int_U \left(\partial_{u_i}\int_\alpha^{g(u)} f\,(u,x_n)\,dx_n\right) d\lambda_{n-1}(u) = 0.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (4.72) ergibt

$$\int_G \partial_{x_i} f \, d\lambda_n = \int_U \left(\int_\alpha^{g(u)} \partial_{u_i} f(u, x_n) \, dx_n \right) d\lambda_{n-1}(u) = -\int_U f(u, g(u)) \, \partial_{u_i} g(u) d\lambda_{n-1}(u)$$

Nach (4.70) haben wir

$$-\partial_{u_i} g(u) = \nu_i(x) \sqrt{1 + \|g'(u)\|^2},$$

wobei $x = (u, g(u)) = \varphi(u)$, und nach (4.71) gilt

$$d\sigma_{\widetilde{M}} = \sqrt{1 + \|g'\|^2} \, d\lambda_{n-1}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_G \partial_{x_i} f \, d\lambda_n &= -\int_U (f \circ \varphi) \, \partial_{u_i} g \, d\lambda_{n-1} \\ &= \int_U (f \circ \varphi)(\nu_i \circ \varphi) \sqrt{1 + \|g'\|^2} \, d\lambda_{n-1} \\ &= \int_{\widetilde{M}} f \nu_i d\sigma_{\widetilde{M}} \\ &= \int_M f \nu_i d\sigma_M, \end{aligned}$$

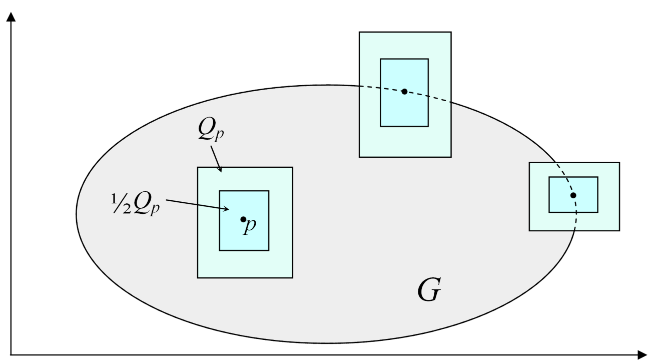
was zu beweisen war.

Fall 3. *Jetzt beweisen wir (4.64) für alle stetig differenzierbare Funktionen f auf $\overline{G}$.*

Die Idee ist dass die Funktion f sich als eine Summe von Funktionen aus den Fällen 1 und 2 darstellen lässt. Für jeden Punkt $p \in \partial G$ wählen wir einen offenen beschränkten Quader $Q_p \subset \Omega$ mit Zentrum p so dass $M \cap Q_p$ ein Graph ist (solcher Quader Q_p existiert nach dem Beweis von Lemma 4.9). Für jeden Punkt $p \in G$ wählen wir einen offenen beschränkten Quader Q_p mit Zentrum p so dass $\overline{Q_p} \subset G$, der nach der Offenheit von G existiert.

Wenn $\operatorname{supp} f$ in einem von Quadern Q_p liegt, so sind die Bedingungen von den Fällen 1 oder 2 erfüllt so dass (4.64) gilt.

Im allgemeinen Fall bemerken wir, dass $\left\{\frac{1}{2} Q_p\right\}_{p \in \overline{G}}$ eine offene Überdeckung von $\overline{G}$ ist. Da $\overline{G}$ kompakt ist, so gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\left\{\frac{1}{2} Q_{p_j}\right\}_{j=1}^m$ von $\overline{G}$.



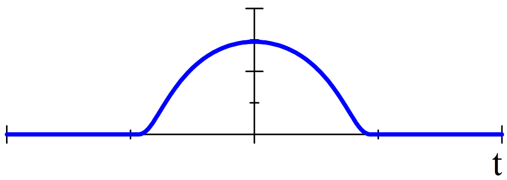
Für jeden offenen Quader Q gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $w:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ mit

$$\operatorname{supp} w\subset Q \quad \text{und} \quad w>0 \quad \text{auf} \quad \frac{1}{2}Q. \tag{4.74}$$

Zum Beispiel, in 1-dimensionalen Fall für Intervall $I=(-2,2)$ setzen wir

$$w(t)=\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) \quad \text{für } t\in(-1,1) \quad \text{und } w(t)=0 \text{ sonst,} \tag{4.75}$$

so dass w stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, $\operatorname{supp} w\subset I$ und $w>0$ in $\frac{1}{2}I$.



Funktion $w(t)$

Für beliebiges beschränktes offenes Intervall $I\subset\mathbb{R}$ erhalten wir eine solche Funktion aus (4.75) mit Hilfe von Verschiebung und Skalierung der Variable t. Für den Quader $Q=I_1\times...\times I_n$ erhalten wir w als das Produkt von entsprechenden Funktionen von Intervallen $I_1,...,I_n$.

So, für jeden Quader $Q=Q_{p_j}$ bezeichnen wir mit w_j eine Funktion w aus (4.74). Dann ist die Funktion

$$W:=\sum_{j=1}^m w_j$$

stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^n$ und

$$W>0 \quad \text{in} \quad \Omega':=\bigcup_{j=1}^m \frac{1}{2}Q_{p_j}$$

Somit sind alle Funktionen

$$z_j:=\frac{w_j}{W}$$

stetig differenzierbar in Ω' und es gilt

$$\sum_{j=1}^m z_j=1 \text{ in } \Omega'.$$

Die Folge $\{z_j\}$ heißt die *Zerlegung der Eins* in Ω' bezüglich $\{Q_{p_j}\}$, da $\operatorname{supp} z_j\subset Q_{p_j}$.

Da $\overline{G}\subset\Omega'$, so gilt die folgende Identität in $\overline{G}$:

$$f=\sum_{j=1}^m z_j f.$$

Da $\operatorname{supp}(z_j f)\subset Q_{p_j}$, so gilt (4.64) für die Funktionen $z_j f$ nach den Fällen 1,2, woraus folgt, dass (4.64) auch für die Funktion f gilt. ∎

4.12 * Satz von Green

Sei Γ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Betrachten wir den folgenden normierten Tangentialvektor τ von Γ an der Stelle $z = \varphi(t) \in \Gamma$:

$$\tau(z) = \frac{(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))}{\|\varphi'(t)\|}. \tag{4.76}$$

Diese Definition von τ ist unabhängig von Parametrisierung φ solange der Wechsel von Variable t monoton steigend ist (d.h. die Orientation von Γ fixiert ist). In der Tat, sei $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f' > 0$, so dass $\psi = \varphi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine neue Parametrisierung von Γ ist. Für den Tangentialvektor $\widetilde{\tau}(z)$ von Parametrisierung ψ an der Stelle $z = \psi(s) \in \Gamma$ erhalten wir für $t = f(s)$

$$\widetilde{\tau}(z) = \frac{(\psi_1'(s), \psi_2'(s))}{\|\psi'(s)\|} = \frac{(\varphi_i'(f(s)) f'(s), \varphi_i'(f(s)) f'(s))}{\|\varphi'(f(s)) f'(s)\|} = \frac{(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))}{\|\varphi'(t)\|} \frac{f'(s)}{|f'(s)|} = \tau(z),$$

da $\frac{f'(s)}{|f'(s)|} = 1$ und

$$z = \psi(s) = \varphi(f(s)) = \varphi(t) \quad \text{und} \quad \psi'(s) = (\varphi(f(s)))' = \varphi'(f(s)) f'(s).$$

Für beliebige stetige Funktionen P und Q auf Γ, definieren wir das Integral

$$\int_\Gamma P dx + Q dy := \int_\Gamma (P\tau_1 + Q\tau_2)\, d\sigma_1.$$

Einsetzen von (4.76) und $d\sigma_1 = \|\varphi'\|\, dt$ ergibt die Identität

$$\begin{aligned} \int_\Gamma P dx + Q dy &= \int_a^\beta (P(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + Q(\varphi(t)) \varphi_2'(t))\, dt \\ &= \int_a^\beta P(\varphi(t))\, d\varphi_1(t) + Q(\varphi(t))\, d\varphi_2(t), \end{aligned}$$

was die Notation $\int_\Gamma P dx + Q dy$ erklärt.

Sei jetzt Γ der Rand eines Gebietes G in $\mathbb{R}^2$. Sei ν die äußere Einheitsnormale zum Γ bezüglich G. Dann sind die Vektoren ν und τ orthogonal, d.h.

$$\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 = 0,$$

woraus folgt, dass

$$\tau = \pm(-\nu_2, \nu_1). \tag{4.77}$$

Wir sagen, dass das Paar (ν, τ) von Vektoren *positiv orientiert* ist wenn

$$\det(\nu, \tau) > 0,$$

wobei ν und τ als Spaltenvektoren eine 2×2 Matrix bestimmen. Für das Vorzeichen + in (4.77), d.h. für den Vektor

$$\boxed{\tau = (-\nu_2, \nu_1)} \tag{4.78}$$

gilt

$$\det(\nu,\tau) = \det\begin{pmatrix}\nu_1 & \tau_1\\ \nu_2 & \tau_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\nu_1 & -\nu_2\\ \nu_2 & \nu_1\end{pmatrix} = \nu_1^2+\nu_2^2 = 1 > 0$$

so dass das Paar (ν,τ) positiv orientiert ist.

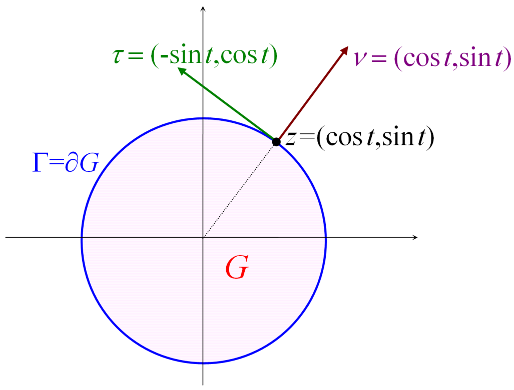
Ist das Paar (ν,τ) in einem Punkt $p\in\Gamma$ positiv orientiert, so gilt gleiches in allen Punkten von Γ, da $\det(\nu,\tau)$ stetig auf Γ ist, nicht verschwindet, und Γ zusammenhängend ist. In diesem Fall sagen wir, dass die parametrisierte Kurve Γ *positiv orientiert* bezüglich G ist.

Beispiel. Sei $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Der Rand $\Gamma=\partial G$ ist der Einheitskreis. Er hat eine Parametrisierung

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t\in[-\pi,\pi]. \tag{4.79}$$

Nach (4.76) erhalten wir, dass an der Stellt $z=\varphi(t)$

$$\tau(z) = (-\sin t, \cos t).$$



Andererseits, für die äußere Einheitsnormale ν bezüglich G gilt

$$\nu(z) = z = (\cos t, \sin t),$$

so dass (4.78) erfüllt ist. Somit ist Γ mit der Parametrisierung (4.79) positiv orientiert.

Satz 4.14 (Satz von Green) *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und sei der Rand $\Gamma=\partial G$ positiv orientiert bezüglich G. Seien P und Q stetig differenzierbare Funktion auf $\overline{G}$. Dann gilt die Identität*

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_G (\partial_x Q - \partial_y P)\,d\lambda_2.$$

Beweis. Nach (4.78) gilt

$$\nu = (\tau_2, -\tau_1).$$

Für den Vektorfeld

$$V = (Q, -P)$$

erhalten wir nach dem Integralsatz von Gauß:

$$\begin{aligned}\int_G (\partial_x Q - \partial_y P)\, d\lambda_2 &= \int_G \operatorname{div} V\, d\lambda_2 \\ &= \int_\Gamma (V,\nu)\, d\sigma_1 \\ &= \int_\Gamma (P\tau_1 + Q\tau_2)\, d\sigma_1 \\ &= \int_\Gamma Pdx + Qdy,\end{aligned} \tag{4.80}$$

was zu beweisen war. ∎

Betrachten wir auch den folgenden Vektorfeld in $\overline{G}$

$$F = (P,Q)\,.$$

Die Funktion $\partial_x Q - \partial_y P$ heißt die *Rotation* von F und wird mit $\operatorname{rot} F$ bezeichnet, d.h.

$$\operatorname{rot} F = \partial_x Q - \partial_y P.$$

Es folgt aus (4.80), dass

$$\int_G \operatorname{rot} F\, d\lambda_2 = \int_\Gamma (F,\tau)\, d\sigma_1,$$

was eine alternative Formulierung von dem Satz von Green ist.

4.13 * Hyperflächen als lokale Graphen

Für offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und offenes Intervall J setzen wir

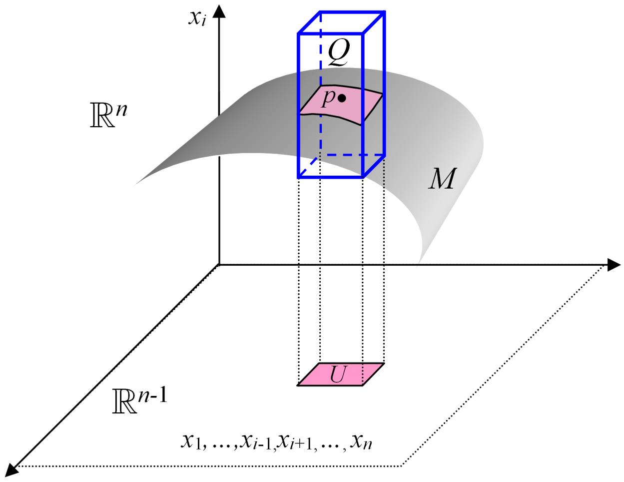
$$U \times_i J := \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \in U,\ x_i \in J\}\,.$$

Die Menge $Q = U \times_i J$ ist ein offener Zylinder in $\mathbb{R}^n$.

Definition. Wir sagen, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ im Zylinder $Q = U \times_i J$ ein Graph bezüglich x_i ist, wenn $M \cap Q$ der Graph einer C^1-Funktion $g : U \to J$ ist, d.h.

$$M \cap Q = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : u := (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \in U,\ x_i = g(u)\}\,.$$

Wir sagen, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ *lokal ein Graph* ist wenn es für jeden Punkt $p \in M$ einen offenen Zylinder $Q \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $Q \ni p$ und M im Q ein Graph bezüglich einer von Koordinaten x_i ist.



M ist ein Graph im Q

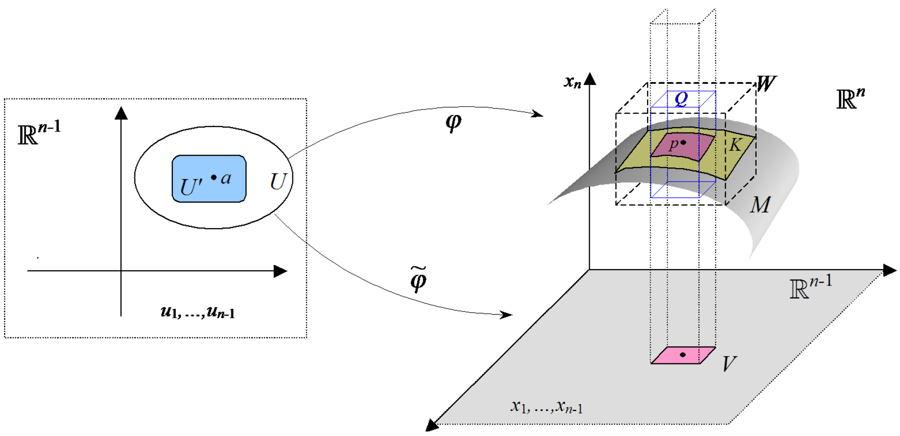
Lemma 4.15 *Ist M lokal ein Graph, so ist M eine Hyperfläche. Umgekehrt, jede Hyperfläche M ist lokal ein Graph.*

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass der Graph eine reguläre $(n-1)$-dimensionale Karte ist. Ist M lokal ein Graph, so ist jeder Schnitt $M \cap Q$ eine offene reguläre Karte in M. Da M mit solchen Schnitten überdeckt wird, so ist M eine Hyperfläche.

Beweisen wir jetzt, dass jede Hyperfläche M lokal ein Graph ist. Nach Definition von Hyperfläche gibt es eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ so dass $K := W \cap M$ eine reguläre $(n-1)$-dimensionale Karte ist. Wir können W immer verkleinern, damit W ein Quader ist. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung von K. Setzen wir $a = \varphi^{-1}(p)$. Da rang $\varphi'(a) = n-1$, so gibt es in der Matrix $\varphi'(a)$ genau $n-1$ linear unabhängigen Zeilen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, das die ersten $n-1$ Zeilen linear unabhängig sind. Wie im Beweis von Lemma 4.7, betrachten wie die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &: U \to \mathbb{R}^{n-1} \\ \widetilde{\varphi}(u) &= \big(\varphi_1(u), \dots, \varphi_{n-1}(u)\big). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist ein Diffeomorphismus in der Nähe von a, d.h. es existiert eine offene Umgebung U' von a, wo $\widetilde{\varphi}$ invertierbar ist und $\widetilde{\varphi}^{-1}$ C^1 in $V := \widetilde{\varphi}(U')$. Die Menge V lässt sich immer verkleinern, so wir können annehmen, dass V ein Quader ist (und U' auch entsprechend verkleinert werden soll).



Die Gleichung $x = \varphi(u)$ hat eine eindeutige Lösung $x \in K$ für jedes $u \in U$. Für $u \in U'$ erhalten wir

$$(x_1, ..., x_{n-1}) = \widetilde{\varphi}(u)$$

und somit

$$u = \widetilde{\varphi}^{-1}(x_1, ..., x_{n-1}),$$

was zusammen mit $x_n = \varphi_n(u)$ ergibt

$$x_n = \varphi_n \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x_1, ..., x_{n-1}).$$

Wir sehen, dass im Quader $Q = W \cap (V \times \mathbb{R})$ die Bedingung $x \in M$ äquivalent zu

$$x_n = g(x_1, ..., x_{n-1}),$$

ist, wobei $(x_1, ..., x_{n-1}) \in V$ und $g = \varphi_n \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ C^1 ist. Somit ist $M \cap Q$ der Graph der Funktion $x_n = g(x_1, ..., x_{n-1})$ in V. $\blacksquare$

Der Satz 4.13 gilt auch für die folgende allgemeinere Definition des Gebietes.

Definition. Eine offene beschränkte Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn ∂G eine Hyperfläche ist und $\partial G = \partial \overline{G}$.

Der obigen Beweis des Satzes 4.13 funktioniert auch für diese Definition von Gebiet dank dem folgenden Lemma.

Lemma 4.16 *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Für jedes $p \in \partial G$ gibt es einen offenen Quader $Q \ni p$, so dass ∂G in Q der Graph einer C^1 Funktion ist und $G \cap Q$ der Untergraph oder Obergraph dieselber Funktion ist. Insbesondere ist der Begriff der äußeren bezüglich G Normale zu ∂G wohldefiniert.*

Beweis. Nach Lemma 4.15 existiert ein Quader $Q = U \times_i I \ni p$ wo $M := \partial G$ der Graph ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $i = n$ an. Sei $g : U \to I$ die C^1 Funktion deren Graph mit $M \cap Q$ übereinstimmt. Betrachten wir den Untergraph Q_- und den Obergraph Q_+ wie in (4.67)-(4.68). Bezeichnen wir $C = \overline{G}^c$ und bemerken, dass C eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist mit

$$\mathbb{R}^n = G \sqcup C \sqcup M$$

woraus folgt

$$Q_- \sqcup Q_+ \subset G \sqcup C.$$

Die Menge Q_+ ist zusammenhängend und somit muss vollständig in einer von den offenen Mengen G, C liegen; gleiches gilt für Q_-. Die Vereinigung $Q_+ \sqcup Q_-$ kann in G nicht liegen, da sonst $\overline{G} \supset Q$ und somit $\partial \overline{G}$ keinen Punkt im Q hat, was im Widerspruch zu $\partial G = \partial \overline{G}$ steht. Auch kann $Q_+ \sqcup Q_-$ in C nicht liegen, da sonst G und somit ∂G im Q keinen Punkt hat. Es folgt, dass G genau eine von Q_-, Q_+ umfasst, und somit $G \cap Q$ mit genau einer von Q_+, Q_- übereinstimmt. $\blacksquare$

4.14 * Fixpunktsatz von Brouwer

Denote by B the open unit ball $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ and by $\overline{B}$ its closure (the closed unit ball).

Hauptsatz 4.17 (The fixed-point theorem of Brouwer) *Any continuous mapping $T : \overline{B} \to \overline{B}$ has a fixed point, that is, a point $x \in \overline{B}$ such that $T(x) = x$.*

Beweis. By an approximation argument we can assume that T is smooth enough, say $T \in C^2$. Assume that T has no fixed point and bring this to contradiction. The assumption $x \neq T(x)$ implies that there is exactly one point of intersection of the ray $x+\tau(T(x)-x)$, $\tau \geq 0$, with ∂B. Denote this point by $\varphi(x)$ so that $\varphi : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ is a C^2 mapping such that its image is ∂B and $\varphi|_{\partial B} = \mathrm{Id}$. Such a mapping is called a *retraction* of $\overline{B}$ onto ∂B.

Assuming that there is a C^2 retraction $\varphi : \overline{B} \to \partial B$, let us brings this to contradiction. Consider the expansion of the following $n \times n$ determinant in the first row:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & \dots & \partial_{x_n}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1}\varphi_n & \dots & \partial_{x_n}\varphi_n \end{pmatrix} = \lambda_1\Phi_1 + \dots + \lambda_n\Phi_n,$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are independent variables and $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ are the corresponding cofactors. Consider the vector field $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ and apply the divergence theorem 4.13 to the vector field $V = \varphi_1\Phi$ on $\overline{B}$. We have by the product rule

$$\operatorname{div}(\varphi_1\Phi) = (\partial_x\varphi_1, \Phi) + \varphi_1 \operatorname{div}\Phi.$$

The first term ist equal to

$$(\partial_x\varphi_1, \Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1 & \dots & \partial_{x_n}\varphi_1 \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & \dots & \partial_{x_n}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1}\varphi_n & \dots & \partial_{x_n}\varphi_n \end{pmatrix} = \det\varphi' = 0$$

since $\operatorname{rang}\varphi' < n$. Then we need to verify that $\operatorname{div}\Phi = 0$, that is,

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \dots & \partial_{x_n} \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & \dots & \partial_{x_n}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1}\varphi_n & \dots & \partial_{x_n}\varphi_n \end{pmatrix} = 0 \tag{4.81}$$

Observe that

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{x_i} & \partial_{x_j} \\ \partial_{x_i}\varphi_2 & \partial_{x_j}\varphi_2 \end{pmatrix} = \partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi_2 - \partial_{x_j}\partial_{x_i}\varphi_2 = 0. \tag{4.82}$$

Let us expand (4.81) in the first two rows using the Laplace theorem. All the 2×2 determinants formed by the first two rows vanish by (4.82). Therefore we obtain (4.81).

By the divergence theorem we obtain

$$0 = \int_{\overline{B}} \operatorname{div}(\varphi_1\Phi)\, d\lambda_n = \int_{\partial B} \varphi_1 (\Phi, \nu)\, d\sigma_{n-1}.$$

Let us show that

$$(\Phi, \nu) = \nu_1 \quad \text{on } \partial B. \tag{4.83}$$

Since $\varphi(x) = x$ on ∂B, this will imply that the last integral is equal to

$$\int_{\partial B} x_1 \nu_1 d\sigma_{n-1} = \int_B (\partial_{x_1} x_1)\, d\lambda_n = \lambda_n(B) > 0,$$

which will be a contradiction.

Let us prove (4.83). Observe that $\nu = (x_1, ..., x_n)$ and, hence, $(\Phi, \nu) = D$ where

$$D := \det \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & ... & \partial_{x_n}\varphi_2 \\ ... & ... & ... \\ \partial_{x_1}\varphi_n & ... & \partial_{x_n}\varphi_n \end{pmatrix}. \tag{4.84}$$

We need to prove that $D = x_1$. Recall that $\varphi_k = x_k$ on ∂B. Let us show that D can be computed by substituting in (4.84) $\varphi_k \equiv x_k$, that is, D is independent of the values of φ_k in B. Let us expand D in the first two rows. Then we have to use the following 2×2 determinants

$$\det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ \partial_{x_i}\varphi_2 & \partial_{x_j}\varphi_2 \end{pmatrix} = x_i \partial_{x_j}\varphi_2 - x_j \partial_{x_i}\varphi_2 = \partial_\xi \varphi_2$$

where $\xi = x_i \partial_{x_j} - x_j \partial_{x_i}$. The vector field ξ ist tangential to ∂B. Therefore, $\partial_\xi \varphi_2$ depends only on the values of φ_2 on ∂B, which implies that also D depends only in the values of φ_2 on ∂B. In the same way, expanding (4.84) in the first and $(k+1)$-th row, we obtain that D depends only on the values of φ_k on ∂B.

Hence, substituting $\varphi_k \equiv x_k$ in (4.84), we obtain

$$D = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} = x_1, \tag{4.85}$$

which was to be proved. ∎