

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Alexander Grigorian  
Universität Bielefeld

April - Juli 2011

## Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist eine DGL . . . . .	1
1.2	DGLen erster Ordnung . . . . .	1
1.3	Trennbare DGLen . . . . .	4
1.4	Lineare DGLen 1er Ordnung . . . . .	10
1.5	Differentialformen . . . . .	12
1.6	Integrierender Faktor . . . . .	22
1.7	Die DGLen 2er Ordnung . . . . .	24
1.7.1	Zweites Newtonsches Gesetz (das Aktionsprinzip) . . . . .	24
1.7.2	Elektrische Schaltung . . . . .	25
1.8	Systeme von DGLen und die DGLen höherer Ordnung . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Lineare DGLen und Systeme von DGLen</b>	<b>28</b>
2.1	Normen und Operatoren in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
2.1.1	Die Normen in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
2.1.2	Stetige Abbildungen . . . . .	31
2.1.3	Lineare Operatoren und Operatornorm . . . . .	31
2.1.4	Normen und Operatoren in $\mathbb{C}^n$ . . . . .	34
2.2	Existenz von Lösungen linearer Normalsysteme . . . . .	34
2.3	Skalare lineare DGLen $n$ -ter Ordnung . . . . .	35
2.3.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	35
2.3.2	Der Raum von Lösungen homogener DGLen . . . . .	36
2.3.3	Lösungsmethoden für homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	36
2.3.4	Lösungsmethoden für inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	42
2.3.5	Beweise von Sätze 2.7, 2.10 und 2.3 . . . . .	47
2.3.6	Die DGLen 2-ter Ordnung mit periodischer Störfunktion . . . . .	59
2.4	Der Raum von Lösungen linearer Normalsystemen . . . . .	65
2.5	Variation der Konstanten . . . . .	69
2.6	Wronski-Determinante und Liouvillesche Formel . . . . .	76
2.7	Lösungsmethoden für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	80
2.7.1	Spezieller Fall . . . . .	81
2.7.2	Exponentialfunktion von Operatoren . . . . .	85

2.7.3	Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion . . . . .	87
2.7.4	Exponentialfunktion von einem Jordanblock . . . . .	89
2.7.5	Blockdiagonalmatrizen . . . . .	91
2.7.6	Darstellung von Operatoren in Jordan-Normalform . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Das Anfangswertproblem für generelle DGLen</b>	<b>104</b>
3.1	Lipschitz-stetige Funktionen . . . . .	104
3.2	Existenz und Eindeutigkeit für Normalsysteme . . . . .	108
3.3	Existenz und Eindeutigkeit für skalare DGLen . . . . .	117
3.4	Maximale Lösungen . . . . .	118
3.5	Stetigkeit von Lösungen bezüglich $f(t, x)$ . . . . .	123
3.6	Stetigkeit von Lösungen in Parameter . . . . .	129
3.7	Differenzierbarkeit von Lösungen in Parameter . . . . .	134
3.7.1	Die Variationsgleichung . . . . .	134
3.7.2	Höhere Ableitungen in $s$ . . . . .	137
3.7.3	Konvexität und Hadamard-Lemma . . . . .	140
3.7.4	Beweise von Sätze 3.13 und 3.14 . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Autonome Systeme und Stabilität von Lösungen</b>	<b>148</b>
4.1	Autonome DGLen . . . . .	148
4.2	Stabilität eines linearen Systems . . . . .	150
4.3	Ljapunow-Sätze . . . . .	155
4.4	Beispiele . . . . .	158
4.5	Beweise von Sätze 4.1, 4.3 und 4.2 . . . . .	163
4.6	Periodische Lösungen . . . . .	170

# 1 Einführung

## 1.1 Was ist eine DGL

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (abgekürzt mit *DGL*) hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

wobei  $x$  eine unabhängige reelle Variable ist,  $y = y(x)$  eine gesuchte Funktion (und  $y^{(k)}$  die  $k$ -te Ableitung von  $y$ ), und  $F$  eine gegebene Funktion von  $n + 2$  Variablen. Die Zahl  $n$ , die die maximale Ordnung der Ableitung  $y^{(k)}$  in (1.1) ist, heißt die *Ordnung* von der DGL. Man sagt auch, dass (1.1) eine DGL  $n$ -ter Ordnung ist.

Die Gleichung (1.1) heißt "*differential*", weil sie die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Eigentlich stellt die Gleichung (1.1) eine Beziehung zwischen verschiedenen Ableitungen von  $y(x)$  dar. Die Differentialgleichung (1.1) heißt "*gewöhnlich*", weil die Ableitungen  $y^{(k)}$  gewöhnlich sind, im Gegensatz zu partiellen Ableitungen. Es gibt auch die partiellen Differentialgleichungen, wo die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und deshalb die partiellen Ableitungen benutzt werden müssen, aber in diesem Kurs betrachten wir nur gewöhnliche DGLen.

Gewöhnliche DGLen entstehen in verschiedenen Gebieten von Mathematik, als auch in Wissenschaften und Technik, da viele Naturgesetze mittels Differentialgleichungen formuliert werden können. In meisten Anwendungen braucht man eine Lösung  $y(x)$  von (1.1) (mit gegebenen Randbedingungen) analytisch oder numerisch zu ermitteln. Es gibt bestimmte spezielle Typen von DGLen, die sich explizit analytisch lösen lassen. Andererseits, für ziemlich generellen Typen von DGLen kann man verschiedene Eigenschaften von Lösungen beweisen ohne sie explizit zu berechnen, z.B. die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Differenzierbarkeit, usw. In diesem Kurs werden wir die beiden Richtungen erforschen: explizit Lösungen zu bestimmen und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen zu beweisen.

Am Anfang besprechen wir verschiedene Beispiele von DGLen 1er und 2er Ordnung, die sich explizit lösen lassen.

## 1.2 DGLen erster Ordnung

Eine allgemeine DGL 1er Ordnung hat die Form  $F(x, y, y') = 0$ . Häufig kann diese Gleichung bezüglich  $y'$  gelöst werden, und man erhält die DGL in der *expliziten* Form:

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

wobei  $y = y(x)$  eine gesuchte reelle Funktion einer reellen Variablen  $x$ , und  $f(x, y)$  eine gegebene Funktion von zwei reellen Variablen. Wir betrachten das Paar  $(x, y)$  als ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Der Definitionsbereich von  $f$  ist dann eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^2$ . Die Menge  $D$  heißt auch der Definitionsbereich von DGL (1.2).

**Definition.** Sei  $y(x)$  eine reelle Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist. Die Funktion  $y(x)$  heißt eine (*spezielle*) Lösung von (1.2) genau dann, wenn

1. für jedes  $x \in I$ , der Punkt  $(x, y(x))$  ein Element von  $D$  ist;
2.  $y(x)$  an jeder Stelle  $x \in I$  differenzierbar ist;

3. für jedes  $x \in I$ , die Gleichung  $y'(x) = f(x, y(x))$  erfüllt ist.

Die Gesamtheit von allen speziellen Lösungen von (1.2) heißt die *allgemeine Lösung*.

**Bemerkung.** Hier und im Folgenden ein Intervall bedeutet jede Menge der Form

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{geschlossenes Intervall} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall}\end{aligned}$$

wobei  $a, b$  reelle oder  $\pm\infty$  sind und  $a < b$ .

Die Lösungen von (1.2) lassen sich eine graphische Darstellung wie folgt. Der Graph einer speziellen Lösung heißt eine *Integralkurve* der Gleichung. Offensichtlich ist jede Integral-Kurve im Definitionsbereich enthalten. Dass die Lösung  $y(x)$  die Gleichung  $y' = f(x, y)$  erfüllt bedeutet, dass die Tangente zur Integralkurve an jeder Stelle  $(x, y)$  die Steigung  $f(x, y)$  hat. Offensichtlich, man kann die Steigung an jeder Stelle  $(x, y) \in D$  bestimmen ohne die DGL zu lösen. Jeder Stelle  $(x, y) \in D$  entspricht eine *Richtung*: eine Gerade durch  $(x, y)$  mit der Steigung  $f(x, y)$ . Die Gesamtheit von allen Richtungen heißt das *Richtungsfeld* der DGL. Es ist klar, dass die Tangente zu jeder Integralkurve an jeder Stelle ein Element des Richtungsfeldes ist. Lösen von (1.2) hat die folgende graphische Bedeutung: man verbindet die Elemente des Richtungsfeldes durch eine Integralkurve (Fig. 1).

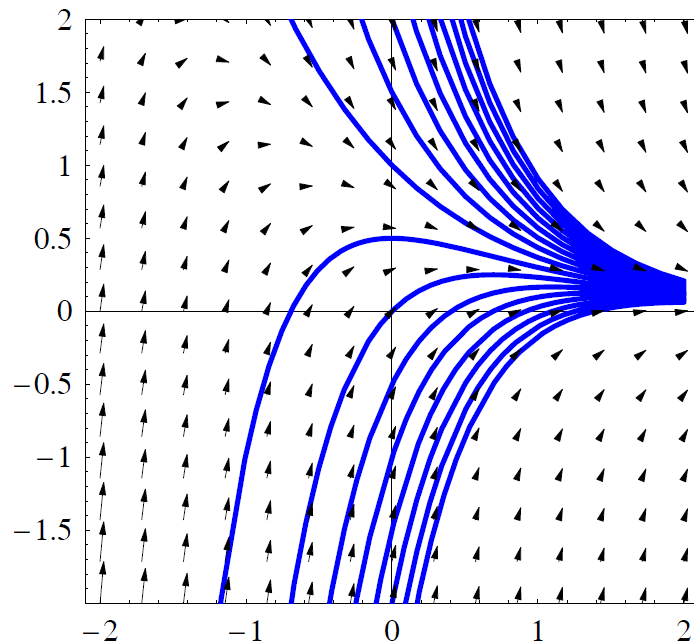


Figure 1: Integralkurven eines Richtungsfeldes

In der Regel lassen sich die allgemeinen DGLen nicht explizit analytisch lösen. Wir zeigen hier einige Klassen von Funktionen  $f(x, y)$ , bei denen die allgemeine Lösung von (1.2) in Form einer unbestimmten Integration gefunden werden kann.

**Beispiel.** Angenommen, die Funktion  $f$  hängt nicht von  $y$ , so dass (1.2) wird  $y' = f(x)$ . Offensichtlich muss  $y$  eine Stammfunktion von  $f$  sein. Unter der Voraussetzung, dass  $f$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I$  ist, erhalten wir die allgemeine Lösung auf  $I$  durch die unbestimmte Integration:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C,$$

wobei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  ist und  $C$  eine beliebige Konstante ist.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' = y$$

und ermitteln erst alle positive Lösungen. Angenommen  $y(x) > 0$  auf einem Intervall  $I$ , können wir mit  $y$  dividieren. Da

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)',$$

erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$(\ln y)' = 1.$$

Daraus folgt, dass

$$\ln y = \int dx = x + C,$$

also

$$y = e^C e^x = C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 = e^C$ . Da  $C \in \mathbb{R}$  beliebig reell ist, ist  $C_1 = e^C$  beliebig positive. Daher sind alle positiven Lösungen  $y(x)$  auf  $I$  wie folgt:

$$y = C_1 e^x, \quad C_1 > 0.$$

Angenommen,  $y(x) < 0$  für alle  $x \in I$ , erhalten wir ebenso

$$\frac{y'}{y} = (\ln(-y))'$$

und

$$y = -C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 > 0$ . So, jede Lösung  $y(x)$ , die immer entweder positive oder negative auf  $I$  bleibt, hat die Form

$$y(x) = C e^x,$$

wobei  $C > 0$  oder  $C < 0$ . Es ist klar, dass  $C = 0$  auch eine Lösung  $y \equiv 0$  ergibt. Die Integralkurven der Lösungen  $y = C e^x$  sind auf Fig. 2 gezeichnet worden. Jedoch bleibt die Frage, ob alle Lösungen bestimmt worden sind.

**Behauptung.** Die Gesamtheit von Lösungen  $y = C e^x$ , wobei  $C \in \mathbb{R}$ , ist die allgemeine Lösung von  $y' = y$ .

**Beweis.** Sei  $y(x)$  eine Lösung auf einem offenen Intervall  $I$ . Wir müssen zeigen, dass auf diesem Intervall gilt  $y = C e^x$  für eine Konstante  $C$ . Ist  $y \equiv 0$  auf  $I$ , alles ist trivial.

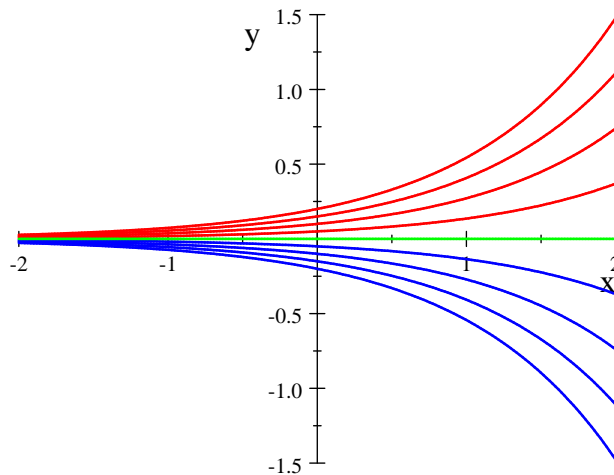


Figure 2: Die Integralkurven von  $y' = y$

Angenommen,  $y(x) > 0$  mindestens an einer Stelle  $x \in I$ , bezeichnen wir mit  $(a, b)$  ein maximales offenes Intervall, wo  $y(x) > 0$ . Dann entweder einer von den Punkten  $a, b$  gehört zu  $I$  oder  $(a, b) = I$ . Im ersten Fall, nehmen wir an, dass  $a \in I$  (der Fall  $b \in I$  ist ähnlich), was ergibt  $y(a) = 0$ . Da  $y(x)$  auf dem Intervall  $(a, b)$  positive ist, wie wissen schon, dass auf diesem Intervall  $y(x) = Ce^x$  gilt mit  $C > 0$ . Da  $e^x \neq 0$ , verschwindet die Lösung  $y(x)$  an der Stelle  $x = a$  nicht, was im Widerspruch zur obigen Bemerkung ist. Wir beschliessen, dass  $(a, b) = I$ , woraus folgt, dass  $y(x) = Ce^x$  auf  $I$ .

Mit dem gleichen Argument betrachtet man den Fall wenn  $y(x) < 0$  an einer Stelle  $x \in I$ . ■

### 1.3 Trennbare DGLen

Eine *trennbare* DGL ist eine DGL in der Form

$$y' = f(x)g(y), \quad (1.3)$$

wobei  $f$  und  $g$  stetige Funktionen sind, auf offenen Intervallen  $I$  and  $J$  jeweils. Damit ist der Definitionsbereich von (1.3)  $I \times J$ .

Jede trennbare DGL kann mit Hilfe von dem folgenden Satz gelöst werden.

**Satz 1.1** (Trennung der Variablen) *Angenommen,  $g(y) \neq 0$  auf  $J$ . Sei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  und  $G(y)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g(y)}$  auf  $J$ . Eine Funktion  $y : I' \rightarrow J$ , wobei  $I'$  ein Teilintervall von  $I$  ist, löst (1.3) genau dann, wenn*

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (1.4)$$

für alle  $x \in I'$ , wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist.

Z.B., betrachten wir noch mal die DGL  $y' = y$  im Bereich  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ . Dann  $f(x) = 1$  and  $g(y) = y \neq 0$  so dass Satz 1.1 ist anwendbar. Wir haben

$$F(x) = \int f(x) dx = \int dx = x$$

und

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{y} = \ln y$$

(wir schreiben hier keine Integrationskonstante  $C$ , weil wir nur eine Stammfunktion brauchen). Die Identität (1.4) wird

$$\ln y = x + C,$$

woraus  $y = C_1 e^x$  folgt wie zuvor.

**Beweis.** Sei  $y(x)$  eine Lösung von (1.3). Da  $g(y) \neq 0$ , wir können (1.3) mit  $g(y)$  dividieren und erhalten

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x). \quad (1.5)$$

Da  $f(x) = F'(x)$  und  $\frac{1}{g(y)} = G'(y)$ , wir erhalten durch die Kettenregel, dass

$$\frac{y'}{g(y)} = G'(y) y' = (G(y(x)))'.$$

Daher ist die DGL (1.3) äquivalent zu

$$G(y(x))' = F'(x), \quad (1.6)$$

woraus (1.4) folgt durch Integration.

Umgekehrt, erfüllt die Funktion  $y$  (1.4) und ist außerdem differenzierbar auf  $I'$ , können wir die Identität (1.4) ableiten und deshalb (1.6) erhalten, woraus (1.3) auch folgt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $y(x)$  differenzierbar ist. Da die Funktion  $g(y)$  verschwindet nicht, ist  $g(y)$  entweder positive oder negative auf ganzem Intervall  $J$ . Dann die Stammfunktion  $G(y)$  von  $\frac{1}{g(y)}$  ist entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend auf  $J$ . In den beiden Fällen, ist die Umkehrfunktion  $G^{-1}$  definiert und differenzierbar. Insbesondere kann man die Gleichung (1.4) umkehren und damit erhalten, dass

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C). \quad (1.7)$$

Daraus folgt, dass  $y(x)$  differenzierbar ist als Verkettung von zwei differenzierbaren Funktionen. ■

**Korollar 1.2** *Unter den Bedingungen von Satz 1.1, für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$ , existiert eindeutiger Wert von der Konstante  $C$ , derart, dass die Lösung (1.7) von (1.3) die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt.*

Die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  heißt die *Anfangsbedingung*. Dieser Begriff ist mit dem Begriff von *Anfangswertproblem* verbunden. Letzteres ist eine Aufgabe die Funktion  $y(x)$  zu bestimmen, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

wobei  $(x_0, y_0)$  ein gegebener Punkt im Definitionsbereich  $D$  von  $f(x, y)$  ist. Das Korollar 1.2 bedeutet, dass das Anfangswertproblem für die trennbare DGL (1.4) unter der Bedingung  $g \neq 0$  eindeutige Lösung für alle  $(x_0, y_0) \in I \times J$  hat. D.h., für jeden Punkt

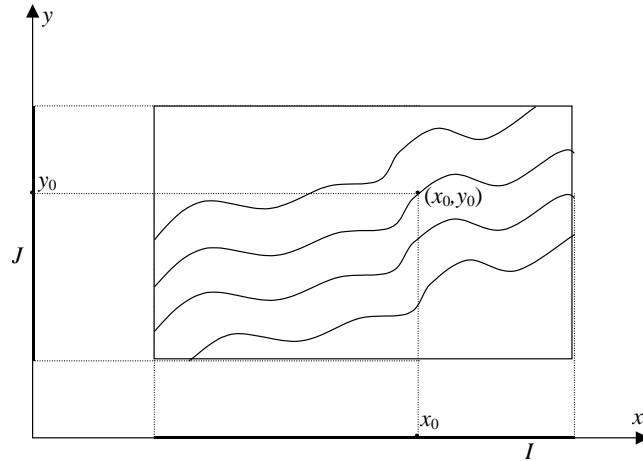


Figure 3: Jeder Punkt  $(x_0, y_0)$  hat genau eine Integrialkurve, die durch  $(x_0, y_0)$  geht.

$(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert genau eine Integrialkurve der DGL, die durch diesen Punkt geht (Fig. 3). Wie wir es später sehen, das gilt auch für bestimmte allgemeinere DGLen, aber nicht für alle DGLen.

**Beweis.** An den Stellen  $x = x_0$  and  $y = y_0$ , ergibt (1.4)  $C = G(y_0) - F(x_0)$ , woraus die Eindeutigkeit von  $C$  folgt. Jetzt zeigen wir, dass dieser Wert von  $C$  immer eine Lösung  $y(x)$  liefert. Wir müssen nur noch überprüfen, dass die Funktion  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$  auf einem offenen Intervall um  $x_0$  definiert ist (a priori es konnte sein, dass der Definitionsbereich der Verkettung von zwei Funktionen leer ist). Für  $x = x_0$  erhalten wir

$$G^{-1}(F(x_0) + C) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0,$$

so dass die Funktion  $y(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  definiert ist. Da die beiden Funktionen  $G^{-1}$  and  $F + C$  stetig sind und auf offenen Intervallen definiert, ist ihre Verkettung auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert. Da diese Teilmenge  $x_0$  enthält, muss sie auch ein Intervall um  $x_0$  enthalten, was zu beweisen war. ■

Die Funktion  $g(y)$  in der DGL (1.3) kann generell die Nullstellen haben. Ist  $s$  eine Nullstelle von  $g$ , löst die konstante Funktion  $y(x) \equiv s$  die DGL (1.3). Für allgemeine Funktion  $g$  gilt folgendes.

**Korollar 1.3** Sei  $f$  und  $g$  beliebige stetige Funktionen wie im Satz 1.1, aber ohne die Voraussetzung  $g \neq 0$ . Dann für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert eine Lösung von (1.3), die durch  $(x_0, y_0)$  geht (also, das Anfangswertproblem ist immer lösbar).

**Beweis.** Ist  $y_0$  eine Nullstelle von  $g$ , die gewünschte Lösung ist  $y(x) \equiv y_0$ . Ist  $y_0$  keine Nullstelle von  $g$ , betrachten wir ein offenes Intervall  $J_0 \subset J$  das  $y_0$  enthält aber keine Nullstelle von  $g$  enthält. Dann erhalten wir die gewünschte Lösung, indem wir das Anfangswertproblem im Bereich  $I \times J_0$  mit Hilfe von Korollar 1.2 lösen. ■

Im Gegenteil, gilt die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem nicht immer, wie wir in weiteren Beispielen sehen.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' = \sqrt{|y|},$$



im Bereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Diese DGL ist trennbar mit Funktionen  $f(x) = 1$  und  $g(y) = \sqrt{|y|}$ . Die Funktion  $g(y)$  hat eine Nullstelle  $y = 0$ , so dass die konstante Funktion  $y \equiv 0$  eine Lösung ist. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  lösen wir die DGL mit Hilfe von Trennung der Variablen. Im Bereich  $y > 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx,$$

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

und

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x > -C, \quad (1.8)$$

wobei die Beschränkung  $x > -C$  aus der vorherigen Gleichung kommt. Ebenso, im Bereich  $y < 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = \int dx,$$

$$-2\sqrt{-y} = x + C,$$

und

$$y = -\frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x < -C. \quad (1.9)$$

Die Integralkurven der Lösungen (1.8) und (1.9) sind auf Fig. 4 gezeichnet worden. Wir

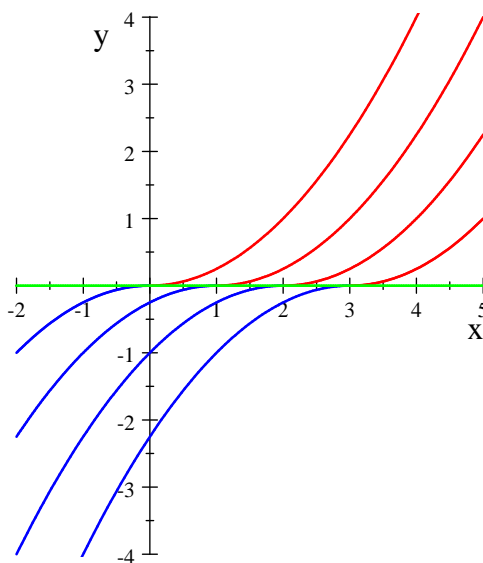


Figure 4: Die Integralkurven von  $y' = \sqrt{|y|}$

sehen, dass die Integralkurven aus den Bereichen  $y > 0$  and  $y < 0$  schneiden die Linie  $y = 0$ , die auch eine Lösung ist. Das ermöglicht Erstellung von mehreren Lösungen wie folgt: für jedes Paar von reellen Zahlen  $a < b$ , betrachten wir die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - a)^2, & x < a, \\ 0, & a \leq x \leq b, \\ \frac{1}{4}(x - b)^2, & x > b, \end{cases} \quad (1.10)$$

die durch Verkleben von drei anderen Lösungen gewonnen wird und offensichtlich eine Lösung für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist. Erlauben wir  $a$  zu sein  $-\infty$  oder  $b$  zu sein  $+\infty$ , mit der offensichtlichen Bedeutung von (1.10) in diesen Fällen, stellt (1.10) die allgemeine Lösung von  $y' = \sqrt{|y|}$  dar. Es ist jetzt klar, dass durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  unendliche viele Integralkurven der DGL gehen, und die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem gilt nicht.

Wie wir es später beweisen werden, die Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

gilt, vorausgesetzt  $f$  ist stetig und  $g$  ist stetig differenzierbar.

In Anwendungen von dem Satz 1.1 muss man die Funktionen  $F$  und  $G$  bestimmen. Es ist bequem die Auswertung von  $F$  und  $G$  mit anderen Berechnungen zu kombinieren, wie folgt. Der erste Schritt ist immer dividieren (1.3) mit  $g$  um (1.5) zu erhalten. Danach integriert man die beiden Seiten bezüglich  $x$  und erhält

$$\int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (1.11)$$

Der nächste Schritt ist die Integrals auszuwerten. Man findet eine Stammfunktion  $F(x)$  von  $f$  so dass

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.12)$$

Auf der linken Seite von (1.11) macht man die Substitution  $y = y(x)$  (die Funktion  $y(x)$  wird durch eine unabhängige Variable  $y$  ersetzt). Da  $y'dx = dy$ , erhalten wir die Identität

$$\int \frac{y'dx}{g(y)} = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C,$$

die zusammen mit (1.3) und (1.12) ergibt (1.4).

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' - xy^2 = 2xy, \quad (1.13)$$

im Bereich  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Umschreiben sie in der Form

$$y' = x(y^2 + 2y)$$

und bemerken, dass die DGL trennbar ist. Die Funktion  $g(y) = y^2 + 2y$  hat zwei Nullstellen  $y = 0$  and  $y = -2$ . Daher erhalten wir zwei konstanten Lösungen  $y \equiv 0$  and  $y \equiv -2$ . Betrachten jetzt die DGL in den Bereichen wo  $g(y) \neq 0$ :

$$\mathbb{R} \times (-\infty, -2), \quad \mathbb{R} \times (-2, 0), \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (1.14)$$

In jedem von diesen Bereichen benutzen wir Trennung der Variablen und erhalten

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Potenzieren ergibt dann

$$\frac{y}{y+2} = C_1 e^{x^2},$$

wobei  $C_1 = \pm e^{2C}$ . Es ist klar, dass  $C_1$  alle reellen Werte annehmen kann, außer 0. Da  $y \equiv 0$  auch eine Lösung ist, kann  $C_1$  auch 0 sein.. Umbenennen wir  $C_1$  in  $C$  so dass

$$\frac{y}{y+2} = C e^{x^2},$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annimmt. Daher erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}} \quad \text{und} \quad y \equiv -2. \quad (1.15)$$

Die Integralkurven von (1.15) sind auf Fig. 5 gezeichnet worden.

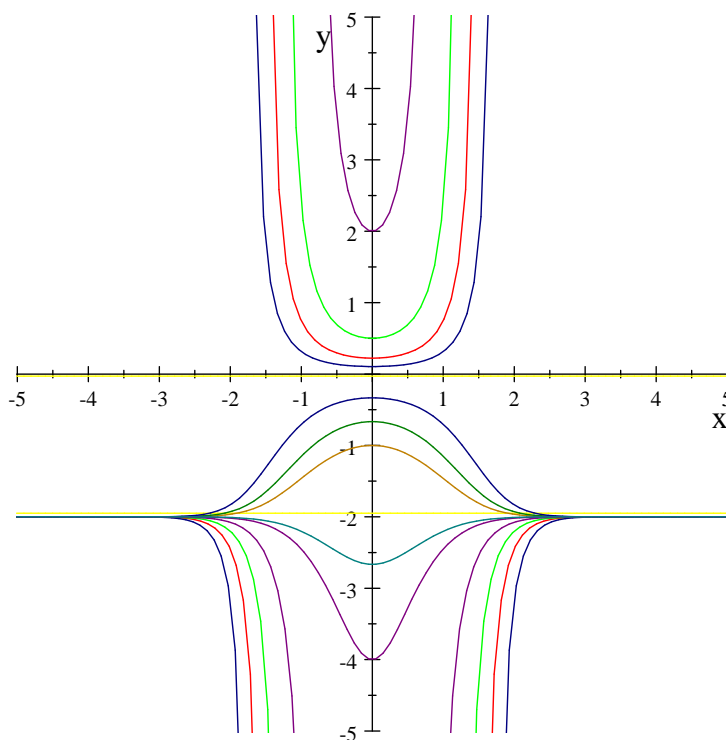


Figure 5: Die Integralkurven von (1.15)

Wir behaupten, dass die Integralkurven von Lösungen (1.15) nie schneiden einander. In der Tat nimmt jede Lösung

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}}, \quad C \neq 0, \quad (1.16)$$

die Werte 0 und  $-2$  nicht an, so dass diese Lösung und die Lösungen  $y \equiv 0$  und  $y \equiv -2$  nie schneiden einander. Insbesondere bleibt jede Lösung (1.16) immer in einem von Bereichen (1.14). Zwei Lösungen (1.16), die in verschiedenen Bereichen liegen, schneiden

einander offensichtlich nicht. Zwei Lösungen (1.16) mit verschiedenen Werten von  $C$ , die in einem Bereich liegen, schneiden einander auch nicht, nach Korollar 1.2. Mit dem gleichen Argument, wie im obigen Beispiel mit  $y' = y$ , zeigt man, dass (1.15) die allgemeine Lösung ist. Daraus folgt, dass das Anfangswertproblem für (1.13) eindeutig lösbar ist.

Jetzt zeigen wir, wie man ein Anfangswertproblem für (1.13) lösen kann, z.B. mit Anfangsbedingung  $y(0) = -4$ . Einsetzen  $x = 0$  und  $y = -4$  in (1.15) ergibt eine Gleichung für  $C$ :

$$\frac{2C}{1-C} = -4,$$

woraus  $C = 2$  folgt. Daher erhalten wir die folgende Lösung:

$$y = \frac{4e^{x^2}}{1-2e^{x^2}}.$$

## 1.4 Lineare DGLen 1er Ordnung

Eine *lineare* DGL erster Ordnung hat die Form

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{1.17}$$

wobei  $a(x)$  und  $b(x)$  gegebene Funktionen sind, die auf einem Intervall  $I$  definiert sind. Die Gleichung ist "linear" genannt, weil sie von  $y$  und  $y'$  linear abhängt.

Jede lineare DGL kann gelöst werden wie folgt.

**Satz 1.4** (Variation der Konstanten) *Seien  $a(x)$  und  $b(x)$  stetige Funktionen auf dem Intervall  $I$ . Dann hat die allgemeine Lösung von (1.17) die folgende Form:*

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx, \tag{1.18}$$

wobei  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$  auf  $I$  ist.

Wir betonen, dass die Funktion  $y(x)$  auf dem ganzen Intervall  $I$  definiert ist und auch eine Lösung auf  $I$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir eine neue unbekannte Funktion  $u(x) = y(x) e^{A(x)}$ , also

$$y(x) = u(x) e^{-A(x)}. \tag{1.19}$$

Einsetzen (1.19) in die Gleichung (1.17) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} (ue^{-A})' + aue^{-A} &= b, \\ u'e^{-A} - ue^{-A}A' + aue^{-A} &= b. \end{aligned}$$

Da  $A' = a$ , fallen die zwei Terme auf der linken Seite weg, und wir erhalten eine sehr einfache Gleichung für  $u(x)$ :

$$u'e^{-A} = b.$$

Daraus folgt, dass  $u' = be^A$  und

$$u = \int be^A dx,$$

das zusammen mit (1.19) ergibt (1.18). ■

**Korollar 1.5** *Unter der Bedingungen von Satz 1.4, für jedes  $x_0 \in I$  and  $y_0 \in \mathbb{R}$ , existiert genau eine Lösung  $y(x)$  von (1.17), die auf dem Intervall  $I$  definiert ist und die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt (also, durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$  geht genau eine Integralkurve der DGL).*

**Beweis.** Sei  $B(x)$  eine Stammfunktion von  $be^A$ . Dann kann die Lösung (1.18) in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$y = e^{-A(x)} (B(x) + C), \quad (1.20)$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist. Offensichtlich ist diese Lösung auf  $I$  definiert. Einsetzen der Bedingung  $y(x_0) = y_0$  in (1.20) ergibt eindeutigen Wert der Konstante  $C$  wie folgt:

$$C = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0).$$

Offensichtlich, die Lösung (1.20) mit diesem Wert von  $C$  erfüllt die Anfangsbedingung. ■

Erklären wir jetzt die Motivation für die Substitution (1.19). Sei erst  $b(x) \equiv 0$ . In diesem Fall heißt die DGL (1.17) *homogen*:

$$y' + a(x)y = 0.$$

Bemerken wir, dass die homogene Gleichung trennbar ist. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

und

$$\ln |y| = \int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx = -A(x) + C.$$

Daraus folgt, dass

$$y(x) = C e^{-A(x)} \quad (1.21)$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annehmen kann (inklusive  $C = 0$  das entspricht der Lösung  $y \equiv 0$ ).

Für die allgemeine lineare DGL (1.17), ersetzt man die Konstante  $C$  in (1.21) durch eine neue unbekannte Funktion  $C(x)$ , die im Beweis wurde  $u(x)$  bezeichnet. Da die Konstante durch eine Variable ersetzt wurde, ist dieses Verfahren "Variation der Konstanten" genannt. Ähnliche Methode funktioniert auch für die linearen DGLen höherer Ordnung.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2} \quad (1.22)$$

im Bereich  $x > 0$ . Berechnen von Stammfunktion von  $a(x)$  ergibt

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

(wir schreiben hier keine Konstante  $C$ , da wir nur eine Stammfunktion brauchen). Durch (1.18) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{x} \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2x} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + C),$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist.

Alternativ kann man zunächst die homogene DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

lösen, z.B. im Bereich  $x > 0, y > 0$ . Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\ (\ln y)' &= -(\ln x)' \\ \ln y &= -\ln x + C_1 \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Dann sucht man die Lösung von (1.22) in der Form  $y = \frac{C(x)}{x}$ . Einsetzen in (1.22) ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \frac{C}{x} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'x - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'}{x} &= e^{x^2}, \\ C' &= e^{x^2}x, \\ C(x) &= \int e^{x^2}x dx = \frac{1}{2}(e^{x^2} + C_0). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2x}(e^{x^2} + C_0),$$

wobei  $C_0$  ist eine beliebige reelle Konstante. Die Integalkurven sind auf Fig. 6 gezeichnet worden.

## 1.5 Differentialformen

Sei  $F(x, y)$  eine reelle Funktion, die auf einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist. Erinnern wir die Definition des Differentials der Funktion  $F$ . Die Funktion  $F$  ist differenzierbar an einer Stelle  $(x, y) \in \Omega$ , wenn reelle Zahlen  $a, b$  existieren, derart, dass

$$F(x + dx, y + dy) - F(x, y) = adx + bdy + o(|dx| + |dy|),$$

für  $dx, dy \rightarrow 0$ . Die Inkremente  $dx$  und  $dy$  jeweils von  $x$  und  $y$  werden als die neuen unabhängigen Variablen betrachtet. Sie sind die Differentiale der Variablen  $x$  und  $y$  genannt. Die lineare Funktion

$$dx, dy \mapsto adx + bdy$$

heißt totales *Differential* von  $F$  an der Stelle  $(x, y)$  und ist mit  $dF$  oder  $dF(x, y)$  bezeichnet; also

$$dF = adx + bdy. \tag{1.23}$$

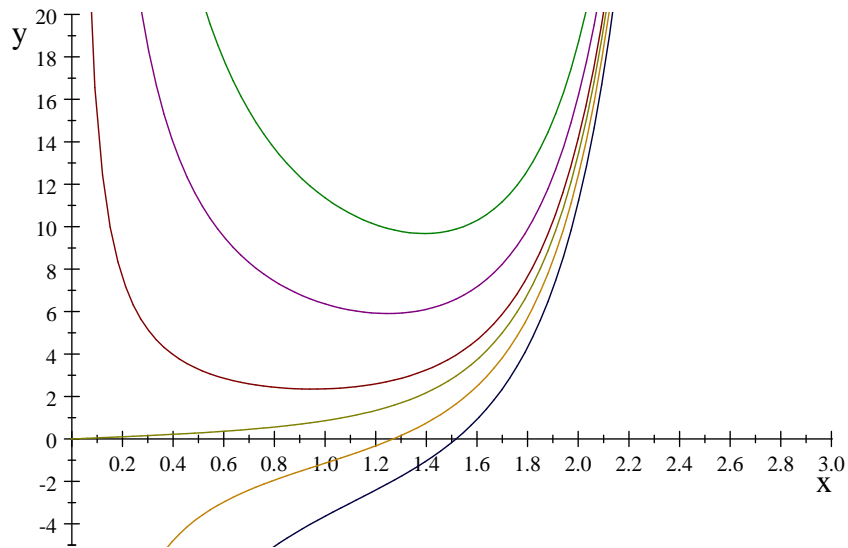


Figure 6: Die Integralkurven von (1.22)

Im Allgemeinen sind  $a$  und  $b$  die Funktionen von  $(x, y)$ .

Die folgenden Beziehungen bestehen zwischen die Begriffe von Differential und partielle Ableitungen:

1. Ist  $F$  differenzierbar an einer Stelle  $(x, y)$  und (1.23) gilt, so existieren die partiellen Ableitungen  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$  und  $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$  an  $(x, y)$ , und es gilt

$$F_x = a, \quad F_y = b. \quad (1.24)$$

2. Ist  $F$  stetig differenzierbar in  $\Omega$  (also die partielle Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  existieren an jeder Stelle in  $\Omega$  und sind stetig in  $\Omega$ ), so ist  $F$  differenzierbar an jeder Stelle  $(x, y) \in \Omega$  und

$$dF = F_x dx + F_y dy. \quad (1.25)$$

**Definition.** Gegeben seien zwei Funktionen  $a(x, y)$  und  $b(x, y)$  auf  $\Omega$ , eine *Differentialform* ist die Funktion

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy,$$

wobei die unabhängige Variablen sind  $x, y, dx, dy$ . Die Differentialform ist genannt *exakt* in  $\Omega$  wenn existiert eine differenzierbare Funktion  $F$  auf  $\Omega$ , derart, dass

$$dF = a dx + b dy. \quad (1.26)$$

Ist die Differentialform exakt, heißt die Funktion  $F$  von (1.26) ein *Integral* (oder eine *Potentialfunktion*) der Form.

Die folgende Behauptung enthält die allgemeinen Eigenschaften von Integrals und exakten Formen.

**Lemma 1.6** (a) Seien  $a, b$  stetige Funktionen auf  $\Omega$ . Eine Funktion  $F$  auf  $\Omega$  ist ein Integral von  $adx + bdy$  genau dann, wenn  $F_x = a$  und  $F_y = b$

(b) Seien  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Form  $adx + bdy$  exakt, gilt die folgende Identität in  $\Omega$ :

$$a_y = b_x. \quad (1.27)$$

**Beweis.** (a) Die Identität  $dF = adx + bdy$  ergibt immer  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Umgekehrt, gelten die Bedingungen  $F_x = a$  und  $F_y = b$ , dann ist  $F$  stetig differenzierbar und deshalb  $dF = F_x dx + F_y dy$ . Daraus folgt dass  $dF = adx + bdy$  so dass  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$  ist.

(b) Ist  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$ , dann gilt  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Insbesondere sind die Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz, es gilt  $F_{xy} = F_{yx}$  woraus  $a_y = b_x$  folgt. ■

**Definition.** Die Differentialform  $adx + bdy$  heißt *geschlossen* in  $\Omega$  wenn die Gleichung  $a_y = b_x$  gilt in  $\Omega$ .

Es folgt aus Lemma 1.6(b), dass jede exakte Form geschlossen ist. Im Allgemeinen, eine geschlossene Form muss nicht unbedingt exakt sein, wie wir später sehen können. Da die Geschlossenheit ist einfacher zu überprüfen als die Exaktheit, es wäre sehr nützlich zu wissen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Geschlossenheit ergibt die Exaktheit. Wir werden solche Behauptung später beweisen, aber zuerst besprechen wir die Motivation und betrachten die Beispiele.

Unsere Interesse an die Differentialformen liegt daran, dass sich die folgende DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.28)$$

lösen lässt mit Hilfe von dem Integral der Differentialform  $adx + bdy$ . Natürlich kann die DGL (1.28) in der allgemeinen Form  $y' = f(x, y)$  umgeschrieben werden, wobei  $f = -a/b$ , aber das hilft für Lösung nicht. Da  $y' = \frac{dy}{dx}$ , schreiben wir die DGL (1.28) wie folgt um:

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0. \quad (1.29)$$

Man sieht in der linken Seite die Differentialform  $adx + bdy$ . Die DGL (1.28) (und (1.29)) heißt exakt (bzw geschlossen) genau dann, wenn die Differentialform  $adx + bdy$  exakt ist (bzw geschlossen).

**Satz 1.7** Seien  $a, b$  stetige Funktionen auf  $\Omega$ , derart, dass die Form  $adx + bdy$  exakt ist, und sei  $F$  ein Integral dieser Form. Sei  $y(x)$  eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert, derart, dass der Graph von  $y$  in  $\Omega$  enthalten ist. Dann löst die Funktion  $y$  die DGL (1.28) genau dann, wenn

$$F(x, y(x)) = \text{const auf } I \quad (1.30)$$

(d.h. wenn Funktion  $F$  eine Konstante auf dem Graph von  $y$  ist).

Die Identität (1.30) kann als eine allgemeine Lösung von (1.28) betrachtet werden. Die Funktion  $F$  heißt auch *erstes Integral* der DGL (1.28).

**Beweis.** Da der Graph von  $y(x)$  in  $\Omega$  enthalten wird, ist die Verkettung  $F(x, y(x))$  auf  $I$  definiert. Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x + F_y y' = a + by'.$$



Daher ist die Gleichung  $a + by' = 0$  äquivalent zu  $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$  auf  $I$ , und letzteres äquivalent zu  $F(x, y(x)) = \text{const}$  auf  $I$ . ■

**Beispiel.** Die Form  $ydx - xdy$  ist nicht geschlossen weil  $a_y = 1$  und  $b_x = -1$ . Dann ist sie auch nicht exakt.

Die Form

$$ydx + xdy$$

ist geschlossen da  $a_y = 1 = b_x$ . Sie ist auch exakt weil sie ein Integral  $F(x, y) = xy$  hat, also

$$d(xy) = ydx + xdy.$$

Die entsprechende DGL

$$y + xy' = 0$$

hat nach Satz 1.7 die allgemeine Lösung  $xy = C$ , d.h.  $y = \frac{C}{x}$ . In diesem Fall erhält man das gleiche auch mit Hilfe von Trennung der Variablen.

Die Form

$$2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

ist geschlossen weil

$$a_y = (2xy)_y = 2x = (x^2 + y^2)_x = b_x.$$

Sie ist auch exakt, weil sie ein Integral

$$F(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3}$$

besitzt. Wir erklären es später, wie man dieses Integral ermitteln kann. Aber wenn man  $F(x, y)$  schon weiß, kann man Lemma 1.6(a) benutzen, um zu überprüfen, dass  $F$  wirklich ein Integral ist. In diesem Beispiel haben wir

$$F_x = 2xy = a \quad \text{und} \quad F_y = x^2 + y^2 = b$$

so dass  $F$  ein Integral ist. Die entsprechende DGL

$$2xy + (x^2 + y^2) y' = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$x^2y + \frac{y^3}{3} = C. \tag{1.31}$$

Die Integralkurven dieser DGL sind auf Fig. 7 gezeichnet worden.

Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heißt *Rechteck* wenn sie die Form  $I \times J$  hat, wobei  $I$  und  $J$  zwei Intervalle sind. Das Rechteck ist offen, wenn die beiden Intervalle  $I$  und  $J$  offen sind. Der folgende Satz antwortet auf die Frage, wie die Exaktheit der Differentialform in einem Rechteck bestimmt werden kann.

**Satz 1.8** (Lemma von Poincaré) *Seien  $\Omega$  ein offenes Rechteck und  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen in  $\Omega$  (also  $a_y \equiv b_x$  gilt in  $\Omega$ ), ist sie auch exakt in  $\Omega$ . Darüber hinaus kann ein Integral  $F$  von  $adx + bdy$  durch die folgende Identität bestimmt werden:*

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y b(x, t) dt, \tag{1.32}$$

wobei  $(x_0, y_0) \in \Omega$  ein beliebiger Punkt ist (Fig. 8).

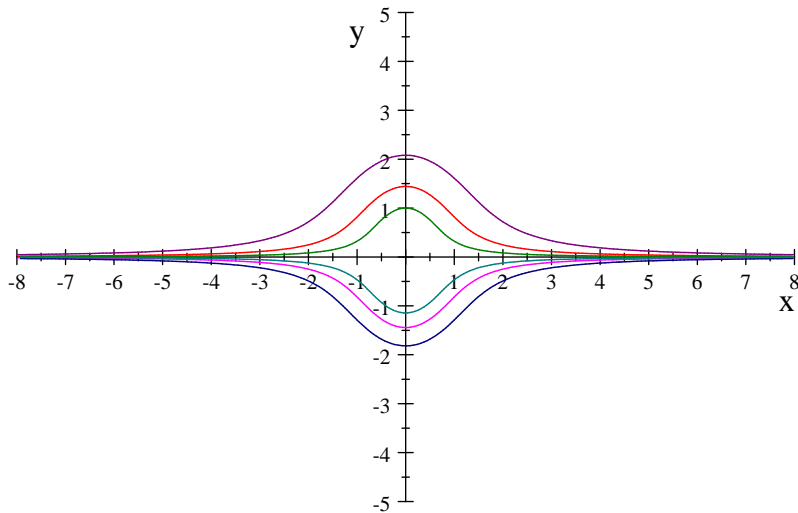


Figure 7: Die Integralkurven von (1.31)

Nach Lemma 1.6, eine exakte Form ist immer geschlossen. Deshalb bedeutet Satz 1.8, dass die Form  $adx + bdy$  in einem Rechteck exakt ist genau dann, wenn sie geschlossen ist. In allgemeinen Teilmengen  $\Omega$  gilt diese Äquivalenz nicht, wie wir es später sehen werden.

**Beweis.** Da  $\Omega$  ein Rechteck ist, für jede Stelle  $(x, y) \in \Omega$  ist auch die Stelle  $(x, y_0)$  zu  $\Omega$  gehört. Darüber hinaus, sind die beiden Intervalle  $[(x_0, y_0), (x, y_0)]$  und  $[(x, y_0), (x, y)]$  in  $\Omega$  enthalten, so dass das Integral in (1.32) wohldefiniert ist.

Angenommen, dass die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen ist, müssen wir zeigen, dass die Funktion  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$  ist. Da  $a$  und  $b$  stetig differenzierbar sind, es reicht zu überprüfen, dass

$$F_x = a \quad \text{und} \quad F_y = b.$$

Ableiten der Identität (1.32) in  $y$  ergibt

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y b(x, t) dt = b(x, y).$$

Ableiten (1.32) in  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y b(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} b(x, t) dt, \end{aligned} \tag{1.33}$$

wobei in (1.33) das Integralzeichen und die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x}$  vertauscht worden sind. Dieser Vertausch wird unterhalb in Lemma 1.9 begründet. Einsetzen  $b_x = a_y$  in (1.33) ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y a_y(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + (a(x, y) - a(x, y_0)) \\ &= a(x, y), \end{aligned}$$

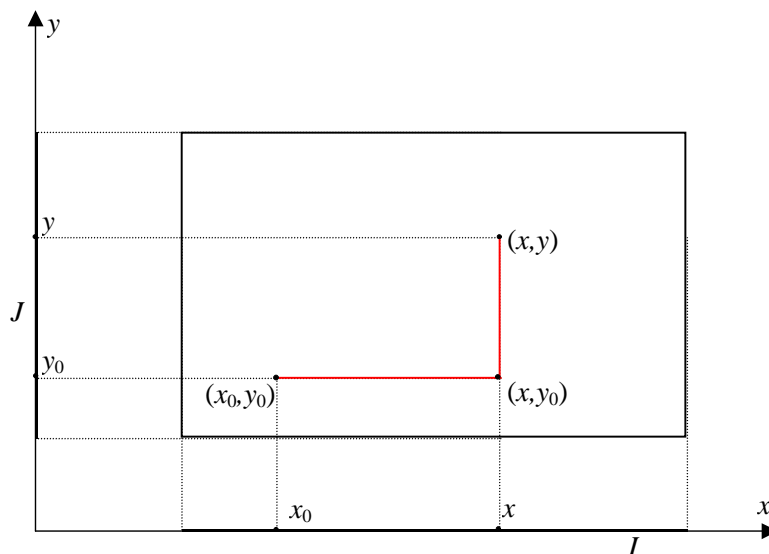


Figure 8: Die Stellen  $(x_0, y_0)$  und  $(x, y)$  im Rechteck  $\Omega$

was zu beweisen war. ■

Obwohl es logisch nicht notwendig ist, zeigen wir jetzt, wie die Formel (1.32) für  $F$  ermittelt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $F(x_0, y_0) = 0$  (In der Tat, ist  $F$  ein Integral, ist auch  $F + C$  ein Integral, für jede Konstante  $C$ ; indem wir eine geeignete Konstante wählen, kann die Gleichung  $F(x_0, y_0) = 0$  erfüllt werden). Da  $F_x = a$  und  $F_y = b$  gelten, erhalten wir nach dem Fundamentalsatz der Analysis, dass

$$F(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x F_x(s, y) ds = \int_{x_0}^x a(s, y) ds,$$

$$F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^y F_y(x, t) dt = \int_{y_0}^y b(x, t) dt,$$

woraus (1.32) folgt.

Wir zeigen jetzt einige Beispiele zum Satz 1.8.

**Beispiel.** Betrachten noch ein mal die Differentialform

$$2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Wie wissen schon, dass diese Form geschlossen ist. Da  $\mathbb{R}^2$  ein offenes Rechteck ist, erhalten wir nach Satz 1.8, dass diese Form exakt ist. Das Integral  $F$  der Form kann nach (1.32) berechnet werden wie folgt: mit  $x_0 = y_0 = 0$  erhalten wir

$$F(x, y) = \int_0^x 2s0ds + \int_0^y (x^2 + t^2) dt = x^2y + \frac{y^3}{3},$$

wie es schon früher ausgesagt worden war.

**Beispiel.** Betrachten die Differentialform

$$adx + bdy = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \tag{1.34}$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Diese Form ist geschlossen, weil

$$a_y = - \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)_y = - \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$b_x = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nach Satz 1.8 ist diese Form exakt in jedem in  $\Omega$  enthaltenen offenen Rechteck ist. Jedoch ist  $\Omega$  selbst kein Rechteck, und deshalb kann man nicht behaupten, dass diese Form auch in  $\Omega$  exakt ist. In der Tat zeigen wir, dass die (1.34) Form nicht exakt in  $\Omega$  ist, also diese Form in  $\Omega$  kein Integral hat.

Erst betrachten wir das Rechteck  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  (Halbebene) mit  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ . Nach (1.32) erhalten wir in der Halbebene ein Integral der Form (1.34):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{-y_0}{s^2 + y_0^2} ds + \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= 0 + \int_0^y \frac{d(t/x)}{1 + (t/x)^2} \\ &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Also,  $F(x, y)$  ist nicht anders als der Polarwinkel von  $(x, y)$ . Bezeichnen wir mit  $(r, \theta)$  die Polarkoordinaten in der Ebene  $(x, y)$ , wobei  $r$  der Polarradius ist und  $\theta$  der Polarwinkel. Es gilt immer in  $\Omega$ , dass

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r},$$

aber  $\theta$  als eine reelle Zahl ist generell nicht eindeutig definiert, nämlich nur bis zum  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . In der Halbebene  $\{x > 0\}$  kann man die Werte von  $\theta$  auf das Intervall  $(-\pi/2, \pi/2)$  beschränken. Da  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  und die Umkehrfunktion  $\arctan$  die Werte in  $(-\pi/2, \pi/2)$  annimmt (Fig. 9), erhalten wir, dass in der Halbebene  $\{x > 0\}$  gilt

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = F(x, y),$$

wie besagt.

Betrachten wir jetzt den Bereich

$$\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\},$$

wo der Wert von  $\theta$  eindeutig als Element des offenen Intervalls  $(-\pi, \pi)$  definiert werden kann. Wir behaupten, dass die Funktion  $\theta = \theta(x, y)$  ein Integral von  $adx + bdy$  in  $\Omega'$  ist, also es gilt in  $\Omega'$

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \quad (1.35)$$

Durch Ableitung von  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  erhalten wir

$$\cos \theta d\theta = \frac{r dy - y dr}{r^2}.$$

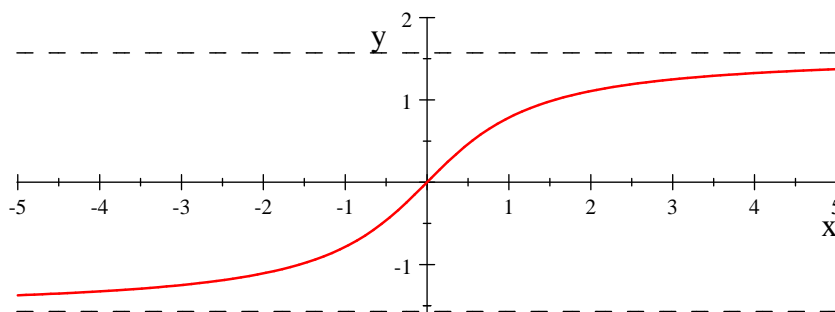


Figure 9: Die Funktion  $\arctan$

Da

$$dr = d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{r},$$

es gilt

$$\cos \theta d\theta = \frac{r dy - y \frac{xdx + ydy}{r}}{r^2} = \frac{(r^2 - y^2) dy - xy dx}{r^3} = \frac{x^2 dy - xy dx}{r^3}.$$

Da  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ , im Bereich  $x \neq 0$  erhalten wir

$$d\theta = \frac{r x^2 dy - xy dx}{x r^3} = \frac{xdy - ydx}{r^2},$$

was zu beweisen war. Wir brauchen noch den Fall  $x = 0$  zu behandeln. In diesem Fall gilt  $y \neq 0$ , und man beweist (1.35) ähnlich durch Ableitung von  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ . Damit haben wir bewiesen, dass die Differentialform (1.34) exakt in  $\Omega'$  ist.

Jetzt können wir zeigen, dass die Form (1.34) nicht exakt in  $\Omega$  ist. Nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass die Form exakt in  $\Omega$  ist. Sei  $F$  ein Integral der Form in  $\Omega$ . Dann ist  $F$  auch ein Integral in  $\Omega'$ , und somit gilt  $dF = d\theta$  in  $\Omega'$ . Daraus folgt, dass  $d(F - \theta) = 0$  in  $\Omega'$ . Da die Menge  $\Omega'$  zusammenhängend ist, erhalten wir, dass  $F - \theta = \text{const}$  in  $\Omega'$ . Insbesondere lässt sich  $\theta$  als eine stetige Funktion von  $\Omega'$  nach  $\Omega$  fortsetzen. Jedoch ist es falsch, da die Grenzwerte von  $\theta(x, y)$  für  $(x, y) \rightarrow (-1, 0)$  unterschiedlich sind, je nach  $y < 0$  oder  $y > 0$ : im ersten Fall ist der Grenzwert  $\pi$  und im zweiten Fall  $-\pi$ . Damit wurde die Aussage, dass die Form exakt in  $\Omega$ , auf einen Widerspruch zurückgeführt (*reductio ad absurdum*) und so gezeigt, dass die Form (1.34) nicht exakt ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass Satz 1.8 für allgemeine offenen Mengen  $\Omega$  nicht gilt. Es ist möglich zu beweisen, dass Satz 1.8 genau dann gilt, wenn die Menge  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, also sich jeder geschlossene Weg in  $\Omega$  auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Offensichtlich ist jedes Rechteck einfach zusammenhängend (sowohl als die Menge  $\Omega'$ ), während die Menge  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend ist.

Sei  $adx + bdy$  eine geschlossene Differentialform mit stetig differenzierbaren Koeffizienten in einer zusammenhängenden offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dann ermittelt man ein Integral davon wie folgt:

$$F(x, y) = \int_{\gamma} adx + bdy$$

wobei  $\gamma = \gamma(x, y)$  ein glatter Weg in  $\Omega$  ist, die von einem festen Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  zum Punkt  $(x, y)$  geht, und das Integralzeichen  $\int_{\gamma}$  ein Wegintegral zweiter Art bezeichnet. Die erste Frage ist dann ob  $F(x, y)$  wohldefiniert ist, d.h. das Integral wegunabhängig ist. Ist  $\delta$  noch ein Weg von  $(x_0, y_0)$  bis  $(x, y)$ , dann ist  $\gamma - \delta$  ein geschlossener Weg, der in  $\Omega$  auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Daraus folgt, dass  $\gamma - \delta$  der Rand einer offenen Teilmenge  $U \subset \Omega$  ist (Fig. 10).

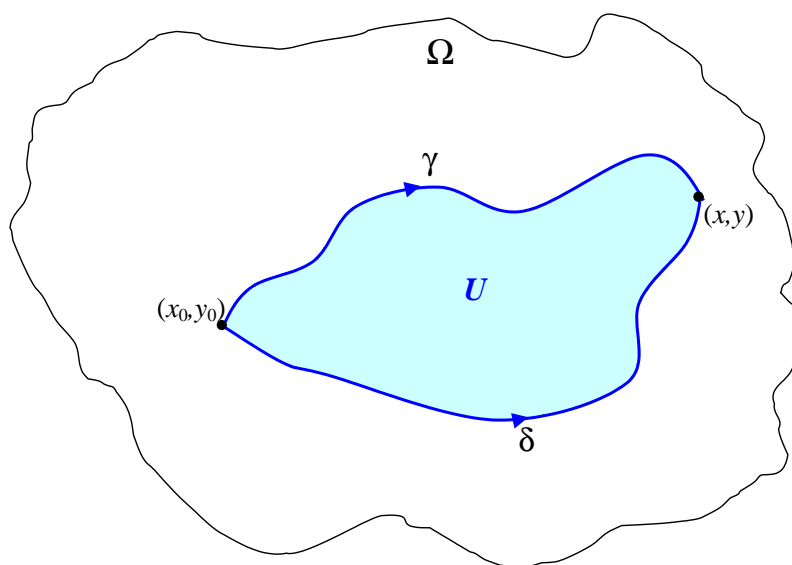


Figure 10: Die Wege  $\gamma$  und  $\delta$  von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y)$

Nach dem Satz von Green erhalten wir

$$\oint_{\gamma-\delta} adx + bdy = \iint_U (b_x - a_y) dx dy = 0,$$

wobei wir die Geschlossenheit der Form benutzt haben. Deshalb ist  $F(x, y)$  wohldefiniert, und man zeigt dann, dass  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Wir geben keine weiteren Einzelheiten, da hier möchten wir nur erklären wie der einfache Zusammenhang von  $\Omega$  und die Geschlossenheit von der Form zur Exaktheit führen.

Im Beweis von Satz 1.8 haben wir den Weg  $\gamma$  als die Vereinigung von zwei geraden Strecken definiert. Solcher Weg ist eindeutig und deshalb die Wegunabhängigkeit braucht man in diesem Fall nicht.

Jetzt beweisen wir eine Behauptung, die (1.33) begründet.

**Lemma 1.9** Sei  $g(x, t)$  eine stetige Funktion auf Rechteck  $I \times J$  wobei  $I$  und  $J$  zwei beschränkten geschlossenen Intervalle sind. Dann ist die Funktion

$$G(x) := \int_J g(x, t) dt$$

stetig auf  $I$ . Ist  $g$  zusätzlich stetig differenzierbar in  $x$  (d.h. die partielle Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial x}$  existiert und ist stetig auf  $I \times J$ ), dann ist die Funktion  $G(x)$  stetig differenzierbar auf  $I$ , und es gilt für alle  $x \in I$

$$\frac{d}{dx} G(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt. \quad (1.36)$$

Da (1.36) äquivalent zu

$$\frac{d}{dx} \int_J g(x, t) dt = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$$

ist, dürfen die Integration bezüglich  $t$  und das Ableiten in  $x$  vertauscht werden.

**Beweis.** Wir benutzen die folgenden zwei Sätze aus Analysis:

1. (Satz von Heine) Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge ist gleichmäßig stetig.

2. Ist  $\{f_n(t)\}$  eine Folge von Funktionen auf einem beschränkten geschlossenen Intervall  $J$ , die gegen eine Funktion  $f(t)$  gleichmäßig konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J f(t) dt.$$

Die Funktion  $g(x, t)$  ist deshalb auf  $I \times J$  gleichmäßig stetig, woraus folgt, dass für jede Folge  $\{x_n\} \subset I$ , die gegen einen Punkt  $x \in J$  konvergiert, es gilt

$$g(x_n, \cdot) \rightrightarrows g(x, \cdot) \text{ auf } J \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei  $\rightrightarrows$  die gleichmäßige Konvergenz bezüglich der Variable  $t$  bedeutet. Daraus folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J g(x_n, t) dt = \int_J g(x, t) dt = G(x),$$

so dass  $G$  stetig ist.

Für die Ableitung von  $G$  haben wir

$$G'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{G(y) - G(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt. \quad (1.37)$$

Betrachten wir den Ausdruck  $\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x}$  als eine Funktion von  $t$ , wobei  $x$  eine feste Konstante ist und  $y$  ein Parameter. Wir werden zeigen, dass

$$\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} \rightrightarrows g_x(x, t) \text{ auf } J \text{ für } y \rightarrow x. \quad (1.38)$$

Ist (1.38) schon bekannt, dann folgt (1.36) aus (1.37).

Nach dem Mittelwertsatz, für jedes  $t \in J$  existiert  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} = g_x(\xi, t). \quad (1.39)$$

Da die Funktion  $g_x(x, t)$  gleichmäßig stetig auf dem Rechteck  $I \times J$  ist, für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , derart, dass

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |g_x(x, t) - g_x(x', t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in J. \quad (1.40)$$

Ist  $|x - y| < \delta$ , dann gilt auch  $|x - \xi| < \delta$  und somit nach (1.40)

$$|g_x(\xi, t) - g_x(x, t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in J. \quad (1.41)$$

Nach (1.39) und (1.41) erhalten wir, dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} - g_x(x, t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in J,$$

woraus (1.38) folgt. ■

## 1.6 Integrierender Faktor

Betrachten wir wieder eine DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.42)$$

in einer offenen Teilmenge  $\Omega$  und nehmen wir an, dass (1.42) nicht exakt ist.

Ist  $M(x, y)$  eine Funktion auf  $\Omega$  die in  $\Omega$  nicht verschwindet, dann ist (1.42) äquivalent zu

$$Ma + Mby' = 0. \quad (1.43)$$

Andererseits die Gleichung (1.42) entspricht die Differentialform

$$adx + bdy$$

während die Gleichung (1.43) entspricht die Differentialform

$$Madx + Mbdy.$$

Diese zwei Formen sind nicht äquivalent im Sinn, dass eine davon exakt sein kann, während die andere – nicht.

**Definition.** Eine Funktion  $M(x, y)$  auf  $\Omega$  heißt *integrierender Faktor* für die DGL (1.42) genau dann, wenn  $M(x, y) \neq 0$  in  $\Omega$  und die Form  $Madx + Mbdy$  exakt in  $\Omega$  ist.

Findet man integrierenden Faktor, so kann man die Differentialgleichung (1.42)/(1.43) mittels Satzes 1.7 lösen.

**Beispiel.** Betrachten wir die Differentialform

$$-ydx + xdy$$



die nicht geschlossen ist. Aber nach Division mit  $x^2 + y^2$  erhalten wir die Differentialform

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

die geschlossen in  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist und exakt in

$$\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$$

ist, mit Integral  $\theta(x, y)$ . Somit ist  $\frac{1}{x^2+y^2}$  integrierender Faktor in  $\Omega'$ .

Die beiden obigen Differentialformen entsprechen die Differentialgleichung

$$-y + xy' = 0,$$

die deshalb die Lösung hat  $\theta = \text{const}$ , was äquivalent zu  $y = Cx$  ist. Diese Lösung kann auch mit Hilfe von Trennung der Variablen ermittelt werden.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y - (4x^2y + x)y' = 0 \tag{1.44}$$

und die entsprechende Differentialform

$$ydx - (4x^2y + x)dy,$$

die offensichtlich nicht geschlossen ist. Jedoch ergibt Dividieren durch  $x^2$  die Differentialform

$$\frac{y}{x^2}dx - \left(4y + \frac{1}{x}\right)dy, \tag{1.45}$$

die geschlossen im Bereich  $x \neq 0$  ist, da

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)_y = \frac{1}{x^2} = -\left(4y + \frac{1}{x}\right)_x.$$

Nach Satz 1.8 ist die Differentialform (1.45) exakt in jedem Rechteck, insbesondere in der Halbebene  $\{x > 0\}$ . Somit ist die Funktion  $\frac{1}{x^2}$  integrierender Faktor von (1.44) in  $\{x > 0\}$ . Nach (1.32) mit  $x_0 = 1, y_0 = 0$  erhalten wir ein Integral von (1.45):

$$F(x, y) = \int_1^x a(s, 0) ds + \int_0^y b(x, t) dt = 0 - \int_1^y \left(4t + \frac{1}{x}\right) dt = -2y^2 - \frac{y}{x}.$$

Nach Satz 1.7 ist die allgemeine Lösung von (1.44) im Bereich  $\{x > 0\}$  durch die Identität

$$2y^2 + \frac{y}{x} = C$$

gegeben.

Es gibt keine allgemeine Methode um integrierenden Faktor zu bestimmen.

## 1.7 Die DGLen 2er Ordnung

Für DGLen höherer Ordnung benutzen wir die anderen Bezeichnungen: ein unabhängige Variable wird mit  $t$  bezeichnet und die gesuchte Funktion mit  $x(t)$ . Dann sieht eine explizite DGL 2er Ordnung wie folgt aus:

$$x'' = f(t, x, x'),$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von drei Variablen ist. Wir besprechen hier einige Probleme, die sich auf DGLen 2er Ordnung zurückführen lassen.

### 1.7.1 Zweites Newtonsches Gesetz (das Aktionsprinzip)

Wir betrachten eine 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens entlang die  $x$ -Achse. Sei  $x(t)$  die Koordinate des Teilchens um Zeit  $t$ . Die Geschwindigkeit des Teilchens ist  $v(t) = x'(t)$  und die Beschleunigung ist  $a(t) = x''(t)$ . Das Aktionsprinzip besagt, dass

$$mx'' = F, \tag{1.46}$$

wobei  $m$  die Masse von Teilchen ist und  $F$  die bewegende Kraft. Im Allgemeinen ist  $F$  ein Funktion von  $t, x, x'$ , also  $F = F(t, x, x')$  so dass (1.46) eine DGL 2er Ordnung bezüglich  $x(t)$  ist. Ist die Kraft  $F$  als eine Funktion von  $t, x, x'$  bekannt, so kann man versuchen die DGL (1.46) bezüglich  $x(t)$  zu lösen.

Die Kraft  $F$  heißt *konservativ* wenn  $F$  nur von der Koordinate  $x$  abhängt. Z.B., sind die folgenden Kräfte konservativ: Gravitationskraft, elastische Kräfte, elektrostatische Kraft, u.a. Im Gegensatz sind die Reibung, Strömungswiderstand, und ähnliche Kräfte nicht konservative, da sie von Geschwindigkeit  $x'$  abhängen.

Ist  $F$  eine konservative Kraft, so lässt sich die DGL (1.46) zu einer DGL 1er Ordnung reduzieren, wie folgt. Angenommen  $F = F(x)$ , bezeichnen wir mit  $U(x)$  eine Stammfunktion von  $-F(x)$ . Die Funktion  $U$  heißt eine *Potentialfunktion* der Kraft  $F$ . Multiplizieren die DGL (1.46) mit  $x'$  und integrieren bezüglich  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} m \int x'' x' dt &= \int F(x) x' dt, \\ \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (x')^2 dt &= \int F(x) dx, \\ \frac{m (x')^2}{2} &= -U(x) + C \end{aligned} \tag{1.47}$$

und somit

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = C.$$

Die Summe  $\frac{mv^2}{2} + U(x)$  heißt die gesamte mechanische Energie des Teilchens, wobei  $\frac{mv^2}{2}$  die *kinetische* Energie ist und  $U(x)$  *potentielle* Energie. Deshalb haben wir den Energieerhaltungssatz bewiesen: unter konservativer Kraft bleibt die Gesamtenergie konstant.

Andererseits kann die Identität (1.47) als eine DGL 1er Ordnung betrachtet werden, die eine Folge von (1.46) ist. Ist  $x(t)$  eine Lösung von (1.47) und verschwindet  $x'(t)$  nicht, so erfüllt  $x(t)$  auch (1.46). In der Tat Ableiten von (1.47) ergibt

$$mx''x' = F(x)x',$$

woraus (1.46) folgt. Wir sehen, dass unter der Bedingung  $x' \neq 0$  die beiden DGLen (1.46) und (1.47) äquivalent sind. In diesem Fall lässt sich die DGL 2er Ordnung (1.46) auf DGL 1er Ordnung (1.47) zurückführen. Die DGL (1.47) lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen.

### 1.7.2 Elektrische Schaltung

Betrachten wir einen so genannten *RLC*-Stromkreis, d.h. eine Reihenschaltung mit folgenden Bauelementen: ein Widerstand mit dem Widerstandswert  $R$ , eine Spule mit der Induktivität  $L$ , ein Kondensator mit der Kapazität  $C$ , und eine Stromquelle mit der Spannung  $V(t)$ , die von Zeit  $t$  abhängt (Fig. 11).

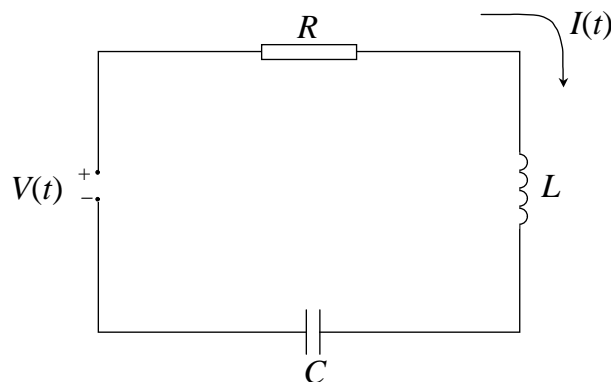


Figure 11: RLC-Stromkreis

Sei  $I(t)$  der Strom im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir betrachten  $I(t)$  als eine gesuchte Funktion und möchten eine DGL für  $I(t)$  gewinnen. Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Spannungsabfall  $v_R$  auf dem Widerstand gleich

$$v_R = RI.$$

Nach dem Induktionsgesetz von Faraday ist der Spannungsabfall  $v_L$  auf der Spule gleich

$$v_L = LI',$$

wobei  $I' = \frac{dI}{dt}$ . Letztlich ist der Spannungsabfall  $v_C$  auf dem Kondensator gleich

$$v_C = \frac{Q}{C},$$

wobei  $Q = Q(t)$  die Ladung des Kondensators ist; es gilt auch  $Q' = I$ . Nach 2. Kirchhoffsches Gesetz erhalten wir

$$v_R + v_L + v_C = V(t)$$

und somit

$$RI + LI' + \frac{Q}{C} = V(t).$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = V', \tag{1.48}$$

die eine DGL 2er Ordnung bezüglich unbekannte Funktion  $I(t)$  ist. Wir betonen, dass die DGL (1.48) linear ist, weil die linke Seite von der Funktion  $I$  und ihren Ableitungen linear abhängt. Wir kehren zur diesen Gleichung zurück, nachdem wir eine Theorie von linearen DGLen entwickelt haben.

## 1.8 Systeme von DGLen und die DGLen höherer Ordnung

Betrachten wir eine Vektorfunktion  $x(t)$  einer reellen Variablen  $t$ , also  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $I$  ein Intervall ist. Sei  $x_k$  die Komponenten von  $x$ , so dass

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Ableitung  $x'(t)$  definiert man durch

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Die folgende Gleichung heißt *Vektor-DGL* 1er Ordnung:

$$x' = f(t, x), \tag{1.49}$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n + 1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Nämlich,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  wird mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

**Definition.** Eine Lösung von (1.49) ist eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar an allen Stellen  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für alle  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in I$ .

Die Vektor-DGL (1.49) ist offensichtlich äquivalent zum folgenden System von  $n$  skalaren Gleichungen:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{1.50}$$

wobei  $f_k$  die Komponenten von  $f$  sind.

**Definition.** Die Vektor-DGL (1.49) sowie das System (1.50) heißen *Normalsystem*.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine explizite DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}), \tag{1.51}$$

wobei  $t$  eine unabhängige Variable ist und  $y(t)$  eine gesuchte Funktion. Diese DGL lässt sich immer auf ein Normalsystem zurückführen. In der Tat entspricht jeder skalaren Funktion  $y(t)$  eine Vector-Funktion

$$x = (y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ . Offensichtlich haben wir  $x' = (y', y'', \dots, y^{(n)})$ , und (1.51) ergibt ein System

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = F(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.52)$$

Das System (1.52) kann als eine Vektor-DGL (1.49) geschrieben werden, mit der Funktion  $f$  wie folgt:

$$f(t, x) = (x_2, x_3, \dots, x_n, F(t, x_1, \dots, x_n)). \quad (1.53)$$

Umgekehrt, (1.52) ergibt

$$x_1^{(n)} = x'_n = F(t, x_1, \dots, x_n) = F(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(n-1)})$$

so dass die Funktion  $y = x_1$  eine Lösung von (1.51) ist. Deshalb ist die skalare DGL (1.51) äquivalent zum Normalsystem (1.49) mit Funktion (1.53).

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL 2er Ordnung

$$y'' = F(t, y, y'). \quad (1.54)$$

Mit Hilfe von Substitution  $x = (y, y')$  erhalten wir  $x' = (y', y'')$  und

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = F(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

Deshalb ist (1.54) äquivalent zum Normalsystem (1.49) mit Funktion

$$f(t, x) = (x_2, F(t, x_1, x_2)).$$

In der Fall von DGLen 1er Ordnung haben wir gesehen, dass das Anfangswertproblem oft eine eindeutige Lösung hat. Analog definiert man das Anfangswertproblem (AWP) für ein Normalsystem:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $(t_0, x_0) \in \Omega$  ein gegebener Punkt ist. Hier ist  $x_0$  ein gegebener Vektor von  $\mathbb{R}^n$ , der man *Anfangswert* von  $x(t)$  nennt, und  $t_0 \in \mathbb{R}$  heißt *Anfangszeit*.

Offensichtlich bedeutet die Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  für die DGL (1.51), dass

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

wobei  $y_0, \dots, y_{n-1}$  die Komponenten von  $x_0$  sind, also die gegebenen Werte. Deshalb formuliert man das AWP für (1.51) wie folgt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

**Beispiel.** Für DGL (1.54) 2er Ordnung ist das AWP wie folgt:

$$\begin{cases} y'' = F(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Ist (1.54) aus dem Aktionsprinzip gewonnen worden, so bedeuten die Anfangsbedingungen, dass die Position und die Geschwindigkeit um die Anfangszeit gegeben sind.

## 2 Lineare DGLen und Systeme von DGLen

### 2.1 Normen und Operatoren in $\mathbb{R}^n$

Hier holen wir einige Fakten aus Analysis von  $\mathbb{R}^n$  wieder, die für dieses Kapitel notwendig sind.

#### 2.1.1 Die Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine *Norm* in einem Vektorraum  $V$  ist eine Funktion  $N : V \rightarrow [0, +\infty)$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $N(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
2.  $N(cx) = |c| N(x)$  für alle  $x \in V$  und  $c \in \mathbb{R}$  (absolute Homogenität).
3.  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  für alle  $x, y \in V$  (Dreiecksungleichung).

Das Paar  $(V, N)$  heißt ein normierter Vektorraum. Erfüllt  $N(x)$  die Eigenschaften 2 und 3 aber nicht unbedingt 1, so heißt  $N(x)$  *Halbnorm*.

Wir betrachten hier die Normen in  $\mathbb{R}^n$ . Z.B. die Funktion  $|x|$  eine Norm in  $\mathbb{R}$ . Normalerweise bezeichnen wir eine Norm in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|$  statt  $N(x)$ .

**Beispiel.** Für jedes  $p \geq 1$  definiert man die *p-Norm* in  $\mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

Insbesondere für  $p = 1$  erhalten wir

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Die Norm  $\|x\|_1$  heißt auch die *Manhattan-Norm*. Für  $p = 2$  gilt

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2},$$

und die Norm  $\|x\|_2$  heißt die *Euklidische Norm*. Für  $p = \infty$  definieren wir die  $\infty$ -Norm (=Maximalnorm) wie folgt:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Es folgt aus Minkowski-Ungleichung, dass die  $p$ -Norm für jedes  $p \in [1, \infty]$  eine Norm ist (damit ist die Terminologie begründet).

Man kann zeigen, dass alle Normen in  $\mathbb{R}$  proportional zu  $|x|$  sind (also, für jede Norm  $\|\cdot\|$  in  $\mathbb{R}$  gilt  $\|x\| = c|x|$  mit einer positiven Konstante  $c$ ). In  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gibt es eine Vielfaltigkeit von nicht-proportional Normen. Um zwei Normen vergleichen zu können, benutzen wir die folgende Definition.

**Definition.** Zwei Normen  $N_1$  und  $N_2$  auf einem Vektorraum heißen *äquivalent*, wenn zwei positive Konstante  $c$  und  $C$  existieren mit

$$c \leq \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq C \text{ für alle } x \neq 0. \quad (2.2)$$

Der folgende Satz ist von Analysis II bekannt.

**Satz 2.1** *Zwei beliebigen Normen in  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent<sup>1</sup>.*

Z.B., für die Normen  $\|x\|_p$  und  $\|x\|_\infty$  hat man

$$1 \leq \frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \leq n^{1/p},$$

weil

$$\max |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \max |x_k|^p.$$

Für die meisten Anwendungen kann eine Norm durch eine andere äquivalente Norm ersetzt werden. In diesem Fall bedeutet Satz 2.1, dass die Wahl der Norm in solchen Anwendungen unwichtig ist. Z.B. mit Hilfe von Norm definiert man die Konvergenz der Folgen in  $\mathbb{R}^n$  wie folgt. Man sagt, dass eine Folge  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$  von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  gegen einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  konvergiert und schreibt  $x^{(k)} \rightarrow x$  wenn  $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es folgt aus Satz 2.1, dass die Konvergenz unabhängig von der Wahl der Norm ist.

Ein anderes Beispiel ist die Definition der Topologie in  $\mathbb{R}^n$ . Jede Norm auf  $\mathbb{R}^n$  induziert durch die Festlegung

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik und somit einen metrischen Raum  $(\mathbb{R}^n, d)$ . Eine Kugel bezüglich dieser Metrik (oder der Norm) ist definiert wie folgt:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\},$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$ . Die Menge von allen Kugel erzeugt (als Basis) eine Topologie in  $\mathbb{R}^n$ . Es folgt von Satz 2.1, dass die von zwei verschiedenen Normen erzeugten Topologien auf  $\mathbb{R}^n$  identisch sind. Diese eindeutige Topologie heißt die *Normtopologie<sup>2</sup>* auf  $\mathbb{R}^n$ .

Wie sehen die Kugel von verschiedenen Normen aus? Z.B. in  $\mathbb{R}$  mit  $\|x\| = |x|$  haben wir  $B(x, r) = (x - r, x + r)$  so dass die Kugel ein offenes Intervall ist. Die Skizzen von Kugeln  $B(0, r)$  der verschiedenen  $p$ -Normen in  $\mathbb{R}^2$  werden auf Fig. 12, 13, 14, 15 gezeichnet.

<sup>1</sup>Die nicht äquivalenten Normen existieren nur in unendlich dimensionalen Räumen.

<sup>2</sup>Es gibt in  $\mathbb{R}^n$  auch andere Topologien, aber wir benutzen immer nur die Normtopologie.

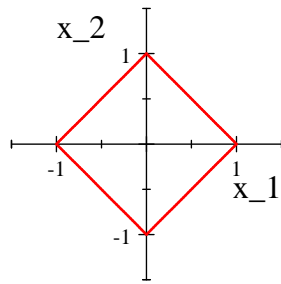


Figure 12: Kugel von 1-Norm (Diamant-Kugel)

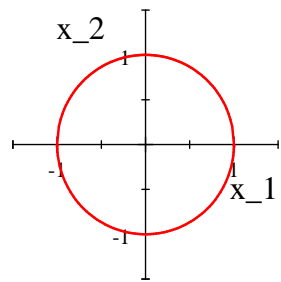


Figure 13: Kugel von 2-Norm (runde Kugel)

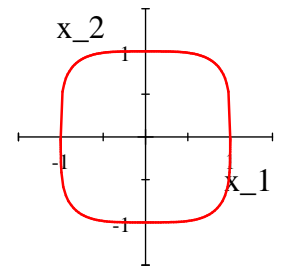


Figure 14: Kugel von 4-Norm

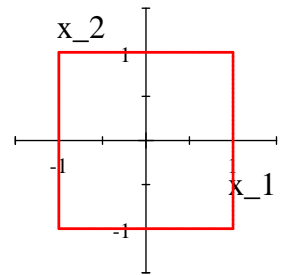


Figure 15: Kugel von  $\infty$ -Norm (Quadrat-Kugel)



### 2.1.2 Stetige Abbildungen

Seien  $S$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f$  eine Abbildung von  $S$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Die Abbildung  $f$  heißt stetig in  $x \in S$  wenn  $f(y) \rightarrow f(x)$  für  $y \rightarrow x$ , also

$$\|f(y) - f(x)\| \rightarrow 0 \text{ für } \|y - x\| \rightarrow 0.$$

Im Ausdruck  $\|y - x\|$  benutzen wir eine Norm in  $\mathbb{R}^n$ , während im Ausdruck  $\|f(y) - f(x)\|$  benutzen wir eine Norm in  $\mathbb{R}^m$ . Die beiden Normen sind beliebig, aber fest. Da nach Satz 2.1 alle Normen in den Euklidischen Räumen äquivalent sind, ist die Definition von Stetigkeit unabhängig von der Wahl der Normen.

Wir betonen, dass jede Norm  $N(x)$  in  $\mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion ist, da nach Dreiecksungleichung

$$|N(y) - N(x)| \leq N(y - x) \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x.$$

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^n$  heißt:

- offen, wenn für jedes  $x \in S$  existiert  $r > 0$ , derart, dass  $B(x, r) \subset S$ ;
- abgeschlossen, wenn das Komplement  $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$  offen ist;
- kompakt, wenn  $S$  beschränkt und abgeschlossen ist<sup>3</sup>.

In Analysis II beweist man den folgenden Satz.

**Satz 2.2** *Seien  $S$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild  $f(S)$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$ . Insbesondere für  $m = 1$  ist die Funktion  $f$  beschränkt und nimmt auf  $S$  den maximalen (und minimalen) Wert an.*

### 2.1.3 Lineare Operatoren und Operatornorm

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*linearer*) *Operator* wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $A(x + y) = Ax + Ay$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (wir schreiben  $Ax = A(x)$ ).
2.  $A(cx) = cAx$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die Menge von allen Operatoren von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  wird mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$  oder  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  bezeichnet. Jeder Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann mit Hilfe von einer  $m \times n$  Matrix  $(a_{ij})$  dargestellt werden, wobei  $i = 1, \dots, m$  der Index von Zeilen ist und  $j = 1, \dots, n$  der Index von Spalten. Nämlich, für jeden Spaltenvektor  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$Ax = (a_{ij})x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

---

<sup>3</sup>Eigentlich ist die allgemeine Definition von kompakten Mengen anders, aber für Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist die Kompaktheit äquivalent zu Beschränktheit und Abgeschlossenheit.

Man kann auch schreiben, dass für jedes  $i = 1, \dots, m$  gilt

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Man definiert die Addition von Operatoren aus  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und die Multiplikation mit einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  wie folgt

1.  $(A + B)(x) = Ax + Bx$ ,
2.  $(cA)(x) = c(Ax)$ .

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mit diesen Operationen ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Da jede  $m \times n$  Matrix genau  $mn$  Komponenten hat, gilt es  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ . Insbesondere sind  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbb{R}^{mn}$  linear isomorph, also  $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$ .

Für jeden Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiert man die *Operatornorm* von  $A$  wie folgt:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad (2.3)$$

wobei  $\|x\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\|Ax\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^m$ .

**Behauptung.** *Es gilt immer  $\|A\| < \infty$ .*

**Beweis.** Sei  $\{e_i\}_{i=1}^n$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| A \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| \|x\|_1 \\ &\leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| \|x\|, \end{aligned}$$

wobei wir die Vergleichbarkeit von den Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|$  benutzt haben (Satz 2.1). Daraus folgt

$$\|A\| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| < \infty, \quad (2.4)$$

was zu beweisen war. ■

Man sieht von (2.4), dass die Endlichkeit von  $\|A\|$  daran liegt, dass die Räume  $\mathbb{R}^n$  endlich-dimensional sind<sup>4</sup>. Es folgt aus Definition (2.3), dass

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Darüber hinaus ist  $\|A\|$  die minimale reelle Zahl die (2.5) erfüllt.

**Behauptung.** *Die Operatornorm ist eine Norm im Vektorraum  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .*

---

<sup>4</sup>In der Theorie von unendlich dimensionalen Vektorräumen existieren Operatoren mit unendlichen Normen.

**Beweis.** Nach (2.3) haben wir  $\|A\| \geq 0$ ; außerdem, wenn  $A \neq 0$  dann existiert  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax \neq 0$ , und wir erhalten  $\|Ax\| > 0$  und

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0.$$

Die Dreiecksungleichung und die Homogenität folgen aus (2.3) wie folgt:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_x \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_x \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_x \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &= \|A\| + \|B\|, \end{aligned}$$

und

$$\|cA\| = \sup_x \frac{\|(cA)x\|}{\|x\|} = \sup_x \frac{|c| \|Ax\|}{\|x\|} = |c| \|A\|.$$

■

Da  $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{nm}$ , die Konvergenz von Operatoren  $A_k \rightarrow A$  wohldefiniert ist und äquivalent zu  $\|A_k - A\| \rightarrow 0$ , wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ist, insbesondere die Operatornorm.

**Behauptung.** Die Konvergenz  $A_k \rightarrow A$  ist äquivalent zu  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $A_k, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Beweis.** Betrachten we noch eine Norm von Operatoren bezüglich der Standardbasis  $\{e_i\}_{i=1}^n$ :

$$\|A\|_e = \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|.$$

Die Konvergenz  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x$  ist äquivalent zu  $A_k e_i \rightarrow Ae_i$  für alle Basisvektoren  $e_i$ , und somit äquivalent zu  $\|A_k - A\|_e \rightarrow 0$ . Da alle Normen in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  äquivalent sind, erhalten wir die Äquivalenz der zwei obigen Konvergenzen. ■

Gilt  $A_k \rightarrow A$ , dann sagt man, dass  $\{A_k\}$  gegen  $A$  in der *Normtopologie* konvergiert. Gilt  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann sagt man, dass  $\{A_k\}$  gegen  $A$  in der *starken Operortopologie* konvergiert. Die obige Behauptung besagt, dass diese Topologien in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  äquivalent sind<sup>5</sup>.

**Behauptung.** Jeder lineare Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist eine (gleichmäßig) stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ .

**Beweis.** In der Tat haben wir nach (2.5)

$$\|Ay - Ax\| = \|A(y - x)\| \leq \|A\| \|y - x\| \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x.$$

■

In der Fall  $n = m$  kann man zusätzlich auch die Multiplikation von Operatoren definieren. Für jede zwei Operatoren  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , definieren wir das Produkt  $AB$  als die Verkettung von  $A$  und  $B$ , also

$$(AB)x := A(Bx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

---

<sup>5</sup>In unendlich dimensionalen Räumen ist das nicht der Fall.

Offensichtlich  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Behauptung.** Die Operatornorm in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist submultiplikativ, also

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (2.6)$$

**Beweis.** In der Tat ergibt Anwendung von (2.5)

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|,$$

woraus (2.6) folgt. ■

So ist  $\mathbb{R}^{n \times n}$  nicht nur ein normierter Vektorraum, aber auch eine normierte Algebra.

### 2.1.4 Normen und Operatoren in $\mathbb{C}^n$

Analog definiert man die Normen in  $\mathbb{C}^n$ , den Vektorraum von linearen Operatoren  $\mathbb{C}^{m \times n}$  und die Operatornorm in  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Alle Eigenschaften von Normen im Fall von komplexen Räumen können mit gleichen Argument bewiesen werden, wie im Fall von reellen Räumen, oder direkt aus dem reellen Fall gewonnen werden mit Hilfe von Isomorphismus  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ .

## 2.2 Existenz von Lösungen linearer Normalsysteme

In diesem Kapitel betrachten wir ein lineares Normalsystem von DGLen, das die folgende Form hat:

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.7)$$

wobei  $x = x(t)$  eine unbekannte Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  und  $A(t)$  und  $B(t)$  gegebene Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit Werten jeweils in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind.

Insbesondere ist  $A(t)x$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ , wie die anderen Terme in (2.7). Koordinatensweise lautet (2.7) wie folgt:

$$x'_i = \sum_{l=1}^n A_{il}(t)x_l + B_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $A_{ij}$  und  $B_i$  die Komponenten jeweils von  $A$  und  $B$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Abbildungen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf  $I$  sind, also alle Komponenten  $A_{ij}(t)$  und  $B_i(t)$  stetige Funktionen von  $t \in I$  sind. Wir betonen, dass der Definitionsbereich von (2.7) ist  $I \times \mathbb{R}^n$ , so dass jede Lösung von (2.7) muss auf einem Teilintervall von  $I$  definiert sein.

Der folgende Satz ist einer von den Hauptsätzen dieser Vorlesung.

**Satz 2.3** (Satz von Picard-Lindelöf für lineare Normalsystemen) *Seien  $A(t)$  und  $B(t)$  stetig auf  $I$ .*

(a) (Existenz) *Für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existiert eine Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

*die auf dem Intervall  $I$  definiert ist.*

(b) (Eindeutigkeit) *Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (2.8) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt es  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .*

Wir beweisen diesen Satz später im Abschnitt 2.3.5.

## 2.3 Skalare lineare DGLen $n$ -ter Ordnung

### 2.3.1 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten jetzt eine *skalare lineare* DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t), \quad (2.9)$$

wobei  $a_k(t), b(t)$  stetige Funktionen auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Das entsprechende Anfangsbedingung ist wie folgt:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (2.10)$$

wobei  $t_0 \in I$  und  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  gegeben sind.

**Satz 2.4** Sei alle Funktionen  $a_k(t), b(t)$  in (2.9) stetig auf  $I$ .

(a) (Existenz) Für jedes  $t_0 \in I$  und für jeden Vektor  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Lösung  $x(t)$  des AWP's (2.9)-(2.10), die auf  $I$  definiert ist.

(b) (Eindeutigkeit) Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen des AWP's (2.9)-(2.10) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt es  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

**Beweis.** Bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}(t)$  (Fettdruck  $\mathbf{x}$ ) die Vektorfunktion

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T, \quad (2.11)$$

deren Werte immer als Spaltenvektoren betrachtet werden. Als wir es schon gesehen haben, ist die DGL (2.9) äquivalent zum Normalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 &= \mathbf{x}_3 \\ &\dots \\ \mathbf{x}'_{n-1} &= \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}'_n &= -a_1\mathbf{x}_n - a_2\mathbf{x}_{n-1} - \dots - a_n\mathbf{x}_1 + b, \end{aligned}$$

das auch in der Vektorform dargestellt werden kann:

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t), \quad (2.12)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Das Anfangswertproblem (2.9)-(2.10) ist offensichtlich äquivalent zum

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Anwendung des Satzes 2.3 zum Normalsystem (2.14) ergibt die Behauptungen (a) und (b). ■

### 2.3.2 Der Raum von Lösungen homogener DGLen

Wir betrachten jetzt eine *homogene* lineare DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0, \quad (2.15)$$

wobei  $a_j(t)$  sind wie zuvor.

Sei  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.15) auf  $I$ . Offensichtlich, für alle  $x, y \in L$  ist die Summe  $x + y$  ein Element von  $L$ , sowie  $cx \in L$  für jede Konstante  $c$ . Das bedeutet, dass  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist. Das Nullelement von  $L$  ist die konstante Funktion 0.

**Satz 2.5** *Es gilt  $\dim L = n$ . Somit ist die allgemeine Lösung von (2.15) durch die folgende Identität gegeben*

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t), \quad (2.16)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.15) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

**Beweis.** Wählen wir eine Stelle  $t_0 \in I$  und bemerken, dass die Lösung  $x \in L$  durch die Werte

$$x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x'(t_0), \quad \dots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t_0)$$

eindeutig definiert ist, nach Satz 2.4. D.h., die Abbildung

$$x(t) \in L \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

ist bijektiv und offensichtlich linear. Daraus folgt, dass  $L$  und  $\mathbb{R}^n$  linear isomorph sind, und deshalb  $\dim L = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige Lösungen. Da die Anzahl von diesen Lösungen genau  $\dim L$  ist, stellt die Folge  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis in  $L$  dar. Daraus folgt, dass alle Elementen von  $L$  die Form (2.16) haben. ■

**Bemerkung.** Sofern haben wir angenommen, dass alle gegebenen und gesuchten Funktionen reellwertig sind. Das Gleiche gilt für komplexwertige Funktionen. Nämlich, die Sätze 2.3, 2.4, 2.5 gelten für komplexwertige Koeffizienten und Lösungen, mit gleichen Beweisen (obwohl die Variable  $t$  immer reelle bleibt). Sind die Koeffizienten  $a_j(t)$  in (2.15) komplexwertig, so betrachtet man die Menge  $L$  von allen komplexwertigen Lösungen als ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , und  $\dim L = n$  gilt auch in diesem Fall.

### 2.3.3 Lösungsmethoden für homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Jetzt betrachten wir die lineare DGL

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = 0 \quad (2.17)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$ , die reell oder komplex sind. Wir zeigen hier, wie man  $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.17) bestimmen kann, die danach die allgemeine Lösung liefern.

Allgemein bestimmen wir erst die komplexwertigen Lösungen von (2.17) und danach extrahieren die reellwertigen Lösungen, falls die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Die Hauptidee ist sehr einfach. Wir benutzen folgenden *Exponentialansatz* zur Lösung:  $x(t) =$

$e^{\lambda t}$  wobei  $\lambda$  eine komplexe Konstante ist, die bestimmt werden muss. Einsetzen diesen Ansatz in (2.17) und Anwendung der Identität  $x^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$  ergibt die folgende Gleichung für  $\lambda$ :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.18)$$

wobei alle Terme  $e^{\lambda t}$  wegfallen. Die Gleichung (2.18) hängt nicht mehr von  $t$  ab, und nur die Unbekannte  $\lambda$  bleibt. Die Gleichung (2.18) heißt die *charakteristische Gleichung* von (2.17), und das entsprechende Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

heißt *charakteristisches Polynom* von (2.17). Also, wir haben die folgende Behauptung bewiesen.

**Behauptung.** *Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t}$  stellt eine Lösung von (2.17) dar genau dann, wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.*

Besitzt das charakteristische Polynom genügend Nullstellen, so bestimmt man die allgemeine Lösung von (2.17) wie folgt.

**Satz 2.6** *Hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  von (2.17)  $n$  verschiedene komplexe Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen*

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \quad (2.19)$$

*linear unabhängige, komplexwertige Lösungen von (2.17) dar. Somit ist die allgemeine komplexe Lösung von (2.17) durch die Identität*

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (2.20)$$

*gegeben, wobei  $C_j$  beliebige komplexe Konstanten sind.*

*Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle von  $P$ , so ist die konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  auch eine Nullstelle von  $P$ , und die Funktionen  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  in der Folge (2.19) können durch die reellwertigen Funktionen  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$  ersetzt werden. Nach Ersetzung von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  mit nicht-reellen Nullstellen  $\lambda$  erhält man  $n$  reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (2.17). Somit wird die allgemeine reelle Lösung von (2.17) durch die Linearkombination dieser Lösungen mit reellen Koeffizienten dargestellt.*

**Beweis von Satz 2.6.** Da wir schon wissen, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t}$  eine Lösung von (2.17) darstellt, es reicht zu beweisen, dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind. Das Faktum, dass die allgemeine Lösung durch (2.20) gegeben ist, folgt dann aus Satz 2.5.

Wir beweisen durch Induktion nach  $n$ , dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind, wenn  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschiedene komplexe Zahlen sind.

Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist trivial, weil die Exponentialfunktion nicht identisch 0 ist.

Der Induktionsschritt von  $n - 1$  zu  $n$ . Angenommen, dass die Identität

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = 0 \quad (2.21)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, beweisen wir dass  $C_1 = \dots = C_n = 0$ . Dividieren (2.21) durch  $e^{\lambda_n t}$  und bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_n =: \mu_j$  ergibt

$$C_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} + C_n = 0.$$

Durch Ableitung nach  $t$  erhalten wir

$$C_1 \mu_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} \mu_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung beschließen wir dass  $C_j \mu_j = 0$  und somit  $C_j = 0$ , da  $\mu_j \neq 0$ . Das gilt für alle  $j = 1, \dots, n-1$ , und einsetzen in (2.21) ergibt auch  $C_n = 0$ .

Jetzt betrachten wir den Fall wenn  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Da die Komplexkonjugation mit Addition und Multiplikation vertauschbar ist, es gilt die Identität

$$\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda}), \quad (2.22)$$

wobei die Voraussetzung  $\bar{a}_k = a_k$  benutzt wird. Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$ , es folgt aus (2.22), dass auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Deshalb enthält die Folge (2.19) die beiden Funktionen  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$ . Nach Eulerformel haben wir

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{und} \quad e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \quad (2.23)$$

so dass  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$  sind Linearkombinationen von  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Umgekehrt, es gilt auch

$$e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) \quad \text{und} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{2i} (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}), \quad (2.24)$$

so dass  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  sind Linearkombinationen von  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$ . Daraus folgt, dass die Funktionen  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  auch zum Vektorraum  $L$  der Lösungen gehören und den gleichen Unterraum erzeugen, wie  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{\bar{\lambda} t}$ . Somit sind diese zwei Paaren von Lösungen austauschbar in jeder Basis.

Nachdem alle Paaren  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$  in (2.19) durch die reellwertigen Funktionen ersetzt worden sind, erhält man eine Basis in  $L$  von reellwertigen Lösungen. ■

**Bemerkung.** Die Nullstellen von einem quadratischen Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  können immer mit Hilfe der Formel

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

bestimmt werden. Polynome höheres Grades versucht man in ein Produkt von Polynomen 1er und 2er Grades zerlegen und somit alle Nullstellen zu bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist  $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ , und dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$ . Deshalb sind die unabhängigen Lösungen  $x_1(t) = e^t$  und  $x_2(t) = e^{2t}$ , und die allgemeine Lösung ist  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ . Nämlich, für reelle Konstanten  $C_1, C_2$  erhalten wir die allgemeine reelle Lösung, und für komplexe  $C_1, C_2$  – die komplexe Lösung.



**Beispiel.** Die DGL  $x'' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ . Damit erhalten wir zwei komplexwertige unabhängige Lösungen  $e^{it}$  und  $e^{-it}$ . Die allgemeine komplexwertige Lösung ist deshalb  $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$ . Da  $\lambda = 0 + 1i$ , erhalten wir nach Satz 2.6 zwei unabhängige reellwertige Lösungen  $\cos t$  und  $\sin t$ , und die reellwertige allgemeine Lösung ist  $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Alternativ kann man diese Lösungen als Linearkombinationen von  $e^{it}$  und  $e^{-it}$  erhalten:

$$\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t,$$

und das entspricht einem Basiswechsel im Vektorraum der Lösungen.

**Beispiel.** Die DGL  $x''' - x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach Satz 2.6 erhalten wir drei linear unabhängige reellwertige Lösungen

$$e^t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

und damit die allgemeine reellwertige Lösung

$$C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, wenn das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  weniger als  $n$  verschiedene Nullstellen besitzt. In diesem Fall ist Satz 2.6 nicht verwendbar. Nach Fundamentalsatz der Algebra, hat jedes Polynom  $P(\lambda)$  vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten genau  $n$  komplexe Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden. Für jedes  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  definiert man die Vielfachheit  $m$  von  $\lambda_0$  bezüglich  $P(\lambda)$  als der maximale Wert ganzer Zahl  $m$ , derart, dass  $P(\lambda)$  durch  $(\lambda - \lambda_0)^m$  teilbar ist. Letzteres bedeutet, dass es ein Polynom  $Q(\lambda)$  gibt, derart, dass die folgende Identität gilt:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Es ist klar, dass immer  $m \geq 0$  und  $m \geq 1$  genau dann, wenn  $\lambda_0$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Dass  $m$  maximal ist bedeutet, dass  $\lambda_0$  keine Nullstelle von  $Q$  ist.

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedenen komplexwertigen Nullstellen von  $P(\lambda)$ ; sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Nach Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$m_1 + \dots + m_r = n.$$

Daraus folgt, dass sich charakteristisches Polynom  $P(\lambda)$  in ein Product

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

zerlegen lässt.

Um  $n$  unabhängige Lösungen der DGL (2.17) erhalten zu können, muss jede Nullstelle  $\lambda_j$  genau  $m_j$  unabhängige Lösungen ergeben. Der folgende Satz zeigt, wie genau erhält man diese Lösungen.

**Satz 2.7** Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedene komplexwertige Nullstellen von charakteristischen Polynom  $P(\lambda)$ , und sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Dann stellen die folgenden  $n$  Funktionen linear unabhängige Lösungen von (2.17) dar:

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1 \quad (2.25)$$

(also jede Nullstelle  $\lambda_j$  liefert  $m_j$  Lösungen  $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}$ ). Somit ist die allgemeine Lösung von (2.17) wie folgt

$$x(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{kj} t^k e^{\lambda_j t}, \quad (2.26)$$

wobei  $C_{kj}$  beliebige komplexe Konstanten sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle von  $P(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $m$ , so ist auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle mit gleicher Vielfachheit  $m$ , und die Funktionen  $t^k e^{\lambda t}, t^k e^{\bar{\lambda} t}$  in der Folge (2.25) können durch die reellwertigen Funktionen  $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$  ersetzt werden, für jedes  $k = 0, \dots, m - 1$ . Mit Hilfe von dieser Methode erhält man  $n$  unabhängige reellwertige Lösungen von (2.17).

Wir beweisen diesen Satz später.

**Bemerkung.** Bezeichnen wir

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k,$$

und erhalten aus (2.26)

$$x(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t}. \quad (2.27)$$

D.h., die allgemeine Lösung von (2.17) kann durch die Identität (2.27) gegeben werden, wobei  $P_j(t)$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $\leq m_j - 1$  ist.

**Beispiel.** Die DGL  $x'' - 2x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

dass nur eine Nullstelle  $\lambda = 1$  hat, mit der Vielfachheit  $m = 2$ . Nach Satz 2.7 stellen die Funktionen  $e^t$  und  $te^t$  zwei unabhängige Lösungen dar, und die allgemeine Lösung ist durch die Identität

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t$$

gegeben.

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + x^{IV} - 2x''' - 2x'' + x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^3.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  mit Vielfachheit  $m_1 = 2$  und  $\lambda_2 = -1$  mit  $m_2 = 3$ . Nach Satz 2.7 erhalten wir 5 unabhängige Lösungen

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}, t^2 e^{-t},$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2) e^{-t}.$$

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + 2x''' + x' = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)^2 = \lambda(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i$  und  $\lambda_3 = -i$ , und die Vielfachheiten sind  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m_3 = 2$ . Die unabhängigen Lösungen sind

$$1, e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}, \quad (2.28)$$

und die allgemeine komplexe Lösung ist

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{it} + (C_4 + C_5 t) e^{-it}.$$

Ersetzen in der Folge (2.28) die Funktionen  $e^{it}, e^{-it}$  durch  $\cos t, \sin t$  und die Funktionen  $te^{it}, te^{-it}$  durch  $t \cos t, t \sin t$  ergibt die folgenden unabhängigen reellen Lösungen:

$$1, \cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t.$$

Dann ist die allgemeine reelle Lösung wie folgt:

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) \cos t + (C_4 + C_5 t) \sin t.$$

Jedem Polynom

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  entspricht ein Differentialoperator

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) &= a_0 \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_n \\ &= a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n, \end{aligned}$$

wobei die Potenz  $\left(\frac{d}{dt}\right)^k$  die  $k$ -fache Selbstverkettung von der Ableitung bedeutet. D.h. auf jede  $n$ -fach differenzierbare Funktion  $f(t)$  wirkt der Operator  $P\left(\frac{d}{dt}\right)$  nach der Regel

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f = a_0 f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f.$$

Deshalb kann die DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (2.29)$$

kurz in der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) x = 0$$

geschrieben werden, wobei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (2.29) ist (in diesem Fall  $a_0 = 1$ ).

**Behauptung.** Für jedes Polynom gilt die Identität

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}. \quad (2.30)$$

**Beweis.** Es reicht diese Identität für das einfachste Polynom  $P(\lambda) = \lambda^k$  zu beweisen; dann gilt (2.30) für alle Polynomen nach der Linearität von den beiden Seiten. Für  $P(\lambda) = \lambda^k$  haben wir

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = \frac{d^k}{dt^k}e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t},$$

was zu beweisen war. ■

Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$ , so ergibt (2.30), dass  $e^{\lambda t}$  eine Lösung von (2.17) ist, wie wir es schon wissen.

### 2.3.4 Lösungsmethoden für inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir eine lineare DGL  $n$ -te Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2.31)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  gegebene stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Lösungen  $x(t)$  auch auf  $I$  definiert sind. Die Funktion  $f$  auf der rechten Seite heißt *Störfunktion*. Ist die Störfunktion nicht identisch 0, so nennt man die DGL (2.31) *inhomogen*.

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}(t)$  den Differentialoperator auf der rechten Seite von (2.31), also

$$\mathcal{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t),$$

so dass die Differentialgleichung (2.31) kann kurz in der Form  $\mathcal{A}(t)x = f(t)$  geschrieben werden. Wir betonen, dass  $\mathcal{A}(t)$  ein *linear* Operator ist, der auf  $n$ -fach differenzierbare Funktionen wirkt.

Im folgenden Lemma versammeln wir die Eigenschaften der Lösungen, die von der Linearität von  $\mathcal{A}(t)$  abhängen.

**Lemma 2.8** (a) Seien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen von (2.31) mit Störfunktionen  $f_1$  bzw.  $f_2$  und seien  $c_1, c_2$  zwei Konstanten. Dann ist die Funktion  $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  eine Lösung von (2.31) mit der Störfunktion  $f = c_1f_1 + c_2f_2$ .

(b) Seien  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung der DGL (2.31) und  $x_h(t)$  eine allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (2.32)$$

Dann ist die allgemeine Lösung von (2.31) durch

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) \quad (2.33)$$

gegeben.

(c) Seien  $x_1(t), \dots, x_n(t)$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.32), dann ist die allgemeine Lösung von (2.31) durch die Identität

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) \quad (2.34)$$

gegeben.

**Beweis.** (a) Offensichtlich, die Addition der beiden Gleichungen

$$\mathcal{A}(t) x_1 = f_1, \quad \mathcal{A}(t) x_2 = f_2$$

multipliziert mit  $c_1$  bzw  $c_2$  ergibt

$$\mathcal{A}(t) x = \mathcal{A}(t) (c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 f_1 + c_2 f_2 = f.$$

(b) Für jede  $n$ -fach differenzierbare Funktion  $x(t)$  betrachten wir auch die Funktion  $y = x - x_0$ . Dann ist die DGL (2.31) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) (y + x_0) &= f(t) \\ \mathcal{A}(t) y + \mathcal{A}(t) x_0 &= f(t) \\ \mathcal{A}(t) y &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $x$  eine Lösung von (2.31) genau dann, wenn  $y = x - x_0$  eine Lösung von (2.32) ist. Somit erhalten wir  $x - x_0 = x_h$  und  $x = x_0 + x_h$ .

(c) Da die allgemeine Lösung von (2.32) durch die Linearkombination

$$x_h = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

gegeben ist, folgt (2.34) aus (2.33). ■

Teil (b) von Lemma 2.8 bedeutet folgendes: um die allgemeine Lösung von inhomogenen DGL (2.31) zu bestimmen, es reicht eine spezielle Lösung von (2.31) zu ermitteln und diese Lösung zur allgemeinen Lösung der homogenen DGL (2.32) zu addieren.

Wir benutzen diese Methode für die linearen inhomogenen DGLen mit *konstanten* Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (2.35)$$

da wir schon wissen, wie die entsprechende homogene DGL gelöst werden kann. In diesem Paragraph entwickeln wir eine Methode für Ermittlung einer speziellen Lösung von (2.35) für eine bestimmte Klasse von Störfunktionen  $f$ .

**Definition.** Eine Funktion  $f(t)$  auf  $\mathbb{R}$  heißt *Quasipolynom* wenn

$$f(t) = \sum_j R_j(t) e^{\mu_j t},$$

wobei  $R_j(t)$  Polynomen sind,  $\mu_j$  komplexe Konstanten, und die Summe endlich ist.

Offensichtlich, die Summe und das Produkt von zwei Quasipolynomen ist auch ein Quasipolynom. Insbesondere sind die folgenden Funktionen Quasipolynomen:

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{und} \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

(wobei  $k$  nicht-negative ganze Zahl ist und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), weil die Funktionen

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$$

Quasipolynomen sind.

Unser Gegenstand ist die DGL (2.35) zu lösen, wenn die Störfunktion ein Quasipolynom ist. Nach Lemma 2.8, es reicht eine spezielle Lösung von (2.35) für die Störfunktion der Form  $f(t) = R(t)e^{\mu t}$  ermitteln zu können. Erst erklären wir die Hauptidee der Methode für den Fall  $f(t) = e^{\mu t}$ . Sei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (2.35), also

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

In diesem Fall haben wir  $\mathcal{A}(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)$  und schreiben die DGL (2.35) kurz in der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = e^{\mu t}. \quad (2.36)$$

Zunächst nehmen wir an, dass  $\mu$  keine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist (*nicht-resonanter Fall*).

**Lemma 2.9** *Ist  $\mu$  keine Nullstelle von  $P$ , hat die DGL (2.36) die spezielle Lösung  $x_0(t) = ae^{\mu t}$  mit*

$$a = \frac{1}{P(\mu)}. \quad (2.37)$$

**Beweis.** Einsetzen  $x(t) = ae^{\mu t}$  in (2.30) ergibt nach (2.30) und (2.37)

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(ae^{\mu t}) = aP(\mu)e^{\mu t} = e^{\mu t},$$

was zu beweisen war. ■

**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = e^t.$$

Wir haben  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  und bemerken, dass  $\mu = 1$  keine Nullstelle von  $P$  ist. Einsetzen des Ansatz  $x(t) = ae^t$  in die DGL ergibt

$$ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t,$$

woraus folgt

$$4a = 1 \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{4}.$$

Alternativ erhalten wir den gleichen Wert von  $a$  nach (2.37):

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{1 + 2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Deshalb ist die Antwort  $x(t) = \frac{1}{4}e^t$ .

**Beispiel.** Betrachten wir noch eine DGL:

$$x'' + 2x' + x = \sin t. \quad (2.38)$$

Die Sinusfunktion  $\sin t$  ist der Imaginärteil von  $e^{it}$ , und deshalb bestimmen wir erst eine spezielle Lösung von der DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{it}, \quad (2.39)$$

und danach nehmen den Imaginärteil der Lösung. Für den Ansatz  $x(t) = ae^{it}$  erhalten wir nach (2.37)

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Somit ist eine spezielle Lösung von (2.39)

$$x(t) = -\frac{i}{2}e^{it} = -\frac{i}{2}(\cos t + i \sin t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{i}{2} \cos t,$$

und der Imaginärteil  $x(t) = -\frac{1}{2} \cos t$  ist eine spezielle Lösung von (2.38).

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t} \cos t \quad (2.40)$$

und bemerken, dass die Störfunktion  $e^{-t} \cos t$  der Realteil von  $e^{\mu t}$  mit  $\mu = -1 + i$  ist. Deshalb lösen wir zunächst

$$x'' + 2x' + x = e^{\mu t}. \quad (2.41)$$

Für den Ansatz  $x(t) = ae^{\mu t}$  erhalten wir

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{(-1 + i)^2 + 2(-1 + i) + 1} = -1.$$

Deshalb hat (2.41) die spezielle Lösung  $x(t) = -e^{(-1+i)t} = -e^{-t} \cos t - ie^{-t} \sin t$ , und (2.40) hat die Lösung  $x(t) = -e^{-t} \cos t$ .

**Beispiel.** Jetzt fügen wir drei obige Beispiele zusammen:

$$x'' + 2x' + x = 4e^t - 2 \sin t + e^{-t} \cos t, \quad (2.42)$$

wobei die Störfunktion eine Linearkombination von den obigen Störfunktionen ist. Nach Lemma 2.8 erhalten wir eine spezielle Lösung von (2.42) als die gleiche Linearkombination von den obigen speziellen Lösungen:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 4 \left( \frac{1}{4} e^t \right) - 2 \left( -\frac{1}{2} \cos t \right) + (-e^{-t} \cos t) \\ &= e^t + \cos t - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + 2x' + x = 0$  ist

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t},$$

erhalten wir nach Lemma 2.8 die allgemeine Lösung von (2.42)

$$x(t) = e^t + \cos t - e^{-t} \cos t + (C_1 + C_2 t) e^{-t}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Jetzt ist der Wert  $\mu = -1$  eine Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  und die Methode von Lemma 2.8 funktioniert nicht. In der Tat löst der Ansatz  $x = ae^{-t}$  in diesem Fall die homogene DGL, und für inhomogene DGL muss man einen anderen Ansatz finden.

Der Fall wenn  $\mu$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, heißt *resonanter Fall*. Der folgende Satz liefert die generelle Lösungsmethode von (2.35) für beliebige Quasipolynomen  $f(t)$ .

**Satz 2.10** *Seien  $R(t)$  ein nicht-Null Polynom von Grad  $k \geq 0$  und  $\mu$  eine komplexe Zahl. Sei  $m$  die Vielfachheit von  $\mu$  bezüglich des Polynoms  $P$ . Dann hat die DGL*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\mu t} \quad (2.43)$$

eine spezielle Lösung der Form

$$x_0(t) = t^m Q(t) e^{\mu t},$$

wobei  $Q(t)$  ein (gesuchtes) Polynom  $k$ -ten Grades ist.

Im Fall  $R(t) \equiv \alpha$  (und  $k = 0$ ) hat die DGL  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$  eine spezielle Lösung

$$x_0(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m e^{\mu t}. \quad (2.44)$$

**Bemerkung.** Als wir später sehen (vgl. Lemma 2.12),  $P^{(m)}(\mu) \neq 0$  so dass die Funktion (2.44) wohldefiniert ist.

**Beispiel.** Betrachten wir noch einmal die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Offensichtlich hat die Störfunktion die Form  $R(t)e^{\mu t}$  mit  $R(t) = 1$  und  $\mu = -1$ . Da  $-1$  eine 2-fache Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  ist, benutzen wir den folgenden Ansatz zur Lösung

$$x_0(t) = at^2 e^{-t},$$

wobei die Konstante  $a$  das Polynom  $Q$  darstellt (weil  $\deg Q = 0$ ). Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} a \left( (t^2 e^{-t})'' + 2(t^2 e^{-t})' + t^2 e^{-t} \right) &= e^{-t} \\ a 2e^{-t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

woraus  $a = \frac{1}{2}$  folgt. Die spezielle Lösung ist also

$$x_0(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$

Alternativ kann man diese Lösung direkt nach (2.44) erhalten:

$$x_0(t) = \frac{1}{P''(-1)} t^2 e^{-t} = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$



**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = te^{-t}. \quad (2.45)$$

Wir haben  $R(t) = t$  und, wie zuvor,  $\mu = -1$  mit Vielfachheit  $m = 2$ . Da  $\deg R = 1$ , muss das Polynom  $Q$  von Grad 1 sein, also  $Q(t) = at + b$ , wobei  $a$  und  $b$  die gesuchten Konstanten sind. Einsetzen der Funktion

$$x(t) = (at + b)t^2e^{-t} = (at^3 + bt^2)e^{-t}$$

in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + x &= ((at^3 + bt^2)e^{-t})'' + 2((at^3 + bt^2)e^{-t})' + (at^3 + bt^2)e^{-t} \\ &= (2b + 6at)e^{-t}. \end{aligned}$$

Das Vergleich mit (2.45) ergibt die Gleichung für  $a$  und  $b$

$$2b + 6at = t,$$

woraus  $a = \frac{1}{6}$  und  $b = 0$  folgt. Die spezielle Lösung ist also

$$x_0(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung von (2.45)

$$x(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t} + (C_1 + C_2t)e^{-t}.$$

### 2.3.5 Beweise von Sätze 2.7, 2.10 und 2.3

Für den Beweis von Satz 2.7 machen wir erst eine Vorbereitung. Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung der Identität (2.30).

**Lemma 2.11** *Seien  $f(t), g(t)$   $n$ -fach differenzierbare Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Dann gilt für jedes Polynom  $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  von Grad  $\leq n$  die folgende Identität:*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(fg) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right)g. \quad (2.46)$$

In der Tat kann man die Summe auf alle  $j \geq 0$  erweitern, da für  $j > n$  die Ableitung  $P^{(j)}$  identisch 0 ist.

**Beispiel.** Für das Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$  haben wir  $P'(\lambda) = 2\lambda + 1$ ,  $P'' = 2$ , und (2.46) ergibt

$$\begin{aligned} (fg)'' + (fg)' + fg &= fP\left(\frac{d}{dt}\right)g + f'P'\left(\frac{d}{dt}\right)g + \frac{1}{2}f''P''\left(\frac{d}{dt}\right)g \\ &= f(g'' + g' + g) + f'(2g' + g) + f''g. \end{aligned}$$

Es ist einfach diese Identität direkt mit Hilfe von der Produktregel zu beweisen.

**Beispiel.** Im Fall  $f(t) = e^{\lambda t}$  und  $g(t) \equiv 1$  erhalten wir aus (2.46)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (e^{\lambda t})^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) 1 \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \lambda^j e^{\lambda t} P^{(j)}(0) = P(\lambda) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

was beweist noch einmal (2.30).

**Beweis.** Da die beiden Seiten von (2.46) linear in  $P$  sind, reicht es die Identität (2.46) für den speziellen Fall  $P(\lambda) = \lambda^k$ ,  $k \leq n$  zu beweisen. In diesem Fall haben wir

$$P^{(j)} = k(k-1) \dots (k-j+1) \lambda^{k-j}$$

für  $j \leq k$ , und  $P^{(j)} \equiv 0$  für  $j > k$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= k(k-1) \dots (k-j+1) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}, \quad j \leq k, \\ P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= 0, \quad j > k, \end{aligned}$$

und die Identität (2.46) wird

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{j!} f^{(j)} g^{(k-j)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}, \quad (2.47)$$

wobei  $\binom{k}{j}$  Binomialkoeffizienten sind. Diese Identität ist von Analysis bekannt als *Leibnizformel (Leibnizsche Regel)*<sup>6</sup>. ■

**Lemma 2.12** *Eine komplexe Zahl  $\lambda$  ist eine Nullstelle mit Vielfachheit  $m$  eines Polynoms  $P$  genau dann, wenn*

$$P^{(k)}(\lambda) = 0 \text{ für alle } k = 0, \dots, m-1 \text{ und } P^{(m)}(\lambda) \neq 0. \quad (2.48)$$

*D.h.  $m$  ist die minimale positive ganze Zahl derart, dass  $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$ .*

**Beweis.** Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $m$ , so gilt die Identität

$$P(z) = (z - \lambda)^m Q(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei  $Q$  ein Polynom ist, so dass  $Q(\lambda) \neq 0$ . Für jede natürliche Zahl  $k$  we haben nach Leibnizformel

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} ((z - \lambda)^m)^{(j)} Q^{(k-j)}(z).$$

<sup>6</sup>Für  $k = 1$  führt (2.47) zurück auf Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Für  $k > 1$  beweist man (2.47) durch Induktion nach  $k$ .

Im Fall  $k < m$  gilt immer  $j < m$  und somit

$$((z - \lambda)^m)^{(j)} = \text{const} (z - \lambda)^{m-j},$$

und diese Funktion verschwindet an  $z = \lambda$ . Deshalb für  $k < m$  haben wir  $P^{(k)}(\lambda) = 0$ .

Im Fall  $k = m$  erhalten wir noch mal, dass alle Ableitungen  $((z - \lambda)^m)^{(j)}$  verschwinden an  $z = \lambda$  für  $j < k$ , während für  $j = k$  erhalten wir

$$((z - \lambda)^m)^{(k)} = ((z - \lambda)^m)^{(m)} = m! \neq 0$$

und somit

$$P^{(m)}(\lambda) = m!Q(\lambda) \neq 0.$$

Damit ist (2.48) bewiesen.

Umgekehrt, gilt (2.48), so ergibt die Taylorformel für Polynomen

$$\begin{aligned} P(z) &= P(\lambda) + \frac{P'(\lambda)}{1!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} (z - \lambda)^m + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= (z - \lambda)^m Q(z) \end{aligned}$$

wobei  $n = \deg P$  und

$$Q(z) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} + \frac{P^{(m+1)}(\lambda)}{(m+1)!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^{n-m}.$$

Offensichtlich  $Q(\lambda) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} \neq 0$ , woraus folgt, dass  $\lambda$  eine Nullstelle von Vielfachheit  $m$  ist. ■

**Lemma 2.13** Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  verschiedene komplexe Zahlen, wobei  $r \geq 1$ . Gilt für Polynomen  $P_j(t)$  über  $\mathbb{C}$  die Identität

$$\sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (2.49)$$

dann sind alle Polynomen  $P_j(t)$  identisch Null.

**Beweis.** Wir benutzen die Induktion nach  $r$ . Der Induktionsanfang  $r = 1$  ist trivial. Den Induktionsschritt von  $r - 1$  zu  $r$  führen wir wie im Beweis von Satz 2.6 durch. In der Identität (2.49) können wir auf alle Nullpolynomen  $P_j$  verzichten und somit voraussetzen, dass  $P_j$  kein Nullpolynom für jedes  $j = 1, \dots, r$  ist. Dividieren (2.49) durch  $e^{\lambda_r t}$  und bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_r =: \mu_j$  ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} P_j(t) e^{\mu_j t} + P_r(t) = 0. \quad (2.50)$$

Wählen wir eine ganze Zahl  $k > \deg P_r$ , wobei  $\deg P$  der Grad von  $P$  ist. Die  $k$ -fache Ableitung von (2.50) ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} (P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = 0. \quad (2.51)$$

**Behauptung.** Seien  $P$  ein Polynom über  $\mathbb{C}$  und  $\mu \neq 0$  eine komplexe Zahl. Dann gilt für alle  $k = 0, 1, \dots$

$$(P(t) e^{\mu t})^{(k)} = Q(t) e^{\mu t} \quad (2.52)$$

wobei  $Q$  auch ein Polynom ist mit  $\deg Q = \deg P$ .

Es reicht (2.52) für  $k = 1$  zu beweisen und danach die Induktion nach  $k$  zu benutzen. Ist  $P \equiv 0$  dann gilt auch  $Q \equiv 0$ . Sei  $P$  nicht-Null. Dann reicht es die Identität (2.52) für Monomen  $P(t) = t^m$  beweisen, da für allgemeine Polynomen (2.52) danach nach Linearität folgt. Für  $k = 1$  und  $P(t) = t^m$  haben wir

$$(t^m e^{\mu t})' = \mu t^m e^{\mu t} + m t^{m-1} t^{\mu t} = Q(t) e^{\mu t}$$

wobei  $\deg Q = m = \deg P$ , was zu beweisen war.

Nach der Behauptung haben wir

$$(P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = Q_j(t) e^{\mu_j t},$$

wobei  $\deg Q_j = \deg P_j$  und deshalb  $Q_j \not\equiv 0$ . Andererseits haben wir nach (2.51)

$$\sum_{j=1}^{r-1} Q_j(t) e^{\mu_j t} = 0.$$

Die Induktionsvoraussetzung ergibt  $Q_j \equiv 0$ , und dieser Widerspruch beschließt den Beweis. ■

**Beweis von Satz 2.7.** Seien  $P$  das charakteristische Polynom von (2.29) und  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  von Vielfachheit  $m$ . Wir beweisen erst, dass die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  die DGL (2.29) für jedes  $k = 0, \dots, m-1$  löst, also

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0.$$

Nach Lemma 2.11 und (2.30) haben wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}(\lambda) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Falls  $j > k$  dann  $(t^k)^{(j)} \equiv 0$ . Falls  $j \leq k$  dann  $j < m$  und somit nach Voraussetzung und Lemma 2.12  $P^{(j)}(\lambda) = 0$ . Deshalb verschwinden alle Terme in der obigen Summe, was ergibt

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0,$$

also die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  löst (2.29).

Jetzt zeigen wir, dass die  $n$  Funktionen in der Folge

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad (2.53)$$

linear unabhängig sind. Betrachten wir eine Linearkombination von diesen Funktionen, die dargestellt werden kann wie folgt:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} \quad (2.54)$$

wobei  $P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k$  Polynomen sind. Nach Lemma 2.13 kann die Linearkombination (2.54) nur dann identisch Null sein, wenn  $P_j \equiv 0$ , woraus folgt dass alle  $C_{jk} = 0$  und somit die Funktionen (2.53) linear unabhängig sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle der Vielfachheit  $m$ . Nach Lemma 2.12 erfüllt  $\lambda$  die Gleichungen (2.48). Konjugieren diese Gleichungen ergibt die ähnlichen Gleichungen für  $\bar{\lambda}$ , da  $\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda})$  (vgl. (2.22)). Daraus folgt, dass  $\bar{\lambda}$  auch eine Nullstelle der Vielfachheit  $m$  ist.

Die letzte Behauptung, dass jedes Paar

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^k e^{\bar{\lambda} t}$$

in (2.53) durch das Paar

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

ersetzt werden kann, folgt aus der Beobachtung, dass diese Paare auseinander durch Lineartransformationen nach Eulerformel entstehen und somit gleichen Unterraum erzeugen, wie im Beweis von Satz 2.6. ■

**Beweis von Satz 2.10.** We müssen beweisen, dass die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t) e^{\mu t}$$

eine Lösung in der Form

$$x(t) = t^m Q(t) e^{\mu t}$$

hat, wobei  $m$  die Vielfachheit von  $\mu$  bezüglich  $P$  ist und  $Q$  ein Polynom mit  $\deg Q = k := \deg R$  ist. Nach Lemma 2.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)x &= P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^m Q(t) e^{\mu t}) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\mu t} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}(\mu) e^{\mu t}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Da nach Lemma 2.12 gilt  $P^{(j)}(\mu) = 0$  für alle  $j < m$ , kann der Laufindex  $j$  durch  $j \geq m$  beschränkt werden. Bezeichnen wir

$$y(t) = (t^m Q(t))^{(m)} \quad (2.56)$$

so dass

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} e^{\mu t}. \quad (2.57)$$

Ist  $Q$  ein Polynom von Grad  $k$ , so ist  $t^m Q$  ein Polynom von Grad  $m+k$  und somit ist  $y(t) = (t^m Q(t))^{(m)}$  ein Polynom von Grad  $(m+k)-m = k$ . Umgekehrt, ist  $y$  ein Polynom

von Grad  $k$ , so ergibt die  $m$ -fache Integration von (2.56) (ohne die Integrationskonstanten zu addieren) und Division durch  $t^m$  ein Polynom von Grad  $k$ , das ist  $Q$ . Deshalb reicht es ein Polynom  $y$  von Grad  $k$  zu bestimmen, derart, dass die rechte Seite von (2.57) gleich  $R(t)e^{\mu t}$  ist. Da  $e^{\mu t}$  sich herauskürzen lässt, erhalten wir die folgende DGL für  $y$

$$\sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} = R(t).$$

Durch den Wechsel  $l = j - m$  des Laufindex, schreiben wir diese DGL in der folgenden Form um:

$$\sum_{l \geq 0} b_l y^{(l)} = R(t), \quad (2.58)$$

wobei  $b_l = \frac{P^{(l+m)}(\mu)}{(l+m)!}$ , insbesondere

$$b_0 = \frac{P^{(m)}(\mu)}{m!} \neq 0. \quad (2.59)$$

Es bleibt die folgende Behauptung zu beweisen.

**Behauptung.** Sei  $b_0 \neq 0$ . Ist  $R(t)$  ein Polynom von Grad  $k \geq 0$ , so existiert ein Polynom  $y(t)$  von Grad  $k$ , das (2.58) erfüllt.

Beweis durch Induktion nach  $k$ . Im Induktionsanfang für  $k = 0$  ist  $R(t)$  konstant, z.B.,  $R(t) = \alpha$ , und  $y(t)$  muss auch konstant sein, also  $y(t) = c$ . Dann führt (2.58) zurück auf die Gleichung  $b_0 c = \alpha$ , woraus folgt  $c = \alpha/b_0$ .

Für den Induktionsschritt von Werten  $< k$  zu  $k$ , stellen wir  $y$  in der Form

$$y = ct^k + z(t) \quad (2.60)$$

dar, wobei  $z$  ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Einsetzen (2.60) in (2.58) ergibt die DGL für  $z$

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = R(t) - \sum_{l \geq 0} b_l (ct^k)^{(l)} =: \tilde{R}(t).$$

Bemerken wir, dass  $\tilde{R}$  immer ein Polynom von Grad  $\leq k$  ist, als die Differenz von zwei Polynomen von Grad  $k$ . Bezeichnen mit  $\alpha t^k$  den höchsten Term im Polynom  $R(t)$ , also

$$R(t) = \alpha t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Dann gilt

$$\tilde{R}(t) = (\alpha - b_0 c) t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Bestimmen  $c$  aus der Gleichung  $b_0 c = \alpha$ , also  $c = \alpha/b_0$ , ergibt  $\deg \tilde{R} < k$ . Nach der Induktionsvoraussetzung hat die DGL

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = \tilde{R}(t)$$

eine Lösung  $z(t)$ , die ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Somit ist die Funktion  $y = ct^k + z$  ein Polynom von Grad  $k$ , und  $y$  löst die DGL (2.58).

Letztlich betrachten wir den Fall  $R(t) \equiv \alpha$ . Im Induktionsanfang haben wir es schon gesehen, dass in diesem Fall  $y(t)$  eine Konstante ist wie folgt:

$$y(t) = \frac{\alpha}{b_0} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)}.$$

Die DGL (2.56) wird

$$(t^m Q(t))^{(m)} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)},$$

woraus die  $m$ -fache Integration ergibt

$$t^m Q(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m.$$

Deshalb hat die DGL  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$  eine spezielle Lösung

$$x(t) = t^m Q(t) e^{\mu t} = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m e^{\mu t},$$

was zu beweisen war. ■

Für den Beweis von Satz 2.3 brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 2.14** (Grönwall-Lemma) *Sei  $z(t)$  eine nicht-negative stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$  und  $t_0 \in [a, b]$ . Gilt die folgende Ungleichung für alle  $t \in [a, b]$ :*

$$z(t) \leq C + L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|, \quad (2.61)$$

mit beliebigen Konstanten  $C, L \geq 0$ , dann gilt für alle  $t \in [a, b]$  die Ungleichung

$$z(t) \leq C e^{L|t-t_0|}. \quad (2.62)$$

**Bemerkung.** Normalerweise formuliert man Grönwall-Lemma für den Fall  $t_0 = a$ . In diesem Fall entfallen die Betragzeichen in (2.61) und (2.62), weil  $t \geq t_0$ .

**Beweis.** Es reicht die Behauptung im Fall  $C > 0$  zu beweisen, da der Fall  $C = 0$  daraus folgt indem man  $C \rightarrow 0$  lässt. In der Tat, ist (2.61) mit  $C = 0$  erfüllt, so ist (2.61) auch mit jedem  $C > 0$  erfüllt. Es folgt, dass (2.62) mit jedem  $C > 0$  erfüllt ist, und das ergibt (2.62) mit  $C = 0$ .

Also, nehmen wir an, dass  $C > 0$  und definieren eine Funktion  $F$  auf dem Intervall  $[t_0, b]$  wie folgt

$$F(t) = C + L \int_{t_0}^t z(s) ds.$$

Bemerken wir, dass die Funktion  $F$  echt positive und differenzierbar ist, und  $F' = Lz$  gilt. Die Bedingung (2.61) ergibt für  $t \in [t_0, b]$  dass  $z \leq F$  und somit

$$F' = Lz \leq LF.$$

Diese Differentialungleichung kann gelöst werden genau so, wie trennbare DGLen. Dividieren durch  $F$  ergibt

$$\frac{F'}{F} \leq L,$$

und durch Integration über  $[t_0, t]$  erhalten wir, dass

$$\ln \frac{F(t)}{F(t_0)} = \int_{t_0}^t \frac{F'(s)}{F(s)} ds \leq \int_{t_0}^t L ds = L(t - t_0),$$

für alle  $t \in [t_0, b]$ . Daraus folgt

$$F(t) \leq F(t_0) e^{L(t-t_0)} = C e^{L(t-t_0)}.$$

Da  $z \leq F$ , erhalten wir (2.62) für alle  $t \in [t_0, b]$ .

Auf dem Intervall  $[a, t_0]$  betrachten wir analog die Funktion

$$F(t) = C + L \int_t^{t_0} z(s) ds,$$

die positive und differenzierbar ist. Da  $F' = -Lz$  und nach (2.61)  $z \leq F$ , erhalten wir die Differentialungleichung

$$F' \geq -LF,$$

die ergibt für  $t \in [a, t_0]$

$$\ln \frac{F(t_0)}{F(t)} = \int_t^{t_0} \frac{F'(s)}{F(s)} ds \geq - \int_t^{t_0} L ds = -L(t_0 - t) = -L|t - t_0|$$

und

$$z(t) \leq F(t) \leq F(t_0) e^{L|t-t_0|} = C e^{L|t-t_0|}.$$

■

**Beweis von Satz 2.3.** Wählen wir ein beschränktes geschlossenes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I$ , derart, dass  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Wir beweisen die folgenden zwei Behauptungen:

1. die Eindeutigkeit der Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ ;
2. die Existenz einer Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf dem ganzen Intervall  $I$ .

Bemerken wir, dass für jede Lösung  $x(t)$  von (2.8) auf  $[a, \beta]$  und für alle  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t x'(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Sei  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (2.8) auf the interval  $[a, \beta]$ , dann die beiden Funktionen erfüllen die Integralgleichung (2.63). Daraus folgt, dass

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - y(s)) ds,$$

für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Wir benutzen die Ungleichung

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s)\| ds \right|, \tag{2.64}$$



die für jede stetige Funktion  $f(s)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  gilt. Mit Hilfe von (2.64) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|(x(s) - y(s))\| ds \right|, \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei

$$L = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)\|. \quad (2.66)$$

Da die Verkettung  $s \mapsto A(s) \mapsto \|A(s)\|$  stetig ist, ist die Funktion  $\|A(s)\|$  beschränkt auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , so dass  $L < \infty$ . Nach (2.65) gilt für die Funktion

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\|$$

die folgende Ungleichung:

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Lemma 2.14 mit  $C = 0$  ergibt  $z(t) \leq 0$  und somit  $z(t) = 0$ ,  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ .

Sei  $x(t), y(t)$  zwei Lösungen von (2.8) auf einem Intervall  $I' \subset I$ . Für jedes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I'$  mit  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  haben wir  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Da jedes Intervall als eine Vereinigung von beschränkten geschlossenen Intervallen dargestellt werden kann, gewinnen wir die Identität  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

Jetzt beweisen wir die Existenz einer Lösung von (2.8) auf  $[\alpha, \beta]$  mit Hilfe von Annäherung durch eine Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Die Näherungslösungen werden induktiv definiert wie folgt:

$$x_0(t) \equiv x_0$$

und

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds, \quad k \geq 1. \quad (2.67)$$

Es ist klar, dass alle Funktionen  $x_k(t)$  stetig auf  $[\alpha, \beta]$  sind. Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$  gegen eine Lösung von (2.8) konvergiert für  $k \rightarrow \infty$ . Mit Hilfe von (2.67) und

$$x_{k-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-2}(s) + B(s)) ds$$

erhalten wir, für jedes  $k \geq 2$  und  $t \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right|, \end{aligned} \quad (2.68)$$

wobei  $L$  wie früher nach (2.66) definiert ist. Bezeichnen wir

$$z_k(t) = \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|,$$

und schreiben (2.68) in der folgenden Form um:

$$z_k(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z_{k-1}(s) ds \right|. \quad (2.69)$$

Erst schätzen wir die Funktion  $z_1(t) = \|x_1(t) - x_0(t)\|$  für  $t \in [t_0, \beta]$  ab, wie folgt:

$$z_1(t) = \left\| \int_{t_0}^t (A(s)x_0 + B(s)) ds \right\| \leq M(t - t_0),$$

wobei

$$M = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)x_0 + B(s)\| < \infty.$$

Es folgt aus (2.69), dass für  $t \in [t_0, \beta]$

$$\begin{aligned} z_2(t) &\leq LM \int_{t_0}^t (s - t_0) ds = LM \frac{(t - t_0)^2}{2}, \\ z_3(t) &\leq L^2 M \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^2}{2} ds = L^2 M \frac{(t - t_0)^3}{2 \cdot 3}, \\ &\dots \\ z_k(t) &\leq L^{k-1} M \frac{(t - t_0)^k}{k!} \leq \frac{(c(t - t_0))^k}{k!}, \end{aligned}$$

wobei  $c = \max(L, M)$ .

Mit dem gleichen Argument behandeln wir den Fall  $t \in [\alpha, t_0]$  und gewinnen die folgende Ungleichung

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!},$$

für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ . Da die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!}$$

konvergiert für alle reellen  $t$ , und zwar gleichmässig auf jedem beschränkten Intervall von  $t$ , auch die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|$$

konvergiert gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ . Daraus folgt, dass die Funktionenreihe mit Vektorwerten

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t))$$

konvergiert gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ .<sup>7</sup> Da die Partialsummen dieser Reihe gleich  $x_k(t) - x_0$  sind, gewinnen wir, dass die Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}$  gleichmäßig auf  $[\alpha, \beta]$  konvergiert. Bezeichnen wir

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t).$$

---

<sup>7</sup>Wir benutzen hier den folgenden Satz aus Analysis II (eine Version von Weierstraß-Satz). Sei  $\{f_k(t)\}$  eine Funktionenfolge auf einem Intervall  $[\alpha, \beta]$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ . Konvergiert die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(t)\|$$

Die Funktion  $x(t)$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$  als der Limes von einer gleichmäßig konvergierten Funktionenfolge von stetigen Funktionen. In der Identität (2.67), also

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds,$$

lassen wir  $k$  gegen unendlich gehen, und erhalten, dass der Grenzwert  $x(t)$  die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds \quad (2.70)$$

(das Integralzeichen und der Limes sind vertauschbar auf jedem kompakten Intervall). Wir behaupten, dass  $x(t)$  das Anfangswertproblem (2.8) auf  $[\alpha, \beta]$  löst. Da die rechte Seite von (2.70) eine differenzierbare Funktion von  $t$  ist, so ist  $x(t)$  auch differenzierbar, und

$$x' = \frac{d}{dt} \left( x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds. \right) = A(t)x(t) + B(t).$$

Schließlich, es ist klar von (2.70), dass  $x(t_0) = x_0$ . Deshalb löst  $x(t)$  das Anfangswertproblem (2.8) auf  $[\alpha, \beta]$ .

Jetzt definieren wir eine Lösung auf ganzem Intervall  $I$ . Es gibt eine wachsende Folge von beschränkten geschlossenen Intervallen  $\{[\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{\infty}$ , derart, dass ihre Vereinigung gleich  $I$  ist; wir nehmen auch an, dass  $t_0 \in [\alpha_i, \beta_i]$  für alle  $i$ . Bezeichnen mit  $x_i(t)$  eine Lösung von (2.8) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ . Dann ist  $x_{i+1}(t)$  auch eine Lösung von (2.8) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ , und nach Eindeutigkeit des 1. Teils gewinnen wir, dass  $x_{i+1}(t) = x_i(t)$  auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ ; also, in der Folge  $\{x_i(t)\}$  ist jede Funktion eine Fortsetzung der vorangehenden Funktion. Daraus folgt, dass the Funktion

$$x(t) := x_i(t) \text{ für } t \in [\alpha_i, \beta_i]$$

wohldefiniert für alle  $t \in I$  ist, und deshalb  $x(t)$  eine Lösung von Anfangswertproblem (2.8) auf  $I$  ist. ■

Der Beweis von der Existenz der Lösung führt zur folgenden Methode für Bestimmung der Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems (2.8). Man definiert eine Folge von *Näherungslösungen*  $x_k(t)$  nach den Regeln

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv x_0, \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_k(s) + B(s)) ds. \end{aligned}$$

Diese Folge  $\{x_k(t)\}$  heißt die *Picarditeration*. Nach dem Beweis von Satz 2.3 konvergiert die Folge  $\{x_k(t)\}$  gegen die Lösung  $x(t)$  für alle  $t \in I$ , und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall  $[\alpha, \beta] \subset I$ .

---

gleichmäßig auf  $[\alpha, \beta]$ , so konvergiert auch die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(t),$$

auch gleichmäßig auf  $[\alpha, \beta]$ .

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t x_k(s) ds$$

gegeben. Da  $x_0(t) \equiv 1$ , erhalten wir induktiv

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_0 ds = 1 + t,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1 ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t x_2 dt = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

usw., so dass

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

Da  $x_k(t)$  die partiellen Summen der Exponentialreihe sind, erhalten wir, dass  $x_k(t) \rightarrow e^t$  für  $k \rightarrow \infty$  und somit die Funktion  $x(t) = e^t$  die Lösung ist (was uns schon bekannt ist) – siehe Fig. 16.

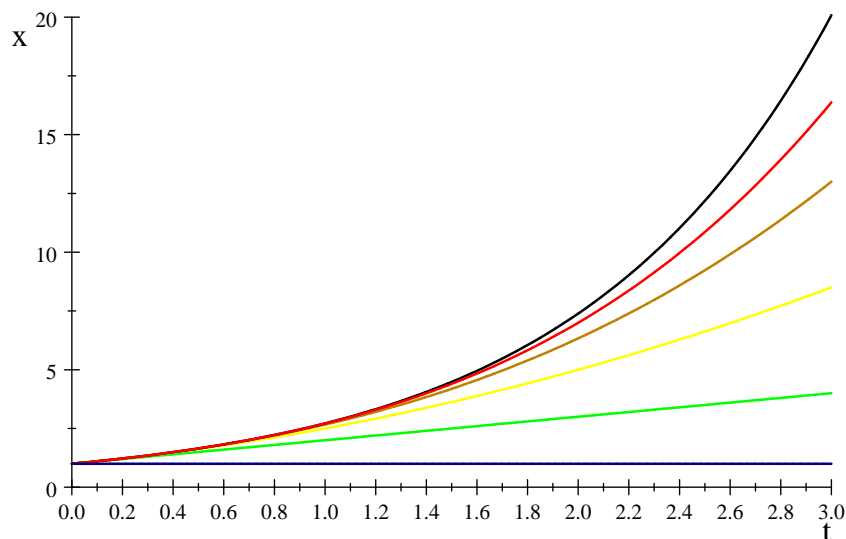


Figure 16: Näherungslösungen  $x_k(t)$  für  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  und die exakte Lösung  $x(t) = e^t$

### 2.3.6 Die DGLen 2-ter Ordnung mit periodischer Störfunktion

Betrachten wir eine DGL 2-ter Ordnung

$$x'' + px' + qx = f(t), \quad (2.71)$$

die in vielen Anwendungen in Physik vorkommt.

Z.B., wie wir es schon gesehen haben, beschreibt (2.71) die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchen, sowie die Stromschwingung in einem  $RLC$ -Stromkreis (Fig. 17).

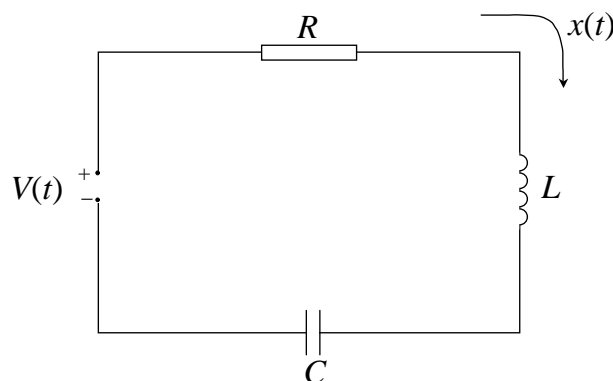


Figure 17:  $RLC$ -Stromkreis

Seien  $R$  der Widerstandswert,  $L$  die Induktivität und  $C$  die Kapazität im Stromkreis. Seien  $V(t)$  die Spannung der Stromquelle und  $x(t)$  der Strom im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir haben gesehen, dass  $x(t)$  die folgende DGL erfüllt:

$$Lx'' + Rx' + \frac{x}{C} = V'.$$

Angenommen  $L \neq 0$ , ergibt Dividieren durch  $L$  die DGL (2.71), wobei  $p = R/L$ ,  $q = 1/(LC)$ , und  $f = V'/L$ .

Wir benutzen den Satz 2.10 um die folgende DGL zu untersuchen

$$x'' + px' + qx = A \sin \omega t, \quad (2.72)$$

wobei  $A, \omega$  gegebene positive Konstanten sind. Physikalisch stellt die Störfunktion  $f(t) = A \sin \omega t$  eine externe periodische Kraft dar. Die Zahl  $A$  heißt die *Amplitude* von der Störfunktion und  $\omega$  heißt die *Frequenz* oder die *Aussenfrequenz*. Im Fall von Stromkreis modelliert diese Störfunktion eine periodische Spannung mit der Frequenz  $\omega$ . Z.B., der Wechselstrom in den Steckdosen hat die Frequenz 50 Hz, die den Wert  $\omega = 2\pi \cdot 50$  entspricht.

Wir nehmen an, dass  $p \geq 0$  und  $q > 0$  und betonen, dass diese Voraussetzungen in physikalischen Anwendungen erfüllt sind. Bestimmen wir eine spezielle Lösung von (2.72). Da  $\sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$ , betrachten wir zuerst die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + px' + qx = Ae^{i\omega t}. \quad (2.73)$$

Sei  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  das charakteristische Polynom.

**Nicht-resonanter Fall.** Erst betrachten wir den nicht-resonanten Fall, wenn  $i\omega$  keine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist. Für den Lösungsansatz  $x(t) = ce^{i\omega t}$  erhalten wir nach Lemma 2.9 (oder Satz 2.10):

$$c = \frac{A}{P(i\omega)} = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} =: a + bi. \quad (2.74)$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.73)

$$(a + ib)e^{i\omega t} = (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + i(a \sin \omega t + b \cos \omega t).$$

Der Imaginärteil davon liefert die spezielle Lösung von (2.72)

$$x_0(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (2.75)$$

Diese Lösung kann auch in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$x_0(t) = B \cos \varphi \sin \omega t + B \sin \varphi \cos \omega t = B \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei die Konstanten  $B$  und  $\varphi$  mit den Konstanten  $a$  und  $b$  gemäß der folgenden Gleichungen verknüpft sind:

$$B \cos \varphi = a, \quad B \sin \varphi = b.$$

Die Konstante  $B$  heißt *Amplitude* und  $\varphi$  die *Phase* oder der *Phasenwinkel* der Lösung. Quadrieren und Addieren der Gleichungen ergibt

$$B = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = \frac{A}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + \omega^2 p^2}}. \quad (2.76)$$

Dann bestimmt man eindeutig den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  durch  $\cos \varphi = a/B$  und  $\sin \varphi = b/B$ .

Um die allgemeine Lösung von (2.72) zu bestimmen, müssen wir noch zu (2.75) die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (2.77)$$

zu addieren. Seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Nullstelle von  $P(\lambda)$ , also

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachten wir die verschiedenen Fällen.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reell.

Da  $p \geq 0$  und  $q > 0$ , gilt  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Die allgemeine Lösung der homogenen DGL (2.77) ist nach Satz 2.7

$$x_h(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

In den beiden Fällen hat  $x(t)$  eine exponentielle Abnahme für  $t \rightarrow \infty$ . Somit hat die allgemeine Lösung von (2.72) die Form

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + O(e^{-\varepsilon t}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad (2.78)$$

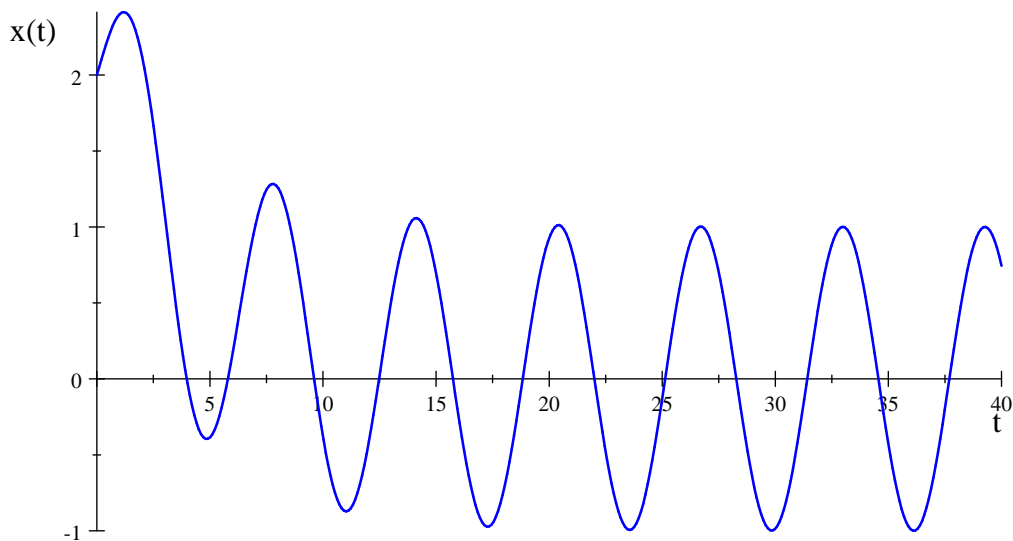


Figure 18: Die Funktion  $\sin t + 2e^{-t/4}$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

mit einem  $\varepsilon > 0$ . We sehen, dass für  $t \rightarrow \infty$  stellt die Funktion  $B \sin(\omega t + \varphi)$  den Hauptterm der Lösung  $x(t)$  dar (vgl. z.B. Fig. 18). Für den Stromkreis bedeutet es, dass der Strom für  $t \rightarrow \infty$  mit der Aussenfrequenz  $\omega$  oszilliert.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind nicht-reell. Seien  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  wobei

$$\alpha = -p/2 \leq 0 \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) = C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

wobei  $C$  und  $\psi$  beliebige reelle Konstanten sind. Die Zahl  $\beta$  heißt die *Eigenfrequenz* der DGL bzw des physikalischen Systems. Im Fall des Stromkreises, nennt man  $\beta$  auch *Kreisfrequenz*, da ohne Störfunktion oszilliert der Strom im Stromkreis mit der Frequenz  $\beta$ .

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.72)

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Betrachten zwei weitere Unterfälle.

Ist  $\alpha < 0$ , so ist der Hauptterm  $B \sin(\omega t + \varphi)$  und die allgemeine Lösung erfüllt wieder (2.78) (vgl. Fig. 19).

Ist  $\alpha = 0$ , so gelten  $p = 0$ ,  $q = \beta^2$ , und die DGL (2.72) wird

$$x'' + \beta^2 x = A \sin \omega t. \tag{2.79}$$

Da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gleich  $\pm i\beta$  sind, bedeutet die Voraussetzung "iω keine Nullstelle ist", dass  $\omega \neq \beta$ . Da die allgemeine Lösung der homogenen

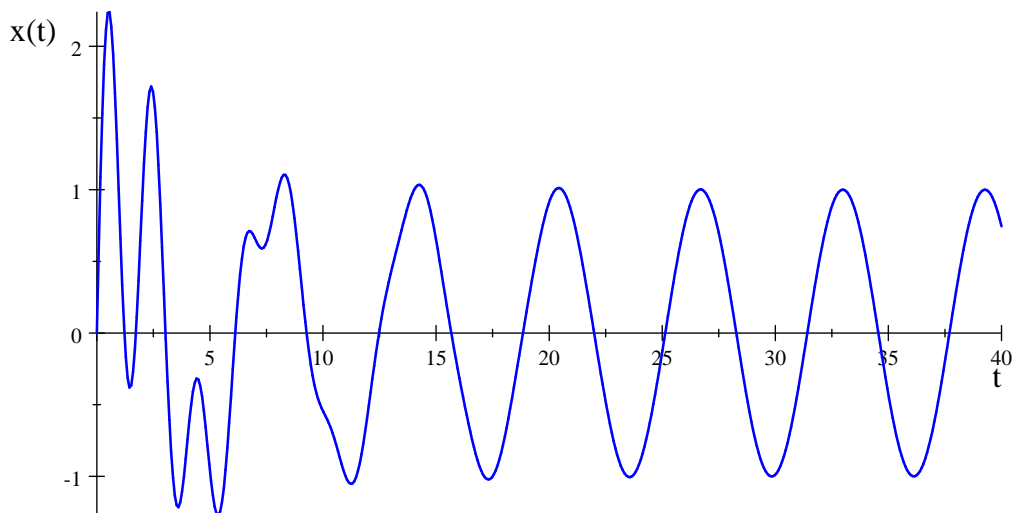


Figure 19: Funktion  $x(t) = \sin t + 2e^{-t/4} \sin \pi t$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

DGL  $x'' + \beta^2 x = 0$  durch  $x_h(t) = C \sin(\beta t + \psi)$  gegeben ist, erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.79) wie folgt:

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + C \sin(\beta t + \psi).$$

Diese Funktion ist offensichtlich eine Überlagerung von zwei Sinuswellen mit verschiedenen Frequenzen – die Eigenfrequenz und Aussenfrequenz. Sind  $\omega$  und  $\beta$  inkommensurabel, so ist  $x(t)$  nicht periodisch, vorausgesetzt  $C \neq 0$  (vgl. Fig. 20).

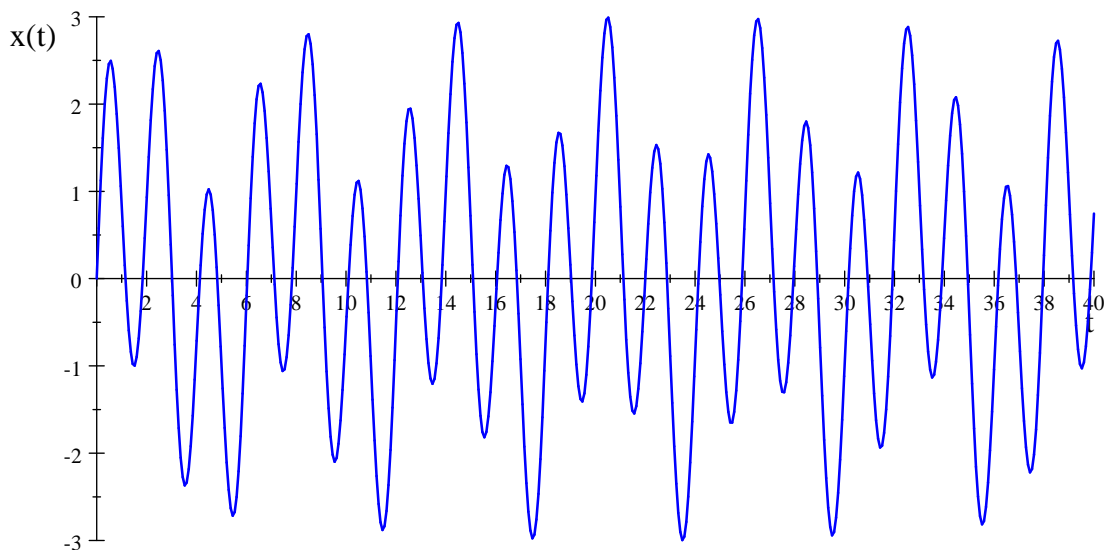


Figure 20: Die Funktion  $\sin t + 2 \sin \pi t$  ist nicht periodisch, aber sieht fast wie periodisch aus.

In einem Stromkreis tritt sich dieser Vorgang nur dann ein, wenn der Widerstandswert  $R$  verschwindet, weil  $p = R/L$  und  $p$  muss 0 sein. Natürlich in den praktischen Stromkreisen hat man immer



$R > 0$  so dass der Vorgang nur ungefähr und nur für beschränkten Werten von  $t$  eintreten kann.

Jetzt betrachten wir wieder die Formel (2.76) für die Amplitude  $B$  und nehmen wir an, dass die Aussenfrequenz  $\omega$  verändert werden kann, wobei die Amplitude  $A$  konstant ist. Stellen wir die folgende Frage: für welchen Wert der Aussenfrequenz  $\omega$  ist die Amplitude  $B = B(\omega)$  maximal? Es folgt aus (2.76), dass

$$B(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^4 + (p^2 - 2q)\omega^2 + q^2}},$$

und wir sehen, dass  $B$  maximal genau dann ist, wenn der Nenner minimal ist. Ist  $p^2 \geq 2q$ , dann ist der Nenner minimal für  $\omega = 0$ , was physikalisch nicht sehr interessant ist. Nehmen wir jetzt an, dass  $p^2 < 2q$  (insbesondere haben wir in diesem Fall  $p^2 < 4q$  und somit sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nicht reell). Dann wird der maximale Wert von  $B$  am folgenden Wert von  $\omega$  angenommen:

$$\omega^2 = -\frac{1}{2}(p^2 - 2q) = q - \frac{p^2}{2}.$$

Der Wert

$$\omega_0 := \sqrt{q - \frac{p^2}{2}}$$

heißt die *Resonanzfrequenz*. Ein Beispiel von Funktion  $B = B(\omega)$  ist auf Fig. 21 gezeichnet, wo man sieht, dass der Graph von  $B(\omega)$  neben der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ziemlich scharf ist. Hat die externe Kraft die *Resonanzfrequenz*, also gilt  $\omega = \omega_0$ , dann ist die Wirkung der Kraft auf das System maximal.

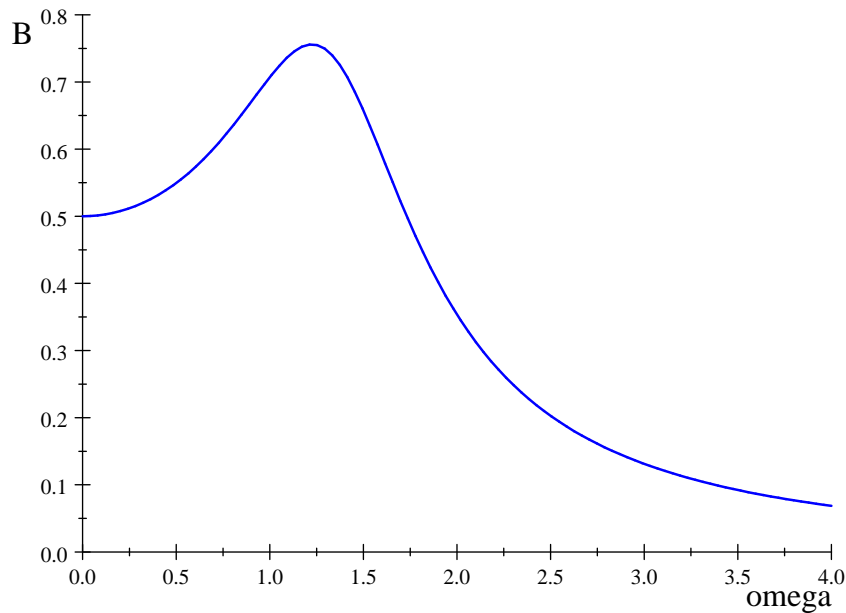


Figure 21: Funktion  $B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}}$  für  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $A = 1$

Um den maximalen Wert  $B_{\max}$  von  $B(\omega)$  zu bestimmen, benutzen wir die Eigenfrequenz

$$\beta = \sqrt{q - p^2/4}$$

und schreiben

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + q^2}} = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2 - \omega_0^4}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + p^2\beta^2}}, \end{aligned}$$

weil

$$q^2 - \omega_0^4 = q^2 - \left(q - \frac{p^2}{2}\right)^2 = qp^2 - \frac{p^4}{4} = p^2\beta^2.$$

Daraus folgt, dass

$$B_{\max} = \frac{A}{p\beta}.$$

Betrachten wir ein Beispiel. Die DGL

$$x'' + 6x' + 34x = \sin \omega t,$$

hat die Eigenfrequenz  $\beta = \sqrt{q - p^2/4} = 5$  und die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{q - p^2/2} = 4$ . Die maximale Amplitude ist

$$B_{\max} = \frac{A}{p\beta} = \frac{1}{30}.$$

Im Fall  $\omega = \omega_0 = 4$  erhalten wir nach (2.74)

$$c = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} = \frac{1}{-4^2 + 24i + 34} = \frac{1}{50} - \frac{2}{75}i,$$

und die spezielle Lösung (2.75) ist

$$x_0(t) = \frac{1}{50} \sin 4t - \frac{2}{75} \cos 4t,$$

mit der Amplitude  $1/30 = 0,0333\dots$ . Im Fall  $\omega = 8$  erhalten wir

$$c = \frac{1}{-8^2 + 48i + 34} = -\frac{5}{534} - \frac{4}{267}i,$$

und die spezielle Lösung ist

$$x_0(t) = -\frac{5}{534} \sin 8t - \frac{4}{267} \cos 8t,$$

mit der Amplitude  $B = |c| \approx 0,0177$ . Man kann die beiden Funktionen auf Fig. 22 vergleichen.

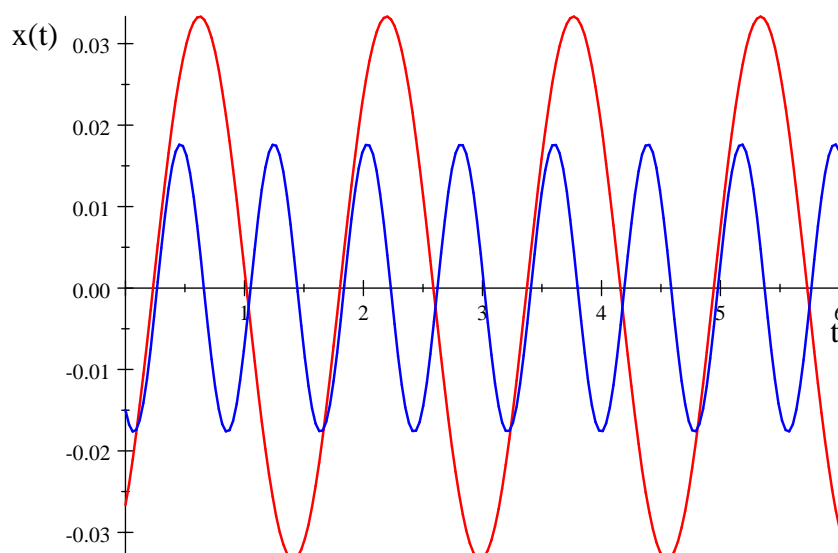


Figure 22: Zwei spezielle Lösungen für den Fälle  $\omega = 4$  bzw  $\omega = 8$

**Resonanter Fall.** Betrachten wir jetzt den resonanten Fall, wenn  $i\omega$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, also

$$(i\omega)^2 + pi\omega + q = 0.$$

Daraus folgt, dass  $p = 0$  und  $q = \omega^2$ , und die DGL (2.72) wird

$$x'' + \omega^2 x = A \sin \omega t. \quad (2.80)$$

In diesem Fall haben wir  $\alpha = 0$  und  $\omega = \omega_0 = \beta = \sqrt{q}$ . Die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + \omega^2 x = Ae^{i\omega t} \quad (2.81)$$

hat einen Lösungsansatz

$$x(t) = cte^{i\omega t},$$

wobei die Konstante  $c$  nach Satz 2.10 bestimmt werden kann:

$$c = \frac{A}{P'(i\omega)} = \frac{A}{2i\omega} = -\frac{Ai}{2\omega}$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.81)

$$x(t) = -\frac{Ai}{2\omega} te^{i\omega t} = -i\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + \frac{At}{2\omega} \sin \omega t.$$

Der Imaginärteil liefert die spezielle Lösung von (2.80)

$$x_0(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t,$$

und die allgemeine Lösung von (2.80) ist wie folgt:

$$x(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + C \sin(\omega t + \psi), \quad (2.82)$$

mit beliebigen Konstanten  $C$  und  $\psi$ . Ein Beispiel von Funktion (2.82) wird auf Fig. 23 gezeichnet.

Dieses Phänomen heißt der *Resonanzfall*: die Aussenfrequenz  $\omega$ , die Eigenfrequenz  $\beta$  und die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  sind alle gleich. Im Resonanzfall wächst die Amplitude der Lösung unbeschränkt für  $t \rightarrow \infty$ . Da eine unbeschränkte Schwingung physikalisch unmöglich ist, wird das System durch die großen Schwingungen schließlich zerstört (oder man findet, dass das mathematische Modell nicht geeignet ist).

## 2.4 Der Raum von Lösungen linearer Normalsystemen

Betrachten wir ein lineares Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.83)$$

wobei die Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind, sowie auch das entsprechende *homogene* Normalsystem:

$$x' = A(t)x. \quad (2.84)$$

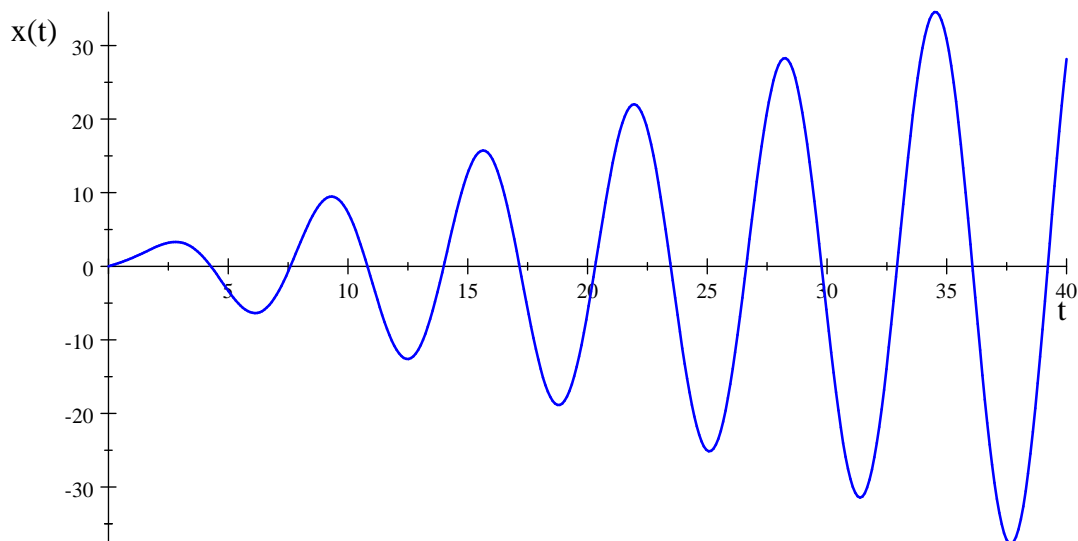


Figure 23: Die Funktion  $x(t) = -t \cos t + 2 \sin t$

Bezeichnen wir mit  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.84) auf  $I$  (also  $L$  ist die allgemeine Lösung von (2.84)).

**Behauptung.**  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Betrachten erst die Menge  $\mathcal{F}$  von allen Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es ist klar, dass  $\mathcal{F}$  ein Vektorraum ist, mit Operationen Addition von Funktionen und Multiplikation mit einem Skalar. Das Nullelement von  $\mathcal{F}$  ist die konstante Funktion 0. Offensichtlich ist die allgemeine Lösung  $L$  eine Teilmenge von  $\mathcal{F}$ . Wir müssen beweisen, dass  $L$  ein Unterraum von  $\mathcal{F}$  ist, d.h.

(i)  $0 \in L$

(ii)  $x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Addition)

(iii)  $x \in L, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Multiplikation)

Die Bedingung (i) ist offensichtlich, weil die Funktion  $x(t) \equiv 0$  eine Lösung von (2.84) ist.

Die Bedingung (ii) folgt aus der Identität

$$(x + y)' = x' + y' = Ax + Ay = A(x + y),$$

und (iii) folgt von  $(cx)' = cx' = A(cx)$ . Deshalb ist  $L$  ein Unterraum. ■

Der folgende Satz ist analog zum Satz 2.5 und Lemma 2.8.

**Satz 2.15** (a) *Es gilt  $\dim L = n$ . Folglich ist die allgemeine Lösung des homogenen Normalsystems (2.84) durch die folgende Identität gegeben*

$$x_h(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad (2.85)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.84) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

(b) *Sei  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung des inhomogenen Normalsystems (2.83). Dann ist die allgemeine Lösung von (2.83) durch die folgende Identität gegeben:*

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad (2.86)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  sind wie im Teil (a).

**Beweis.** (a) Wählen wir eine beliebige (aber feste) Stelle  $t_0 \in I$  und definieren eine Abbildung  $\Phi : L \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$\Phi(x) = x(t_0), \quad (2.87)$$

d.h.  $\Phi$  ist die Auswertung der Lösung  $x(t)$  an der Stelle  $t_0$ . Offensichtlich ist  $\Phi$  eine lineare Abbildung. Nach Satz 2.3 ist die Abbildung (2.87) bijektiv, da für jeden Wert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung  $x(t)$  existiert mit  $x(t_0) = x_0$ , d.h.  $\Phi(x) = x_0$ . Somit ist  $\Phi$  ein linearer Isomorphismus zwischen  $L$  und  $\mathbb{R}^n$ . Daraus folgt, dass  $L$  und  $\mathbb{R}^n$  linear isomorph sind und somit  $\dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängige Lösungen von (2.84), dann stellt die Folge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis in  $L$  dar. Folglich ist jede Funktion von  $L$  eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$ , was zu beweisen war.

(b) Wir behaupten folgendes: eine Funktion  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  löst (2.83) genau dann, wenn die Funktion  $y(t) = x(t) - x_0(t)$  (2.84) löst. In der Tat ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} (y + x_0)' &= A(y + x_0) + B, \\ y' + x_0' &= Ay + Ax_0 + B, \\ y' &= Ay, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $x_0' = Ax_0 + B$ . Nach Teil (a) ist  $y$  eine Lösung von  $y' = Ay$  genau dann, wenn

$$y = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t). \quad (2.88)$$

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung  $x = x_0 + y$  von (2.83) durch (2.86) gegeben ist. ■

**Korollar 2.16** Sei  $t_0 \in I$  eine beliebige Stelle. Eine Folge  $x_1(t), \dots, x_k(t)$  von Lösungen von (2.84) ist genau dann linear unabhängig, wenn die Folge von Vektoren  $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$  linear unabhängig ist.

**Beweis.** Das folgt aus der Bemerkung, dass die lineare Unabhängigkeit durch den Isomorphismus  $\Phi$  aus (2.87) bewahrt wird. ■

Wir betonen, dass für allgemeine Funktionen Korollar 2.16 nicht gilt: es kann sein, dass die Funktionen  $x_1, x_2$  unabhängig sind, während die Vektoren  $x_1(t_0), x_2(t_0)$  abhängig sind.

**Beispiel.** Betrachten wir den Fall  $n = 2$  und das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (2.89)$$

Später lernen wir, wie man solche Systeme lösen kann, aber jetzt führen wir das System auf eine skalare DGL 2-ter Ordnung zurück. Bezeichnen wir mit  $X_1, X_2$  die Komponenten von  $x$  so dass  $x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  und (2.89) wird

$$\begin{cases} X_1' = -X_2 \\ X_2' = X_1. \end{cases}$$

Daraus folgt  $X_1'' = -X_2' = -X_1$  und somit

$$X_1'' + X_1 = 0.$$

Nehmen wir zwei unabhängige Lösungen:

1.  $X_1 = \cos t$  und  $X_2 = -X_1' = \sin t$
2.  $X_1 = -\sin t$  und  $X_2 = \cos t$ .

Daher erhalten wir zwei unabhängige Lösungen von (2.89)

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Nach Korollar 2.16 sind die Vektoren  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  unabhängig für jedes  $t$ . Das folgt auch aus der folgenden Identität:

$$\det(x_1 \mid x_2) = \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

wobei  $(x_1 \mid x_2)$  eine Matrix mit den Spaltenvektoren  $x_1$  und  $x_2$  bezeichnet.

Betrachten wir jetzt zwei anderen Vektorfunktionen

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

die offensichtlich auch linear unabhängig sind als Funktionen. Jedoch haben wir für  $t = \pi/4$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = x_2(t)$$

so dass die Vektoren  $x_1(\pi/4)$  und  $x_2(\pi/4)$  abhängig sind. Folglich können die Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  das gleiche System  $x' = A(t)x$  nicht lösen.

**Bemerkung.** Man kann genauso komplexwertige Normalsysteme betrachten. In diesem Fall werden die Koeffizienten  $A(t)$  und  $B(t)$  definiert als die stetige Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ , und  $x(t)$  ist eine gesuchte Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^n$ . Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.3: für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = Ax + B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.90)$$

eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ; darüber hinaus ist die Lösung von (2.90) eindeutig auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ , das  $t_0$  enthält. Man kann diese Behauptung entweder direkt beweisen, genauso wie Satz 2.3, oder aus Satz 2.3 gewinnen durch Identifizierung von  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$  wie folgt. Stellen wir  $x(t)$  dar wie  $x(t) = X(t) + iY(t)$  wobei  $X(t)$  und  $Y(t)$   $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktionen sind, und analog schreiben  $A(t) = A_1(t) + iA_2(t)$ ,  $B(t) = B_1(t) + iB_2(t)$  mit reellwertigen  $A_j, B_j$ . Dann ist die Gleichung  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$(X + iY)' = (A_1 + iA_2)(X + iY) + (B_1 + iB_2)$$

und somit zu

$$\begin{cases} X' = A_1 X - A_2 Y + B_1 \\ Y' = A_2 X + A_1 Y + B_2 \end{cases} \quad (2.91)$$

Bezeichnen wir mit  $\tilde{B}$  die  $\mathbb{R}^{2n}$ -wertige Funktion  $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , und mit  $\tilde{A}$  die  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ -wertige Funktion wie folgt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (2.91) äquivalent zur DGL

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = \tilde{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \tilde{B}. \quad (2.92)$$

Da (2.92) ein lineares Normalsystem der Dimension  $2n$  mit reellwertigen Koeffizienten ist, nach Satz 2.3 hat das Anfangswertproblem für (2.92) eine eindeutige Lösung, woraus gleiches für (2.90) folgt.

Somit gelten auch Satz 2.15 und Korollar 2.16 für die komplexwertigen Systeme, vorausgesetzt, dass die Räume von Lösungen über den Körper  $\mathbb{C}$  betrachtet werden und die beliebigen Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  komplexwertig sind.

## 2.5 Variation der Konstanten

Betrachten wir wieder das inhomogene Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.93)$$

mit stetigen Koeffizienten  $A(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir führen hier ein Verfahren zur Bestimmung die allgemeine Lösung von (2.93) ein, vorausgesetzt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $x' = A(t)x$  bekannt ist. Den speziellen Fall für  $n = 1$  haben wir schon im Abschnitt 1.4 betrachtet (vgl. Satz 1.4).

Gegeben seien  $n$  linear unabhängige Lösungen  $x_1, \dots, x_n$  von  $x' = A(t)x$ , betrachten wir die *Fundamentalmatrix*

$$X(t) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline & & & & \end{array} \right), \quad (2.94)$$

wobei die  $k$ -te Spalte durch den Spaltenvektor  $x_k(t)$  gegeben ist, für alle  $k = 1, \dots, n$ . Wie schreiben die  $n \times n$  Matrix (2.94) kurz in der Form

$$X(t) = (x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n).$$

Nach Korollar 2.16 sind die Spalten von  $X(t)$  linear unabhängig für jedes  $t \in I$ , woraus folgt, dass  $\det X(t) \neq 0$  und somit die inverse Matrix  $X^{-1}(t)$  für alle  $t \in I$  definiert ist. Man benutzt  $X$  und  $X^{-1}$ , um das inhomogene Normalsystem (2.93) wie folgt zu lösen.

**Satz 2.17** Die allgemeine Lösung des Systems (2.93) ist durch die Identität

$$x(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.95)$$

gegeben.

Zunächst beweisen wir eine Behauptung.

**Behauptung.** Seien  $x_1, \dots, x_m$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  und  $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$ . Dann gilt die Identität

$$C_1 x_1 + \dots + C_m x_m = XC, \quad (2.96)$$

wobei  $X$  die  $n \times m$  Matrix mit Spalten  $x_1, \dots, x_m$  ist und  $C$  der Spaltenvektor mit Komponenten  $C_1, \dots, C_m$ .

**Beweis.** Sei  $x_{ik}$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $x_k$ . Dann hat die Matrix  $X$  die Elemente  $x_{ik}$  wobei  $i$  der Zeilenindex ist und  $k$  der Spaltenindex. Nach Definition des Produktes von Matrizen erhalten wir

$$(XC)_i = \sum_{k=1}^m x_{ik} C_k = \left( \sum_{k=1}^m C_k x_k \right)_i$$

woraus (2.96) folgt. ■

Man kann die Identität (2.96) etwas ausführlicher darstellen wie folgt:

$$\left( \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{|c|} \hline x_n \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} = C_1 x_1 + \dots + C_m x_n$$

**Beweis von Satz 2.17.** Da für jedes  $t \in I$  die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig sind, kann jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^n$  als eine Linearkombination von den Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  dargestellt werden. Insbesondere gilt es für den Vektor  $x(t)$ , wobei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige Funktion ist. Somit existieren die reellwertigen Funktionen  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  auf  $I$ , derart, dass die folgende Identität

$$x(t) = C_1(t) x_1(t) + \dots + C_n(t) x_n(t) \quad (2.97)$$

für alle  $t \in I$  gilt. Bezeichnen wir mit  $C(t)$  den Spaltenvektor mit den Komponenten  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  und umschreiben die Identität (2.97) nach (2.96):

$$x(t) = X(t) C(t).$$

Daraus folgt, dass

$$C(t) = X^{-1}(t) x(t)$$



gilt und die Funktion  $C(t)$  nach  $t$  differenzierbar ist, vorausgesetzt, dass  $x(t)$  differenzierbar ist<sup>8</sup>. Durch Ableitung von (2.97) erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= C_1 x_1' + C_2 x_2' + \dots + C_n x_n' \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= C_1 A x_1 + C_2 A x_2 + \dots + C_n A x_n \quad (\text{benutzt } x_k' = A x_k) \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= A(C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n) \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= Ax + XC'. \end{aligned}$$

Deshalb ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$XC' = B. \tag{2.98}$$

Durch Lösung dieser Gleichung bezüglich  $C'$  erhalten wir

$$C' = X^{-1}B,$$

und somit

$$C(t) = \int X^{-1}(t) B(t) dt,$$

und

$$x(t) = XC = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt,$$

was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Die Bezeichnung ‘‘Variation der Konstanten’’ kommt aus der Identität (2.97), wo man die Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  aus dem Ausdruck

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

für die Lösung der *homogenen* DGL variieren lässt, d.h. durch die Funktionen ersetzt, und somit die Lösung der *inhomogenen* DGL bestimmt.

**Zweiter Beweis von Satz 2.17.** Bemerken zunächst, dass die Fundamentalmatrix  $X$  die folgende DGL

$$X' = AX \tag{2.99}$$

erfüllt, weil jeder Spaltenvektor  $x_k$  von  $X$  die ähnliche Gleichung  $x_k' = Ax_k$  erfüllt. Durch Ableitung von (2.95) nach  $t$  und mit Hilfe von Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= X'(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt + X(t) (X^{-1}(t) B(t)) \\ &= AX \int X^{-1} B(t) dt + B(t) \\ &= Ax + B(t). \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Die Funktion  $X^{-1}(t)$  ist immer nach  $t$  differenzierbar, da die Komponenten von  $X^{-1}(t)$  rationale Funktionen der Komponenten von  $X(t)$  sind.

Deshalb löst  $x(t)$  das Normalsystem (2.93). Jetzt zeigen wir, dass (2.95) alle Lösungen liefert. Das Integral in (2.95) ist unbestimmt und somit kann in der Form

$$\int X^{-1}(t)B(t)dt = V(t) + C$$

dargestellt werden, wobei  $V(t)$  eine Stammfunktion und  $C = (C_1, \dots, C_n)$  ein konstanter Vektor ist. Es folgt aus (2.95), dass

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)V(t) + X(t)C \\ &= x_0(t) + C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t), \end{aligned}$$

wobei  $x_0(t) = X(t)V(t)$  eine Lösung von (2.93) ist. Nach Satz 2.15 erhalten wir, dass  $x(t)$  die allgemeine Lösung ist. ■

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Dieses System hat zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

wie es schon bemerkt wurde. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Betrachten jetzt die inhomogene DGL

$$x' = A(t)x + B(t)$$

wobei  $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ . Nach (2.95) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Z.B., nehmen wir  $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$  an und berechnen das Integral wie folgt:

$$\int \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ -\sin t - t \cos t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t + t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Skalare DGLen  $n$ -ter Ordnung.** Jetzt verwenden wir das Verfahren Variation der Konstanten zur Lösung der skalaren linearen ODE  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad (2.100)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Wir lösen (2.100) indem wir die DGL (2.100) auf ein Normalsystem zurückführen.

Wir wissen schon, dass (2.100) äquivalent zum Normalsystem

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t) \quad (2.101)$$

ist, wobei

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (2.102)$$

Bezeichnen mit  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  die entsprechenden Vektorfunktionen, die unabhängige Lösungen von  $x' = A(t)x$  sind, und betrachten die Fundamentalmatrix

$$X = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

Diese Matrix  $X$  heißt auch die Fundamentalmatrix von der DGL (2.102). Nach Satz 2.17 ist die allgemeine Lösung von (2.101) durch die Identität

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.104)$$

gegeben. Bezeichnen wir mit  $y_{ik}$  die Elemente von Matrix  $X^{-1}$ , also  $X^{-1} = (y_{ik})$ , wobei  $i$  der Zeilenindex und  $k$  der Spaltenindex sind. Sei  $y_k$  die  $k$ -te Spalte von  $X^{-1}$ . Nach (2.96) erhalten wir

$$X^{-1}B = 0y_1 + 0y_2 + \dots + fy_n = fy_n,$$

und nach (2.104)

$$\mathbf{x} = X(t) \int f(t) y_n(t) dt.$$

Bestimmen wir die Funktion  $x(t)$ , die die erste Komponente von  $\mathbf{x}$  ist. Man erhält  $x(t)$  als das Produkt von der ersten Zeile von  $X$  und dem Spaltenvektor  $\int f(t) y_n(t) dt$ , also

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt.$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 2.18** Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.102) und  $X$  die Fundamentalmatrix (2.103). Für jede stetige Funktion  $f(t)$  auf  $I$  ist die allgemeine Lösung von (2.100) durch die Identität

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt \quad (2.105)$$

gegeben, wobei  $y_{jk}$  die Elemente der inversen Matrix  $X^{-1}$  sind.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + x = f(t). \quad (2.106)$$

Die unabhängige Lösungen der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  sind  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$ , und deshalb ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Nach (2.105) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.106):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \int f(t) y_{12}(t) dt + x_2(t) \int f(t) y_{22}(t) dt \\ &= \cos t \int f(t) (-\sin t) dt + \sin t \int f(t) \cos t dt. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Z.B., für  $f(t) = \sin t$  erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \int \sin t (-\sin t) dt + \sin t \int \sin t \cos t dt \\ &= -\cos t \int \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \sin t \int \sin 2t dt \\ &= -\cos t \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1 \right) + \frac{1}{4} \sin t (-\cos 2t + C_2) \\ &= -\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{4} (\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ &= -\frac{1}{2}t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

Die gleiche Antwort kann auch mit Hilfe von Satz 2.10 gewonnen werden, da die Störfunktion  $\sin t$  ein Quasipolynom ist.

Betrachten ein anderes Beispiel von Störfunktion  $f(t) = \tan t$ , die kein Quasipolynom ist. In diesem Fall erhalten wir aus (2.107)<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} x &= \cos t \int \tan t (-\sin t) dt + \sin t \int \tan t \cos t dt \\ &= \cos t \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + \sin t \right) - \sin t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ &= \frac{1}{2} \cos t \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, wie man die Methode von Variation der Konstanten für DGL (2.106) direkt benutzen kann, ohne die Formel (2.105) zu erinnern. Zunächst bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  wie üblich:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad (2.108)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  sofern Konstanten sind. Man erhält den Lösungsansatz für (2.106) indem man die Konstanten  $C_k$  durch die Funktionen  $C_k(t)$  ersetzt:

$$x(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t. \quad (2.109)$$

Um die unbekanntenen Funktionen  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$  zu bestimmen, finden wir zwei Gleichungen für  $C_1$  und  $C_2$ . Durch Ableitung von (2.109) erhalten wir

$$\begin{aligned} x'(t) &= -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \\ &\quad + C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t, \end{aligned} \quad (2.110)$$

und wählen die erste Gleichung wie folgt:

$$C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0. \quad (2.111)$$

Die Motivation für (2.111) ist folgende. Betrachten wir wieder das entsprechende Normalsystem

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

mit der unbekanntenen Vektorfunktion  $\mathbf{x} = (x, x')$ . Das homogene System hat zwei unabhängige Lösungen  $\begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix}$ , die von den Lösungen  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$  der DGL  $x'' + x = 0$  entstehen. Deshalb ist der Lösungsansatz für (2.112) wie folgt:

$$\mathbf{x}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix},$$

---

<sup>9</sup>Das Integral  $\int \tan x \sin t dt$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$\int \tan x \sin t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \sin t,$$

wobei

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{d \sin t}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} + C.$$

deren Komponenten somit sind

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\x'(t) &= C_1(t) (\cos t)' + C_2(t) (\sin t)'.\end{aligned}$$

Ableiten die erste Zeile und Subtrahieren die zweite Zeile ergibt (2.111).

Ableiten von der ersten Zeile von (2.110) ergibt

$$\begin{aligned}x'' &= -C_1 \cos t - C_2 \sin t \\&\quad -C_1' \sin t + C_2' \cos t,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$x'' + x = -C_1' \sin t + C_2' \cos t.$$

Bemerken Sie, dass alle Terme mit  $C_1$  und  $C_2$  sich herauskürzen lassen. Somit erhalten wir die zweite Gleichung für  $C_1'$  und  $C_2'$ :

$$-C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t).$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t) \end{cases}$$

ergibt

$$C_1' = -f(t) \sin t, \quad C_2' = f(t) \cos t$$

und somit

$$C_1 = - \int f(t) \sin t dt, \quad C_2 = \int f(t) \cos t dt.$$

Einsetzen in (2.109) ergibt (2.107).

## 2.6 Wronski-Determinante und Liouvillesche Formel

Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ .

**Definition.** Sei  $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Vektorfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Man definiert die *Wronski-Determinante*  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det(x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_n(t)),$$

wobei die Matrix auf der rechten Seite aus den Spaltenvektoren  $x_1, \dots, x_n$  besteht.

Somit ist  $W(t)$  die Determinante von der  $n \times n$  Matrix. Man schreibt auch  $W_{x_1, \dots, x_n}(t)$  wenn die Abhängigkeit von  $x_1, \dots, x_n$  explizit gezeigt werden muss.

**Definition.** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Skalarfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $(n-1)$ -fach differenzierbar auf  $I$  sind. Man definiert die Wronski-Determinante  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Satz 2.19** (Liouvillesche Formel)

(a) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen des Normalsystems  $x' = A(t)x$ , wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig auf einem Intervall  $I$  ist. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau\right), \quad (2.113)$$

für alle  $t, t_0 \in I$ .

**Bemerkung.** Wir erinnern uns daran, dass die Spur  $\text{Spur } A$  der Matrix  $A$  gleich die Summe der Diagonalelementen dieser Matrix ist.

(b) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen der skalaren DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0,$$

wobei  $a_k(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right). \quad (2.114)$$

**Beweis.** (a) Bezeichnen wir mit  $x_{ij}$  die Elementen von der Matrix

$$X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n),$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex ist. Insbesondere gilt für  $j$ -te Spalte  $x_j$  von  $X$

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T,$$

und für  $i$ -te Zeile  $z_i$  von  $X$

$$z_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}).$$

Stellen wir  $\det X$  in der folgenden Form dar:

$$W(t) = \det X = \det \begin{pmatrix} \boxed{z_1} \\ \boxed{z_2} \\ \vdots \\ \boxed{z_n} \end{pmatrix}.$$

**Behauptung.** Die folgende Identität gilt für alle  $t \in I$ :

$$W'(t) = \det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

Für den Beweis benutzen wir die folgende Verallgemeinerung der Produktregel: seien  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$(f_1 \dots f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n, \quad (2.116)$$

die man durch Induktion nach  $n$  beweist. Ferner benutzen wir die Leibniz-Formel

$$W(t) = \det X = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \cdots x_{n\pi(n)}, \quad (2.117)$$

wobei  $S_n$  die Menge von allen Permutationen von Elementen  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\operatorname{sgn}(\pi)$  das Signum der Permutation  $\pi$  bezeichnet, d.h.  $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$  falls  $\pi$  gerade ist, und  $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$  falls  $\pi$  ungerade ist. Ableiten von (2.117) mit Hilfe von (2.116) ergibt

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x'_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \cdots x_{n\pi(n)} \\ &+ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{1\pi(1)} x'_{2\pi(2)} \cdots x_{n\pi(n)} \\ &+ \dots + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \cdots x'_{n\pi(n)}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Die erste Summe in (2.118) sieht genauso aus, wie die Summe in (2.117), abgesehen davon, dass die Elemente  $x_{1j}$  der ersten Zeile durch ihre Ableitungen ersetzt werden. Deshalb ist die erste Summe in (2.118) gleich

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

und das Gleiche gilt für alle andere Summen, woraus (2.115) folgt.

Da  $x_{ij}$  die  $j$ -te Komponente von  $z_i$  ist und gleichzeitig die  $i$ -te Komponente von  $x_j$ , das die DGL  $x'_j = Ax_j$  erfüllt, erhalten wir

$$(z'_i)_j = x'_{ij} = (x_j)_i' = (Ax_j)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_{kj} = \left( \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k \right)_j, \quad (2.119)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Koeffizienten  $A_{ik}$  von  $j$  nicht abhängen. Offensichtlich ergibt (2.119) die Gleichung

$$z'_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} z_k.$$

Z.B., es gilt

$$z'_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + \dots + A_{1n} z_n,$$

woraus folgt durch die Linearität der Determinante, dass

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A_{12} \det \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + A_{1n} \det \begin{pmatrix} z_n \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$



Bemerken wir, dass alle Determinanten auf der rechten Seite verschwinden, außer der ersten Determinante, da sie die gleichen Zeilen haben. Somit erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} W(t).$$

Analog berechnen wir die anderen Terme in (2.115) und erhalten

$$\begin{aligned} W'(t) &= (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) W(t) \\ &= (\text{Spur } A) W(t), \end{aligned} \tag{2.120}$$

d.h.  $W(t)$  löst eine lineare DGL 1er Ordnung. Gilt  $W(t) = 0$  für einen Wert von  $t$ , dann gilt  $W(t) \equiv 0$  für alle  $t$  nach Eindeutigkeit von Lösungen von Satz 2.3. In diesem Fall ist die Identität (2.113) trivial. Gilt  $W(t) \neq 0$  für alle  $t$ , dann lösen wir die trennbare DGL (2.120) indem wir durch  $W(t)$  dividieren und nach  $t$  integrieren. Es folgt, dass<sup>10</sup>

$$\ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = \int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau,$$

was äquivalent zu (2.113) ist.

(b) Die skalare DGL ist äquivalent zum Normalsystem  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Da  $W_{x_1, \dots, x_n} = W_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n}$  und  $\text{Spur } A = -a_1$ , (2.114) folgt aus (2.113). ■

Im Fall von skalaren DGLen 2-ter Ordnung

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

hilft die Liouvillesche Formel eine allgemeine Lösung zu bestimmen, falls eine spezielle Lösung gegeben ist. In der Tat, seien  $x_1(t)$  eine spezielle Lösung, die nie verschwindet, und  $x(t)$  eine andere Lösung. Dann nach (2.114) haben wir

$$W_{x_1, x}(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x \\ x_1' & x' \end{pmatrix} = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right),$$

und somit

$$x_1 x' - x x_1' = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right).$$

Da

$$\frac{x_1 x' - x x_1'}{x_1^2} = \left( \frac{x}{x_1} \right)',$$

---

<sup>10</sup>Wir betonen, dass  $W(t)$  und  $W(t_0)$  das gleiche Vorzeichen haben und somit ist ihr Verhältnis positive.

Dividieren durch  $x_1^2$  ergibt

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)' = \frac{C \exp\left(-\int a_1(t) dt\right)}{x_1^2}. \quad (2.121)$$

Somit kann die allgemeine Lösung  $x(t)$  durch Integration bestimmt werden.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' - 2(1 + \tan^2 t)x = 0.$$

Diese DGL hat eine Lösung  $x_1(t) = \tan t$ , dass aus der Identitäten

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \tan t = 2 \tan t (\tan^2 t + 1)$$

folgt. Somit erhalten wir aus (2.121)

$$\left(\frac{x}{\tan t}\right)' = \frac{C}{\tan^2 t},$$

woraus folgt durch Integration<sup>11</sup>

$$x = C \tan t \int \frac{dt}{\tan^2 t} = C \tan t (-t - \cot t + C_1).$$

Die Antwort kann auch in der Form

$$x(t) = c_1 \tan t + c_2 (t \tan t + 1)$$

geschrieben werden, wobei  $c_1 = CC_1$  und  $c_2 = -C$ .

## 2.7 Lösungsmethoden für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir ein Normalsystem

$$x' = Ax$$

wobei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ein konstanter Operator (bzw eine  $n \times n$  Matrix) ist und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine unbekannte Funktion. Nach Satz 2.15 ist die allgemeine Lösung dieses Systems durch Linearkombination von  $n$  unabhängige Lösungen gegeben. In diesem Abschnitt entwickeln wir die Methode für Bestimmung solcher Lösungen.

<sup>11</sup>Das Integral  $\int \frac{dt}{\tan^2 t} = \int \cot^2 t dt$  kann mit Hilfe von der Identität

$$(\cot t)' = -\cot^2 t - 1$$

bestimmt werden, die ergibt

$$\int \cot^2 t dt = -t - \cot t + C.$$

### 2.7.1 Spezieller Fall

Zunächst benutzen den folgenden Ansatz für Lösung:  $x = e^{\lambda t}v$  wobei  $v$  ein Nicht-Null-Vektor aus  $\mathbb{C}^n$  ist und  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Konstante. Einsetzen diesen Ansatz in DGL  $x' = Ax$  ergibt

$$\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av,$$

also  $Av = \lambda v$ . Erinnern wir uns daran, dass ein Nicht-Null-Vektor  $v$ , der die Gleichung  $Av = \lambda v$  erfüllt, als *Eigenvektor* von  $A$  bezeichnet wird. Der entsprechende Wert von  $\lambda$  heißt der *Eigenwert*. Somit gilt folgendes.

**Behauptung.** Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t}v$  stellt eine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  dar genau dann, wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist.

Das Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist genau dann ein Eigenwert, wenn der Operator  $A - \lambda \text{id}$  nicht invertierbar ist, also wenn

$$\det(A - \lambda \text{id}) = 0, \quad (2.122)$$

wobei  $\text{id}$  den Identitätsoperator in  $\mathbb{C}^n$  bezeichnet. Diese Gleichung heißt die *charakteristische Gleichung* des Operators  $A$ . Sie kann benutzt werden, um die Eigenwerte zu bestimmen. Die Funktion

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda \text{id})$$

ist ein Polynom von  $\lambda$  von Grad  $n$ , und es heißt das *charakteristische Polynom* von  $A$ . Deshalb sind die Eigenwerte von  $A$  genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$ .

Ist ein Eigenwert  $\lambda$  schon bekannt, so kann ein Eigenvektor aus der folgenden Gleichung

$$(A - \lambda \text{id})v = 0 \quad (2.123)$$

bestimmt werden. Wir betonen, dass Eigenvektor auf jeden Fall nicht eindeutig ist, da mit jedem Eigenvektor  $v$  auch alle seine Vielfachen Eigenvektoren sind. Die Menge von allen Lösungen von (2.123) ist ein Unterraum, der ein *Eigenraum* heißt; bezeichnen wir ihn mit  $E_\lambda$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert, dann gilt  $\dim E_\lambda \geq 1$ . Man erhält genau  $k = \dim E_\lambda$  unabhängige Lösungen in der Form  $x(t) = e^{\lambda t}v$ , indem man  $k$  unabhängige Vektoren  $v$  in  $E_\lambda$  wählt.

**Satz 2.20** Hat ein Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \dots, e^{\lambda_n t}v_n \quad (2.124)$$

linear unabhängige Lösungen von  $x' = Ax$  dar. Somit ist die allgemeine Lösung dieses Normalsystems durch die Identität

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t}v_k \quad (2.125)$$

gegeben, wobei  $C_1, \dots, C_n$  beliebige komplexe Konstanten sind.

**Beweis.** Wir haben schon gesehen, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t}v_k$  eine Lösung ist. Da die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind, auch the Funktionen  $\{e^{\lambda_k t}v_k\}_{k=1}^n$  sind linear unabhängig, was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Folgendes ist aus linearer Algebra bekannt: hat der Operator  $A$   $n$  verschiedenen Eigenwerte, so sind die Eigenvektoren unbedingt unabhängig. In diesem Fall ist Satz 2.20 verwendbar. Noch ein Fall, wenn die Voraussetzungen von Satz 2.20 erfüllt sind, ist wenn der Operator  $A$  durch eine symmetrische reelle Matrix dargestellt wird. In diesem Fall existiert immer eine Basis von Eigenvektoren.

**Korollar 2.21** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und setzen wir vor, dass  $A$   $n$  verschiedenen Eigenwerte hat. Ist  $\lambda$  ein nicht-reeller Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $v$ , so ist  $\bar{\lambda}$  auch ein Eigenwert mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ , und die Funktionen  $e^{\lambda t}v, e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$  in der Identität (2.125) können durch die reellwertigen Funktionen  $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}v), \operatorname{Im}(e^{\lambda t}v)$  ersetzt werden. Nach Ersetzung in (2.125) von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda}t}$  mit nicht-reellen Nullstellen  $\lambda$  erhält man die allgemeine reelle Lösung mit beliebigen reellen Konstanten  $C_1, \dots, C_n$ .

**Beweis.** Gilt  $Av = \lambda v$ , so gilt durch die komplexe Konjugation auch

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v},$$

wobei benutzt man, dass die Koeffizienten der Matrix  $A$  reell sind. Somit ist  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ . Die Werten  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  sind verschiedene Elemente der Folge  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , z.B.  $\lambda = \lambda_k$  und  $\bar{\lambda} = \lambda_m$ . Da alle Eigenwerten einfach sind, es gilt  $v = \operatorname{const} v_k$  und  $\bar{v} = \operatorname{const} v_m$ . Deshalb können die Funktionen  $e^{\lambda_k t}v_k$  und  $e^{\lambda_m t}v_m$  in (2.125) durch die Funktionen  $u(t) = e^{\lambda t}v$  und  $\bar{u}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$  ersetzt werden. Da

$$u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u, \quad \bar{u} = \operatorname{Re} u - i \operatorname{Im} u$$

und somit

$$\operatorname{Re} u = \frac{u + \bar{u}}{2}, \quad \operatorname{Im} u = \frac{u - \bar{u}}{2i},$$

die Paare  $u, \bar{u}$  und  $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$  entstehen auseinander durch Lineartransformationen. Daraus folgt, dass die linearen Hüllen der beiden Paaren gleich sind, also

$$\operatorname{span}(u, \bar{u}) = \operatorname{span}(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u),$$

und deshalb sind diese Paare in jeder Basis austauschbar. ■

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

und schreiben es in der Vektorform um:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 - 1 = 0$ , und die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Für den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir aus (2.123) die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was nur eine unabhängige Gleichung  $a - b = 0$  liefert. Wählen  $a = 1$  ergibt  $b = 1$  und somit den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog für den Eigenwert  $\lambda_2 = -1$  erhalten wir die folgende Gleichung für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $a + b = 0$  ist. Daraus folgt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da  $v_1$  und  $v_2$  unabhängig sind, erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

also

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

Die Matrix des Systems ist  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 + 1 = 0$ , woraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$  sind. Für den Eigenwert  $\lambda_1 = i$  erhalten wir die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

die ist äquivalent zu  $ia + b = 0$ . Die Wahl  $a = i$  ergibt  $b = 1$  und

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die entsprechende Lösung

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}.$$

Die zweite komplexwertige Lösung braucht nicht bestimmt werden, da wir mit Hilfe von Korollar 2.21 zwei unabhängige reelle Lösungen erhalten:

$$\operatorname{Re} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und somit auch die allgemeine reelle Lösung

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \operatorname{Re} \mathbf{x}_1 + C_2 \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0. \end{cases}$$

Dieses System lässt sich sehr einfach lösen wie folgt:  $y = C_1$  und  $x = C_1 t + C_2$ , so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allerdings kann diese Antwort mit Hilfe von Satz 2.20 nicht erhalten werden. In der Tat ist die Matrix des Systems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2,$$

und die charakteristische Gleichung  $P(\lambda) = 0$  liefert nur einen Eigenwert  $\lambda = 0$ . Den Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  von  $\lambda = 0$  wird aus der folgenden Gleichung bestimmt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

woraus folgt  $b = 0$ . Deshalb erhalten wir nur einen Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und somit nur eine Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . In diesem Fall existiert keine Basis aus Eigenvektoren, und man braucht eine andere Methode.

## 2.7.2 Exponentialfunktion von Operatoren

Wir erinnern und daran, dass eine skalare DGL  $x' = Ax$ , wobei  $A$  eine Konstante ist, hat die allgemeine Lösung  $x(t) = Ce^{At}$ . In diesem Abschnitt definieren wir die Exponentialfunktion  $e^A$  für lineare Operatoren  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und benutzen sie um das Normalsystem  $x' = Ax$  zu lösen.

**Definition.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definieren wir einen Operator  $e^A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch die Identität

$$e^A = \text{id} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (2.126)$$

Man schreibt auch  $\exp(A) = e^A$ .

Um diese Definition zu begründen, müssen wir jedoch überprüfen, dass die Exponentialreihe (2.126) konvergiert. Da alle Potenzen  $A^k$  Elementen von  $\mathbb{C}^{n \times n}$  sind, versteht man die Konvergenz der Reihe (2.126) im Sinn von der Normtopologie von  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Satz 2.22** (a) Die Exponentialreihe konvergiert für alle  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

(b) Die allgemeine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  ist durch die Identität  $x = e^{tA}v$  gegeben, wobei  $v \in \mathbb{C}^n$  ein beliebiger Vektor ist.

**Beweis.** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = v, \end{cases} \quad (2.127)$$

wobei  $v \in \mathbb{C}$ . Nach Satz 2.3 existiert eine eindeutige Lösung  $x(t)$  auf  $\mathbb{R}$ , und

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t),$$

wobei die Folge  $\{x_k(t)\}$  die Picarditeration ist, die durch die Regeln

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv v, \\ x_{k+1}(t) &= v + \int_0^t Ax_k(s) ds \end{aligned}$$

gegeben ist. Nach Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v + tAv \\ x_2(t) &= v + tAv + \frac{t^2}{2}A^2v \\ &\dots \\ x_k(t) &= v + tAv + \frac{t^2}{2}A^2v + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k v \\ &\dots \end{aligned}$$

so dass

$$x_k(t) = \left( \text{id} + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^k}{k!} \right) v. \quad (2.128)$$

Da die linke Seite einen Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$  hat, konvergiert auch die rechte Seite. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$  (vgl. Abschnitt 2.1.3), insbesondere für  $t = 1$  die Konvergenz von (2.126), so dass  $e^A$  wohldefiniert ist. In der Identität (2.128) lassen wir  $k \rightarrow \infty$  und erhalten

$$x(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) v = e^{tA}v. \quad (2.129)$$

Somit ist die Funktion  $t \mapsto e^{tA}v$  die Lösung von Anfangswertproblem (2.127). Da jede Lösung  $x(t)$  durch den Anfangswert  $v = x(0)$  eindeutig definiert ist, stellt  $e^{tA}v$  die allgemeine Lösung dar. ■

**Korollar 2.23** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- (a) Die Matrix  $e^{tA}$  ist eine Fundamentalmatrix des Normalsystems  $x' = Ax$ .  
 (b) Die Funktion  $X(t) = e^{tA}$  erfüllt die DGL  $X' = AX$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Funktion  $x = x(t)$  nimmt die Werte wie üblich in  $\mathbb{C}^n$  an, während  $X(t)$  eine Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist. Da die Produkt  $AX$  von zwei Operatoren als ein linearer Operator  $X \mapsto AX$  im Vektorraum  $\mathbb{C}^{n \times n}$  betrachtet werden kann, ist die Gleichung  $X' = AX$  eine lineare DGL für  $\mathbb{C}^{n \times n}$ -wertige Funktion  $X$ .

**Beweis.** (a) Sei  $\{v_k\}_{k=1}^n$  die Standardbasis in  $\mathbb{C}^n$ . Betrachten wir die Lösungen  $x_1(t) = e^{tA}v_1, \dots, x_n(t) = e^{tA}v_n$  und bemerken folgendes:

1. Die Lösungen  $x_1, \dots, x_n$  sind unabhängig, da ihre Werten  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  unabhängig sind.

2. Der Spaltenvektor  $x_k(t) = e^{tA}v_k$  ist die  $k$ -te Spalte der Matrix  $e^{tA}$  in der Standardbasis, da  $v_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  nur ein 1 auf Platz  $k$  hat.

Somit besteht die Matrix  $e^{tA}$  aus den Spalten  $x_k(t)$ , die  $n$  unabhängige Lösungen darstellen. Nach Definition ist  $e^{tA}$  eine Fundamentalmatrix des Systems  $x' = Ax$ .

(b) Die Fundamentalmatrix  $X(t)$  erfüllt immer die DGL  $X' = AX$ , weil jeder Spaltenvektor  $x_k$  von  $X(t)$  die Gleichung  $x'_k = Ax_k$  erfüllt. ■

**Bemerkung.** Die Konvergenz von Exponentialreihe (2.126) kann auch direkt bewiesen werden durch die Abschätzung

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!},$$

die ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

und woraus die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  folgt. Dann kann man zeigen, dass die Funktion  $t \mapsto e^{tA}$  differenzierbar ist und es gilt

$$(e^{tA})' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(tA)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A e^{tA},$$

indem man sorgfältig die Konvergenz der entsprechenden Reihen überprüft. Daraus folgen alle andere Aussagen von Satz 2.22 und Korollar 2.23.

**Beispiel.** Sei  $A$  eine Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$



Dann gilt für jedes  $k = 0, 1, \dots$

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

und

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

**Beispiel.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $A^2 = 0$  und somit  $A^k = 0$  für alle  $k \geq 2$ , erhalten wir

$$e^{tA} = \text{id} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$  wie folgt:

$$x(t) = e^{tA}v = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $C_1, C_2$  die Komponenten  $v$  und deswegen beliebige Konstanten sind.

Mit Hilfe von Satz 2.22 lässt sich die Lösung von System  $x' = Ax$  auf Bestimmung von  $e^{tA}$  zurückführen. Die Methoden für Bestimmung von  $e^A$  für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  besprechen wir in den nächsten Abschnitten.

### 2.7.3 Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion

**Definition.** Man sagt, dass die Operatoren  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  *kommutieren* (vertauschen) wenn  $AB = BA$  gilt.

Allgemeine kommutieren die Operatoren nicht. Sollen  $A$  und  $B$  kommutieren, dann gelten für  $A$  und  $B$  verschiedene Identitäten, wie für Zahlen, z.B.,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2. \quad (2.130)$$

In der Tat gilt für beliebige Operatoren  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

woraus (2.130) folgt genau dann, wenn  $AB = BA$ .

**Lemma 2.24** *Kommutieren die Operatoren  $A$  und  $B$ , so gilt die Identität*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

**Beweis.** Der Beweis besteht aus einer Folge von Behauptungen.

**Behauptung 1.** *Kommutieren die Operatoren  $A, B, C$  paarweise, so kommutieren auch  $AC$  und  $B$ .*

In der Tat haben wir mit Hilfe von Assoziativgesetz

$$(AC)B = A(CB) = A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC).$$

Daraus folgt, dass  $A^k$  und  $B$  für jedes  $k = 0, 1, \dots$  kommutieren, vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren. Der Induktionsanfang für  $k = 0$  ist klar. Der Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  geht wie folgt. Betrachten wir drei Operatoren  $A, B, A^{k-1}$ , die nach Induktionsvoraussetzung paarweise kommutieren. Dann kommutieren auch  $AA^{k-1} = A^k$  und  $B$ .

**Behauptung 2.** *Kommutieren  $A$  und  $B$ , so kommutieren auch  $e^A$  und  $B$ .*

Da  $A^k$  und  $B$  kommutieren, wir erhalten

$$\begin{aligned} e^A B &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B}{k!} \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B A^k}{k!} \right) = B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) = B e^A. \end{aligned}$$

Wir haben die folgenden Identitäten benutzt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) B = \sum_{k=0}^{\infty} A_k B$$

und

$$B \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} B A_k,$$

die für alle Operatoren  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und für alle konvergenten Reihen  $\sum_k A_k$  von Operatoren  $A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gelten. In der Tat ist die (linke bzw rechte) Multiplikation mit  $B$  ein linearer und somit stetiger (vgl. Abschnitt 2.1.3) Operator in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , woraus die beiden Identitäten folgen.

**Behauptung 3.** *Sind  $A(t)$  und  $B(t)$  differenzierbare Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , so gilt*

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t). \quad (2.131)$$

In der Tat haben wir für jede Komponente

$$\begin{aligned} \left( (AB)_{ij} \right)' &= \left( \sum_k A_{ik} B_{kj} \right)' = \sum_k A'_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} B'_{kj} \\ &= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij} = (A'B + AB')_{ij}, \end{aligned}$$

woraus (2.131) folgt.

Jetzt können wir den Beweis beenden wie folgt. Betrachten wir die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  die durch die Identität

$$F(t) = e^{tA} e^{tB}$$

definiert ist. Ableiten die Funktion  $F$  mit Hilfe von (2.131) und Korollar 2.23 und Anwendung der Behauptungen 2 ergibt

$$F'(t) = (e^{tA})' e^{tB} + e^{tA} (e^{tB})' = Ae^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = Ae^{tA} e^{tB} + Be^{tA} e^{tB} = (A + B) F(t).$$

Andererseits, nach Korollar 2.23 erfüllt die Funktion

$$G(t) = e^{t(A+B)}$$

dieselbe Gleichung

$$G' = (A + B) G.$$

Da  $G(0) = F(0) = \text{id}$ , wir sehen, dass die beiden Vektorfunktionen  $F(t)$  und  $G(t)$  das gleiche Anfangswertproblem lösen. Nach Eindeutigkeit der Lösung von Satz 2.3 beschließen wir, dass  $F(t) \equiv G(t)$ . Insbesondere gilt  $F(1) = G(1)$ , also  $e^A e^B = e^{A+B}$ , was zu beweisen war. ■

**Alternativer Beweis.** Hier reißen wir einen direkten algebraischen Beweis der Identität  $e^{A+B} = e^A e^B$  um. Zunächst beweist man durch Induktion nach  $n$  die binomische Formel

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \quad (2.132)$$

(vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren) genauso, wie die klassische binomische Formel für Zahlen. Dann erhält man

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Andererseits benutzen wir die Cauchy-Produktformel (Cauchy-Faltung), die besagt, dass für absolut konvergente Reihen (auch von Operatoren) die folgende Identität gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} B_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} A_k B_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}.$$

Daraus folgt

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} = e^{A+B},$$

was zu beweisen war.

**Bemerkung.** Mit Hilfe von DGLen kann man auch andere interessante Eigenschaften der Exponentialfunktion beweisen, z.B. die Identität

$$\det e^A = e^{\text{Spur } A}$$

(vgl. die Übungen).

## 2.7.4 Exponentialfunktion von einem Jordanblock

Hier bestimmen wir  $e^A$  wenn  $A$  ein Jordanblock ist.

**Definition.** Eine  $n \times n$  Matrix  $J$  heißt ein *Jordanblock* wenn sie eine Bidiagonalmatrix mit der folgenden Form ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

wobei eine komplexe Zahl  $\lambda$  auf der Hauptdiagonale steht, 1 auf der ersten oberen Nebendiagonale steht, und alle anderen Elementen 0 sind. Die Zahl  $n$  heißt die Dimension von Jordanblock  $J$  und  $\lambda$  heißt der Eigenwert von  $J$  (offensichtlich,  $\lambda$  ist ein einziger Eigenwert von Matrix  $J$ ).

Wir bemerken, dass  $J = \lambda \text{id} + N$  wobei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

auch ein Jordanblock mit Eigenwert 0 ist. Ein Jordanblock mit Eigenwert 0 heißt *nilpotenter Jordanblock*.

Da die Matrizen  $\lambda \text{id}$  und  $N$  kommutieren (weil  $\text{id}$  mit allen Matrizen kommutiert), erhalten wir nach Lemma 2.24

$$e^{tJ} = e^{t\lambda \text{id}} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}. \quad (2.135)$$

Um  $e^{tN}$  zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Potenzen  $N^2, N^3$ , usw. Die Elementen von Matrix  $N$  sind folgende:

$$N_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{fall } j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex sind. Daraus folgt

$$(N^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n N_{ik} N_{kj} = \sum_{\substack{k=i+1 \\ j=k+1}} N_{ik} N_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die 2-te obere Nebendiagonale bilden. Durch Induktion erhalten wir, dass

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden, vorausgesetzt  $k < n$ , und  $N^k = 0$  falls  $k \geq n$ .<sup>12</sup> Daraus folgt

$$e^{tN} = \text{id} + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k \geq 0$ . Kombinieren (2.136) und (2.135) ergibt folgendes.

**Lemma 2.25** *Sei  $J$  ein Jordanblock (2.133). Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} \\ 0 & & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}e^{t\lambda}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k \geq 0$ .

Nach Korollar 2.23 stellen die Spalten der Matrix  $e^{tJ}$  unabhängige Lösungen des Normalsystems  $x' = Jx$  dar. Somit erhalten wir die folgenden  $n$  unabhängigen Lösungen:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ \cdots \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

### 2.7.5 Blockdiagonalmatrizen

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *blockdiagonal* wenn  $A$  die folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{A_{r-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

<sup>12</sup>Jede Matrix  $A$  mit der Eigenschaft  $A^k = 0$  mit einer natürlichen Zahl  $k$  heißt *nilpotent*. Deshalb ist  $N$  eine nilpotente Matrix, was mit dem Begriff "nilpotenter Jordanblock" übereinstimmt.

wobei  $A_1, \dots, A_r$  die Blöcke von  $A$ , also quadratische Matrizen, sind (alle Elementen von  $A$  außerhalb der Blöcke sind 0). In diesem Fall schreiben wir auch

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r).$$

**Lemma 2.26** Die folgende Identität gilt:

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_r)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \quad (2.138)$$

Man kann die Identität (2.138) ausführlicher umschreiben wie folgt:

$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{e^{A_2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{e^{A_{r-1}}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{e^{A_r}} \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Offensichtlich haben wir

$$A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k) = \text{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_1^i}{i!}, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_r^i}{i!}\right) \\ &= \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \end{aligned}$$

■

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *Jordan-Normalform*, wenn  $A$  eine Blockdiagonalmatrix ist und alle Blöcke von  $A$  Jordanblöcke sind, also

$$A = \text{diag}(J_1, \dots, J_r) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{J_{r-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix},$$

wobei  $J_i$  Jordanblöcke sind.

Nach Lemma 2.26 haben wir für eine Jordan-Normalform  $A$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_r}),$$

wobei die Blöcke  $e^{tJ_k}$  mit Hilfe von Lemma 2.25 bestimmt werden können. Mit Satz 2.22 (bzw Korollar 2.23) erhalten wir explizit die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$ .

**Beispiel.** Lösen wir das Normalsystem  $x' = Ax$  wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $A$  eine Jordan-Normalform mit Jordanblöcke

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.25 erhalten wir

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und nach Lemma 2.26,

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, e^{tJ_2}) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 2.23 liefern die Spalten der Matrix  $e^{tA}$  unabhängige Lösungen, und die allgemeine Lösung ist ihre Linearkombination:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 t e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t} \\ C_4 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.7.6 Darstellung von Operatoren in Jordan-Normalform

Sei die Folge  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis in  $\mathbb{C}^n$ . Für jeden Vector  $x \in \mathbb{C}^n$  bezeichnen wir mit  $x_j^b$  die Komponenten von  $x$  in der Basis  $b$ , also

$$x = x_1^b b_1 + x_2^b b_2 + \dots + x_n^b b_n = \sum_{j=1}^n x_j^b b_j.$$

Bezeichnen mit  $x_b$  den Spaltenvektor  $(x_1^b, \dots, x_n^b)^T$ , der den Vektor  $x$  in der Basis  $b$  darstellt. Ähnlich definiert man für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine  $n \times n$  Matrix  $A^b$ , die den Operator  $A$  in der Basis  $b$  darstellt, also folgendes gilt für jedes  $x \in \mathbb{C}^n$ :

$$(Ax)^b = A^b x^b, \tag{2.139}$$

wobei der Ausdruck  $A^b x^b$  das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $A^b$  und den Spaltenvektor  $x^b$  ist.

Man kann die Identität (2.139) benutzen um die Elementen von  $A^b$  zu bestimmen. Setzen wir in (2.139)  $x = b_j$  ein. Da offensichtlich

$$(b_j)^b = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$$

wobei der Wert 1 an der Stelle  $j$  ist, und somit  $A^b (b_j)^b$  die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  ist, erhalten wir, dass  $(Ab_j)^b$  auch die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  ist, also

$$A^b = \left( (Ab_1)^b \mid (Ab_2)^b \mid \dots \mid (Ab_n)^b \right).$$

Man formuliert das als eine Regel:

*die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  wird von dem Spaltenvektor  $Ab_j$  in der Basis  $b_1, \dots, b_n$  dargestellt.*

**Beispiel.** Sei  $A$  ein Operator in  $\mathbb{C}^2$ , der in der Standardbasis  $e = \{e_1, e_2\}$  durch die Matrix

$$A^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Betrachten wir die Basis  $b = \{b_1, b_2\}$  wobei

$$b_1 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$(Ab_1)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_1$$

und

$$(Ab_2)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_2$$

Daraus folgt

$$(Ab_1)^b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Ab_2)^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A^b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir den Operator  $e^{tA}$  erst in der basis  $b$  und danach in der Basis  $e$ . Da  $A^b$  eine Diagonalmatrix ist, erhalten wir

$$(e^{tA})^b = e^{tA^b} = \exp \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

Da  $(e_1)^b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  und  $(e_2)^b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ , erhalten wir

$$(e^{tA} e_1)^b = (e^{tA})^b e_1^b = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-t} \\ \frac{1}{2} e^t \end{pmatrix}$$



und

$$(e^{tA}e_2)^b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{tA}e_1 &= \frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= \frac{e^{-t}}{2}(e_1 - e_2) + \frac{e^t}{2}(e_1 + e_2) \\ &= (\cosh t)e_1 + (\sinh t)e_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{tA}e_2 &= -\frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= (\sinh t)e_1 + (\cosh t)e_2. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Matrix von  $e^{tA}$  in der Basis  $\{e_1, e_2\}$  wie folgt:

$$(e^{tA})^e = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Folglich ist diese Matrix die Fundamentalmatrix des Normalsystems

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

und die allgemeine Lösung davon ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cosh t + C_2 \sinh t \\ C_1 \sinh t + C_2 \cosh t \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine Matrix lässt sich immer durch einen Basiswechsel auf eine Jordan-Normalform zurückführen, und zwar nach dem folgenden Satz aus Linearer Algebra.

**Satz von Jordan.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert eine Basis  $b$  in  $\mathbb{C}^n$ , derart, dass die Matrix  $A^b$  eine Jordan-Normalform ist.

Die Basis  $b$  heißt die *Jordan-Basis* von  $A$ , und die Matrix  $A^b$  heißt die *Jordan-Normalform* von  $A$ .

Sei  $J$  ein Jordanblock von  $A^b$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  und der Dimension  $p$ . Angenommen, die Spalten (und die Zeilen) von  $J$  innerhalb der Matrix  $A^b$  haben die Nummer  $j+1, j+2, \dots, j+p$ . Die Teilfolge  $\{b_{j+1}, \dots, b_{j+p}\}$  von Basisvektoren heißt die *Jordankette* von  $J$ . Wir betonen, dass die ganze Basis  $b$  eine disjunkte Vereinigung von allen Jordanketten in  $A^b$  ist.





wobei  $\ker B$  bezeichnet den Kern (=Nullraum) des Operators  $B$ . Man kann  $g$  auch definieren als die maximal Anzahl von linear unabhängigen Eigenvektoren von  $\lambda$ . Sei  $A^b$  die Jordan-Normalform von  $A$ . Dann die Anzahl von Werten  $\lambda$  auf der Diagonale von  $A^b$  ist genau<sup>14</sup>  $m$ , und die Anzahl von Jordanblöcke mit Eigenwert  $\lambda$  ist genau<sup>15</sup>  $g$ . Insbesondere gilt  $g \leq m$ , und die Identität  $g = m$  erfolgt genau dann, wenn alle Jordanblöcke mit dem Eigenwert  $\lambda$  Dimension 1 haben.

Betrachten wir einige Beispiele von Anwendungen des Satzes 2.27.

**Beispiel.** Lösen wir das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

und der einzige Eigenwert ist  $\lambda_1 = 3$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m_1 = 2$ . Die Gleichung für Eigenvektor  $v$  ist

$$(A - \lambda \text{id})v = 0$$

also für  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $-a + b = 0$ . Die Lösung dieser Lineargleichung ist 1-dimensional, so dass  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und  $b = 1$  ergibt den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und alle anderen Eigenvektoren von  $\lambda_1 = 3$  sind seine Vielfachen. Da nur ein Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_1 = 3$  existiert, ist die Jordan-Normalform wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2.27 erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{3t}v_1 \\ x_2(t) &= e^{3t}(tv_1 + v_2), \end{aligned}$$

wobei  $v_2$  die Hauptvektor der Stufe 2 ist, also erfüllt  $v_2$  die Gleichung

$$(A - \lambda \text{id})v_2 = v_1.$$

---

<sup>14</sup>Kommt  $\lambda$  genau  $m$  mal auf der Diagonale von  $A^b$  vor, dann hat das charakteristische Polynom  $P(z)$  von  $A$  die Form  $P(z) = (z - \lambda)^m Q(z)$ , wobei  $Q$  ein Polynom ohne Nullstelle  $\lambda$  ist. Daraus folgt, dass  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $m$  ist.

<sup>15</sup>In der Tat entspricht jeder Jordanblock genau einen Eigenvektor aus Jordan-Basis.

Für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was äquivalent zu  $-a + b = 1$  ist. Wählen  $a = 0$  und  $b = 1$  ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 (t+1) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Gegeben sei das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 2$  mit  $m_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 1$  mit  $m_2 = 2$ . Die Eigenvektoren von  $\lambda_1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_1 \text{id})v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ -2a - 2b - c = 0 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$$

Die drei Gleichungen sind abhängig (wie man erwartet), aber jedes Paar von Gleichungen ist unabhängig. Deshalb ist die Lösung 1-dimensional, also  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und lösen die Gleichungen ergibt  $b = -2$ ,  $c = 2$  und somit den Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $g_1 = m_1 = 1$ , es gibt nur 1 Jordanblock von  $\lambda_1 = 2$ , und er ist 1-dimensional. Deshalb erhalten wir aus (2.141) eine Lösung

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von  $\lambda_2 = 1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id}) v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0. \end{cases}$$

Dieses System hat nur eine unabhängige Lösung  $a = 0, b = 1, c = -1$ , die den Eigenvektor ergibt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb  $g_2 = 1$ , und somit gibt es nur einen Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_2 = 1$ , der muss  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sein. Nach Satz 2.27 ergibt dieser Jordanblock zwei Lösungen

$$x_2(t) = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$x_3(t) = e^t (t v_1 + v_2),$$

wobei  $v_2$  der zweite Hauptvektor von  $\lambda_2$  ist, also  $v_2$  von der Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id}) v_2 = v_1$$

bestimmt werden muss. Für  $v_2 = (a, b, c)^T$  erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 1 \\ 2a + b + c = -1. \end{cases}$$

Das System hat die Lösung  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , die ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die dritte Lösung der DGL

$$x_3(t) = e^t (tv_1 + v_2) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_3 e^t \\ -2C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t) e^t \\ 2C_1 e^{2t} + (C_3 - C_2 - C_3 t) e^t \end{pmatrix}.$$

**Korollar 2.28** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert des Operators  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m$  und geometrischen Vielfachheit  $g$ . Dann liefert  $\lambda$  genau  $m$  linear unabhängige Lösungen des Systems  $x' = Ax$  in der Form

$$x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + u_1 t + \dots + u_s t^s), \quad (2.143)$$

wobei  $s = m - g$  und  $u_j$  die unbekannte Vektoren aus  $\mathbb{C}^n$  sind, die durch Einsetzen von dem Ansatz (2.143) in die DGL  $x' = Ax$  bestimmt werden können.

Die Menge von allen  $n$  Lösungen, die man mit Hilfe von allen Eigenwerten in der Form (2.143) erhält, ist unabhängig.

**Bemerkung.** In Anwendungen setzt man den Ansatz (2.143) in die DGL  $x' = Ax$  und löst sie bezüglich der unbekanntenen Werten  $u_{ij}$ , die die Komponenten der Vektoren  $u_j$  sind. Die Antwort enthält  $m$  beliebige Konstanten, und die Lösung (2.143) erscheint als eine Linearkombination von  $m$  unabhängigen Lösungen.

**Beweis.** Seien  $p_1, \dots, p_g$  die Dimensionen von den allen Jordanblöcken mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Dann  $\lambda$  kommt  $p_1 + \dots + p_g$  mal auf der Diagonale der Jordan-Normalforms vor, woraus folgt

$$\sum_{j=1}^g p_j = m.$$

Deshalb ist die gesamte Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, die von Satz 2.27 für den Eigenwert  $\lambda$  geliefert werden, gleich  $m$ . Wir zeigen jetzt, dass alle Lösung von Satz 2.27 den Ansatz (2.143) erfüllen. In der Tat hat jede Lösung von Satz 2.27 die Form

$$x(t) = e^{\lambda t} P_j(t)$$

wobei  $P_j(t)$  ein vektorwertiges Polynom von Grad  $\leq p_j - 1$  ist. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $p_j - 1 \leq s$ , und das folgt aus der Identität

$$\sum_{j=1}^g (p_j - 1) = \left( \sum_{j=1}^g p_j \right) - g = m - g = s.$$

■

**Beispiel.** Betrachten wir noch einmal das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x,$$

das nur den Eigenwert  $\lambda = 3$  hat und zwar mit  $m = 2$  und  $g = 1$ . Da  $m - g = 1$ , ergibt Korollar 2.28 den folgenden Ansatz für die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{3t}(u + tv)$$

wobei  $u$  und  $v$  unbekannte Vektoren sind. Dann gilt nach Produktregel

$$x' = 3e^{3t}(u + tv) + e^{3t}v = e^{3t}(3u + (3t + 1)v),$$

und Einsetzen  $x(t)$  und  $x'(t)$  in die Gleichung ergibt

$$3u + (3t + 1)v = A(u + tv).$$

Da diese Gleichung linear in  $t$  ist, es reicht sie für zwei Werten von  $t$  zu erfüllen. Wie nehmen  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$ , was ergibt

$$\begin{aligned} Au &= 3u + v \\ Av &= 3v. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $v$  ein Eigenvektor und  $u$  ist zweiter Hauptvektor. Die beiden haben wir schon berechnet:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aber jetzt brauchen wir alle Werten von  $u$  und  $v$ , also

$$v = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} \left( C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1(t + 1) + C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.144}$$

**Beispiel.** Am Ende betrachten wir inhomogenes System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} \tag{2.145}$$

und erinnern uns daran, dass nach Satz 2.17 die allgemeine Lösung durch die Identität

$$x(t) = X(t) \int X(t)^{-1} B(t) dt \tag{2.146}$$



gegeben ist, wobei  $X(t)$  die Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist und  $B(t)$  die Störfunktion ist. Die zwei unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix},$$

die aus (2.144) mit  $C_1 = 0$  bzw  $C_2 = 0$  folgen. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (2.146) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.145):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2 \end{pmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 + t + C_1 \\ -2t + C_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} t - t^2 + C_1 + tC_2 \\ -t - t^2 + C_1 + (t+1)C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3 Das Anfangswertproblem für generelle DGLen

In diesem Kapitel beweisen wir unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

#### 3.1 Lipschitz-stetige Funktionen

Wir brauchen den Begriff von Lipschitz-Funktionen. Sei  $f(x)$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ .

**Definition.** Funktion  $f(x)$  heißt *Lipschitz-stetig* in  $\Omega$ , falls es eine Konstante  $L$  gibt, derart, dass für alle  $x, y \in \Omega$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.1)$$

Die Konstante  $L$  heißt eine *Lipschitz-Konstante* von  $f$  in  $\Omega$ . Eine Lipschitz-stetige Funktion heißt auch *Lipschitz-Funktion*.

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{R}^m$ ) äquivalent sind, ist die Lipschitz-Bedingung (3.1) unabhängig von der Wahl der Normen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , obwohl der Wert der Lipschitz-Konstante  $L$  jedoch von den Normen abhängt. Offensichtlich ist jede Lipschitz-stetige Funktion stetig (sogar gleichmäßig stetig).

**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = \|x\|$  als eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig weil nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Die Lipschitz-Konstante ist offensichtlich gleich 1. Bemerken Sie, dass die Funktion  $f(x)$  nicht differenzierbar an  $x = 0$  ist.

**Definition.** Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* in  $\Omega$ , wenn es für jedes  $x_0 \in \Omega$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, derart, dass die Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  eine Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  Lipschitz-stetig in  $B$  ist.

Wir betonen, dass der Wert der Lipschitz-Konstante in der Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  abhängig von der Kugel sein darf.

Folgendes Lemma ergibt viele Beispiele von lokal Lipschitz-stetigen Funktionen. Bezeichnen wir mit  $f_k$  wie üblich die Komponenten von  $f$ .

**Lemma 3.1** (a) Seien  $B$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Funktion. Gilt für alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

$$\sup_B \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right| \leq M \quad (3.2)$$

mit einer Konstanten  $M$ , so ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $L = L(M)$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Wir benutzen die folgende Eigenschaft von Funktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

**Behauptung.** (Mittelwertsatz) Sei  $g$  eine differenzierbare Funktion von einer Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann für jede  $x, y \in B$  existiert  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$g(y) - g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)(y_j - x_j). \quad (3.3)$$

Hier ist  $[x, y]$  das geschlossene Intervall (die Verbindungsstrecke) zwischen  $z$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , also

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Sind  $x, y$  Elementen der Kugel  $B = B(z, r)$ , so enthält  $B$  auch ganzes Intervall  $[x, y]$ , da für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - z\| &= \|(1 - \lambda)(x - z) + \lambda(y - z)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - z\| + \lambda\|y - z\| \\ &< (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

Deshalb ist für jedes  $\xi \in [x, y]$  der Wert  $\frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)$  in (3.3) wohldefiniert.

Im Fall  $n = 1$  übereinstimmt die obige Behauptung mit dem klassischen Mittelwertsatz für differenzierbare reellwertige Funktionen auf einem Intervall.

Um (3.3) für  $n > 1$  zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$h(\lambda) = g(x + \lambda(y - x)) \quad \text{für } \lambda \in [0, 1].$$

Die Funktion  $h(\lambda)$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar und somit existiert nach dem ein-dimensionalen Mittelwertsatz ein  $\tau \in (0, 1)$ , derart, dass

$$g(y) - g(x) = h(1) - h(0) = h'(\tau).$$

Da nach der Kettenregel

$$h'(\tau) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + \tau(y - x))(y_j - x_j),$$

erhalten wir (3.3) mit  $\xi = x + \tau(y - x)$ .

(a) Nach (3.3) erhalten wir für  $k$ -te Komponente  $f_k$  von  $f$  und für jede  $x, y \in B$

$$f_k(x) - f_k(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)(x_j - y_j), \quad (3.4)$$

wobei  $\xi \in [x, y]$ . Abschätzung von partiellen Ableitungen nach (3.2) ergibt

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq M \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = M\|x - y\|_1,$$

woraus folgt

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq M\|x - y\|_1.$$

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, können die Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  durch eine gegebene Norm ersetzt werden, woraus die Lipschitz-Bedingung folgt mit der Konstanten  $L = CM$ , wobei die Konstante  $C$  von der gegebenen Norm abhängt.

(b) Da  $\Omega$  offen ist, für jedes  $x \in \Omega$  existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass die Kugel  $B(x, \varepsilon)$  Teilmenge von  $\Omega$  ist. Durch Reduzierung von  $\varepsilon$  können wir voraussetzen, dass die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$

auch Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die Komponenten  $f_k$  stetig differenzierbar sind, sind die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig und somit in  $\overline{B}$  beschränkt. Nach (a) erhalten wir, dass  $f$  Lipschitz-stetig in  $B$  ist, was zu beweisen war. ■

**Beispiel.** 1. Die Funktion  $f(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}$  ist lokal Lipschitz-stetig da sie stetig differenzierbar ist. Aber diese Funktion ist nicht Lipschitz-stetig: die Differenz

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| |x + y|$$

kann durch  $L|x - y|$  nicht abgeschätzt werden, weil  $|x + y|$  beliebig groß sein kann.

2. Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  auf  $\mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig, weil ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

die folgende Ungleichung erfüllt:  $|f'(x)| \leq 1$ . Insbesondere ist 1 eine Lipschitz-Konstante von  $f(x)$ .

3. Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist Lipschitz-stetig auch mit der Lipschitz-Konstanten 1, aber nicht differenzierbar.

Wir brauchen eine Verallgemeinerung von Lipschitz-Stetigkeit wie folgt. Sei  $f(t, x)$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^m$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , und  $(t, x) \in \Omega$ .

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *Lipschitz-stetig* in  $x$ , wenn es eine Konstante  $L$  gibt, so dass für alle  $(t, x), (t, y) \in \Omega$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.5)$$

D.h., für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig mit einer unabhängigen von  $t$  Lipschitz-Konstanten  $L$ .

Die gleiche Definition gilt wenn  $t$  eine Variable der höheren Dimension ist, z.B. aus  $\mathbb{R}^l$ .

Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt *Zylinder*, falls  $Z = I \times B$ , wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $B$  eine (offene oder abgeschlossene) Kugel in  $\mathbb{R}^n$  sind. Der Zylinder ist abgeschlossen genau dann, wenn die beiden Mengen  $I$  und  $B$  abgeschlossen sind (und offen, wenn die beiden  $I$  und  $B$  offen sind).

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für Intervalle und Kugeln:

$$I(t, \delta) := (t - \delta, t + \delta), \quad \overline{I}(t, \delta) = [t - \delta, t + \delta]$$

und

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}, \quad \overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}.$$

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* in  $x$ , falls es für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$  gibt, derart, dass der Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon)$$

Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist (vgl. Fig. 24).

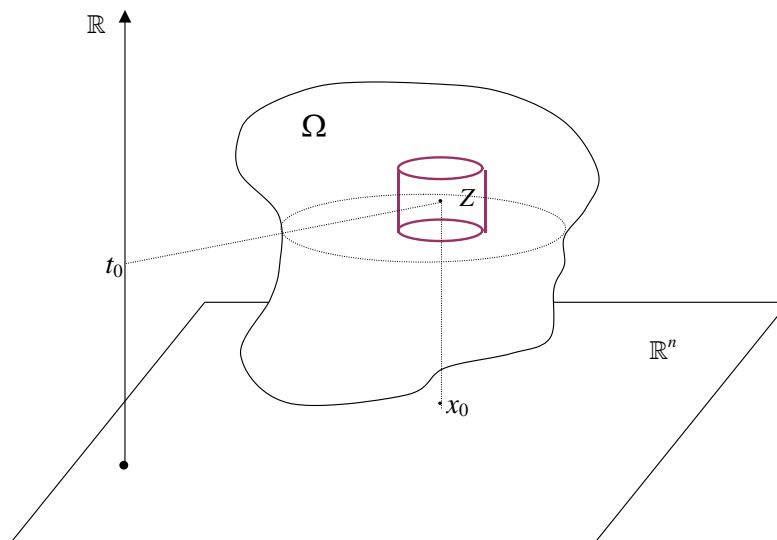


Figure 24: Zylinder  $Z$

**Lemma 3.2** (a) Seien  $Z$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f(t, x) : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare in  $x$  Funktion. Sind alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  beschränkt in  $Z$ , so ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare in  $x$  Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ .

**Beweis.** (a) Sei  $Z = I \times B$ . Für jedes  $t \in I$  ist die Funktion  $f(t, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar, und die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  sind beschränkt in  $B$  mit einer unabhängigen von  $t$  Konstante  $M$ . Somit erhalten wir nach Lemma 3.1, dass die Funktion  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L = L(M)$ , die auch unabhängig von  $t$  ist. Deshalb ist die Funktion  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz-stetig in  $x$ .

(b) Da  $\Omega$  offen ist, existiert für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  ein Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon),$$

der eine Teilmenge von  $\Omega$  ist, und auch der abgeschlossene Zylinder

$$\bar{Z} = \bar{I}(t_0, \delta) \times \bar{B}(x_0, \varepsilon)$$

eine Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig in  $\Omega$  sind, sind sie beschränkt in  $\bar{Z}$  und deshalb in  $Z$ . Nach (a) ist die Funktion  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$ , und somit ist  $f$  auf  $\Omega$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . ■

## 3.2 Existenz und Eindeutigkeit für Normalsysteme

Betrachten wir jetzt ein allgemeines (nicht-lineares) Normalsystem

$$x' = f(t, x), \quad (3.6)$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n + 1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Also,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

Erinnern wir uns daran, dass eine Lösung von (3.6) eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften ist:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar für jedes  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für jedes  $t \in I$ .

Betrachten wir auch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

wobei  $(t_0, x_0)$  ein gegebener Punkt in  $\Omega$  ist. Eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Lösung von (3.7) falls  $x$  eine Lösung von (3.6) auf Intervall  $I$  ist,  $t_0 \in I$  und  $x(t_0) = x_0$ . Der Graph der Lösung  $x(t)$  ist eine Integralkurve von (3.6), die durch den Punkt  $(t_0, x_0)$  geht.

Jetzt können wir einen Hauptsatz formulieren.

**Satz 3.3** (Satz von Picard-Lindelöf) *Sei die Funktion  $f(t, x)$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Dann hat das Anfangswertproblem (3.7) eine Lösung für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .*

*Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.7), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .*

**Bemerkung.** Nach Lemma 3.2, kann die Voraussetzung von lokal Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $x$  durch die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x$  ersetzt werden. Für bestimmten Anwendungen ist es jedoch wichtig, dass die Funktion  $f$  nicht unbedingt differenzierbar sein muss.

**Bemerkung.** Alternativ kann man die Voraussetzungen von Satz 3.3 wie folgt formulieren: sei die Funktion  $f(t, x)$  stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Da in einem Zylinder  $Z$  um  $x$  die Lipschitz-Konstante  $L$  unabhängig von  $t$  ist, ist Funktion  $f$  in  $Z$  stetig in  $x$  gleichmäßig bezüglich  $t$ . Zusammen mit der Stetigkeit in  $t$  ergibt dies die Stetigkeit in  $(t, x)$ .

**Bemerkung.** Vergleichen wir Satz 3.3 mit Satz 2.3, wo man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

für lineares Normalsystem betrachtete, wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Die lineare Gleichung hat die Form  $x' = f(t, x)$  für

$$f(t, x) = A(t)x + B(t).$$

Offensichtlich ist die Funktion  $f$  stetig im Definitionsbereich  $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ . Sie ist auch Lipschitz-stetig in  $x$  in jeder Teilmenge  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  vorausgesetzt  $[a, b] \subset I$ , weil für jedes  $t \in [a, b]$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$$

wobei

$$L = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| < \infty.$$

Deshalb ist Satz von Picard-Lindelöf verwendbar und ergibt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.8) in einem Teilintervall  $[t_0 - r, t_0 + r]$  von  $I$ . Satz 2.3 besagt allerdings, dass die Lösung von (3.8) auf ganzem Intervall  $I$  existiert, was offensichtlich stärker ist, als die Behauptung von Satz 3.3.

**Bemerkung.** Ohne Lipschitz-Bedingung, aber doch unter der Voraussetzung von Stetigkeit von  $f$ , gilt die Existenz der Lösung (Satz von Peano), aber nicht die Eindeutigkeit, was man unterhalb sehen kann.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

(vgl. Abschnitt 1.3). Die Funktion  $x(t) \equiv 0$  ist offensichtlich eine Lösung, sowie auch die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2, & t < 0. \end{cases}$$

Deshalb es gibt mindestens zwei Lösungen von (3.9) (vgl. Fig. 25).

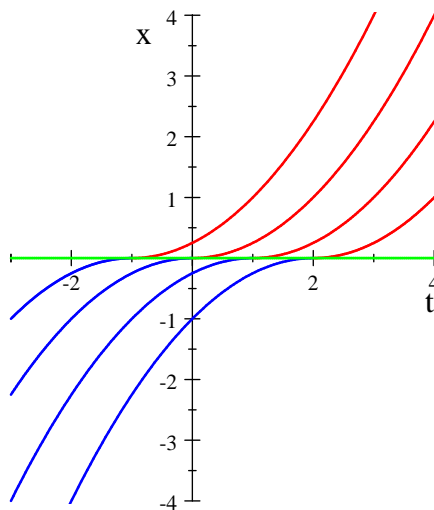


Figure 25: Die Integralkurven von (3.9)

Die Eindeutigkeit gilt nicht, weil die Funktion  $f(t, x) = \sqrt{|x|}$  nicht Lipschitz-stetig in der Nähe von 0 ist. Ähnlich hat das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

auch mehrere Lösungen, vorausgesetzt  $\alpha \in (0, 1)$ , und die Funktion  $f(t, x) = |x|^\alpha$  ist auch nicht lokal Lipschitz-stetig.

**Beispiel.** Betrachten wir jetzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

wo die Funktion  $f(t, x) = |x|$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Die Eindeutigkeit gilt für (3.10) und die eindeutige Lösung ist

$$x(t) = \begin{cases} e^t x_0, & x_0 \geq 0 \\ e^{-t} x_0, & x_0 < 0 \end{cases}$$

(vgl. Fig. 26).

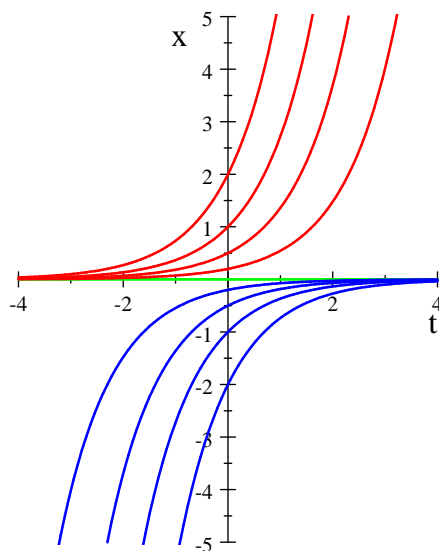


Figure 26: Die Integralkurven von (3.10)

Für den Beweis von Satz 3.3 brauchen wir die folgende Behauptung.

**Satz 3.4** (Fixpunktsatz von Banach) *Seien  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktionsabbildung, d.h. , es gilt*

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y) \quad (3.11)$$

*für eine Konstante  $q \in (0, 1)$  und für alle  $x, y \in X$ . Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt, also einen Punkt  $x \in X$  so dass  $Tx = x$ .*

**Beweis.** Wählen wir einen beliebigen Punkt  $x_0 \in X$  und definieren nach Induktion eine Folge  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  durch

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert und der Grenzwert ein Fixpunkt von  $T$  ist.



Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq qd(x_n, x_{n-1}).$$

Durch Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0) = Cq^n, \quad (3.12)$$

wobei  $C = d(x_1, x_0)$ . Daraus folgt, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. In der Tat, für jede  $m > n$  erhalten wir nach Dreiecksungleichung und (3.12), dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq C(q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}) \\ &\leq Cq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \frac{Cq^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ , was bedeutet, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. Nach der Vollständigkeit von  $(X, d)$ , konvergiert jede Cauchy-Folge. Somit konvergiert die Folge  $\{x_n\}$  gegen einen Punkt  $a \in X$ , also  $x_n \rightarrow a$ . Daraus folgt, dass

$$d(Tx_n, Ta) \leq qd(x_n, a) \rightarrow 0$$

und somit  $Tx_n \rightarrow Ta$ . Andererseits  $Tx_n = x_{n+1} \rightarrow a$ , was ergibt  $Ta = a$ . Also,  $a$  ist ein Fixpunkt.

Sind  $a, b$  zwei Fixpunkte, so gilt es nach (3.11)

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq qd(a, b),$$

was nur dann möglich ist, wenn  $d(a, b) = 0$  und somit  $a = b$ . ■

**Bemerkung.** Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw anzunähern. Man fängt mit einem beliebigen Punkt  $x_0$  an und bildet induktiv die Folge von *Näherungslösungen* wie folgt:

$$x_{n+1} = Tx_n,$$

die gegen Fixpunkt konvergiert. Diese Methode wurde in Beweis von Satz 2.3 benutzt aber ohne den Fixpunktsatz.

Wir fangen den Beweis von Satz 3.3 mit der folgenden Behauptung an.

**Lemma 3.5** Sei die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  in (3.7) stetig. Sei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I$ , so dass  $t_0 \in I$  und  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ . Dann löst die Funktion  $x(t)$  das Anfangswertproblem (3.7) genau dann, wenn  $x(t)$  die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.13)$$

**Beweis.** Löst  $x(t)$  (3.7), so folgt es aus der Gleichung  $x' = f(t, x(t))$ , dass  $x'(t)$  stetig ist, so dass man kann diese Gleichung integrieren und somit erhalten

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

und

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

woraus (3.13) folgt. Umgekehrt, sei  $x$  eine stetige Funktion, die (3.13) erfüllt. Die rechte Seite von (3.13) ist in  $t$  differenzierbar; deshalb ist  $x(t)$  auch differenzierbar. Ableiten von (3.13) ergibt  $x' = f(t, x)$ , und die Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  folgt offensichtlich aus (3.13). ■

**Beweis von Existenz in Satz 3.3.** Wir bilden einen vollständigen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Selbstabbildung  $T$  von  $X$ , so dass die Gleichung  $Tx = x$  äquivalent zum AWP (3.7) ist. Ist  $T$  eine Kontraktionsabbildung so erhalten wir die Existenz der Lösung nach Fixpunktsatz von Banach.

Um den Raum  $(X, d)$  zu definieren, benutzen wir die lokale Lipschitz-Bedingung. Seien  $\varepsilon, \delta, L$  die Konstanten aus der lokalen Lipschitz-Bedingung an  $(t_0, x_0)$ ; also, der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$  und die Funktion  $f(t, x)$  ist auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$ , d.h.  $f$  erfüllt die Ungleichung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (3.14)$$

für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  und  $x, y \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ . Wählen wir ein  $r$ ,

$$0 < r \leq \delta,$$

das später angegeben wird, und bezeichnen

$$I = [t_0 - r, t_0 + r] \quad \text{und} \quad J = \overline{B}(x_0, \varepsilon).$$

Sei  $X$  die Menge von allen stetigen Funktionen  $x : I \rightarrow J$ , also

$$X = \{x : I \rightarrow J : x \text{ ist stetig}\}$$

(vgl. Fig. 27).

Definieren wir einen Integraloperator  $T$  auf Funktionen  $x \in X$  durch die Identität

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.15)$$

Wir möchten es zu sichern, dass  $T$  eine Selbstabbildung von  $X$  ist, d.h.,  $x \in X$  impliziert  $Tx \in X$ . Bemerken wir, dass für jede Funktion  $x \in X$  und für alle  $s \in I$  der Punkt  $(s, x(s))$  in  $\Omega$  liegt, so dass das Integral in (3.15) für jedes  $t \in I$  wohldefiniert ist. Somit ist die Funktion  $Tx(t)$  auf ganzem Intervall  $I$  definiert. Diese Funktion ist offensichtlich stetig. Es bleibt nur zu zeigen, dass die Werten von  $Tx(t)$  in  $J$  liegen, d.h.

$$\|Tx(t) - x_0\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I. \quad (3.16)$$

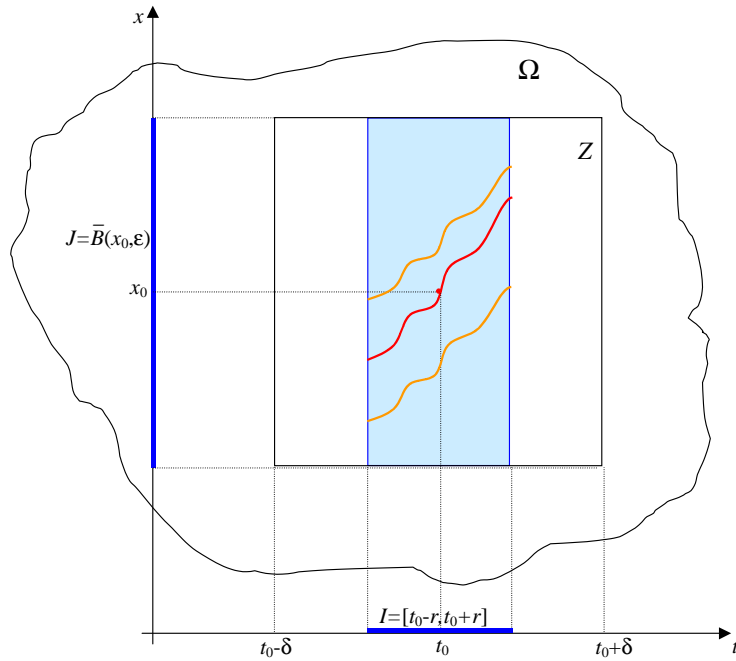


Figure 27: Die Funktionen  $x : I \rightarrow J$

Für jedes  $t \in I$ , we haben nach (3.15)

$$\begin{aligned}
 \|Tx(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \\
 &\leq \sup_{s \in I, x \in J} \|f(s, x)\| |t - t_0| \\
 &\leq Mr,
 \end{aligned}$$

wobei

$$M := \sup_{\substack{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x \in \bar{B}(x_0, \epsilon)}} \|f(s, x)\| < \infty.$$

Wir betonen, dass  $M$  unabhängig von  $r$  definiert ist. Jetzt setzen wir voraus, dass  $r$  noch eine Bedingung erfüllt:

$$r \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

Dann ist (3.16) offensichtlich erfüllt und somit erhalten wir, dass  $Tx \in X$ .

Nach Lemma 3.5 löst eine Funktion  $x \in X$  das AWP (3.7) genau dann, wenn  $Tx = x$ , also, wenn  $x$  ein Fixpunkt von  $T$  ist. Die Existenz von einem Fixpunkt von  $T$  wird mit Hilfe von Fixpunktsatz von Banach bewiesen. Dafür müssen wir die Menge  $X$  in einen vollständigen metrischen Raum umwandeln, so dass die Abbildung  $T$  eine Kontraktion ist.

Definieren wir die Funktion auf  $X \times X$  wie folgt:

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|,$$

für alle  $x, y \in X$ . Dann  $d$  ist eine Abstandsfunktion auf  $X$ , da  $d$  die Axiome von Abstandsfunktion erfüllt:

1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, x) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

In der Tat, sind die 1. und 2. Axiome offensichtlich, und das 3. Axiom folgt aus

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\|.$$

Sei  $\{x_k\}$  eine Folge aus  $X$ . Die Konvergenz  $x_k \rightarrow x$  bezüglich  $d$  bedeutet, dass  $d(x_k, x) \rightarrow 0$ , also

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0,$$

was genau mit der gleichmäßigen Konvergenz  $x_k \rightrightarrows x$  auf  $I$  übereinstimmt.

Jetzt zeigen wir, dass der metrische Raum  $(X, d)$  vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  konvergiert. Sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $(X, d)$ , also

$$d(x_k, x_m) = \sup_{t \in I} \|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Es folgt, dass für jedes  $t \in I$

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty,$$

also  $\{x_k(t)\}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist. Deshalb konvergiert diese Folge gegen einen Vektor aus  $\mathbb{R}^n$ , den wir mit  $x(t)$  bezeichnen, so dass

$$x_k(t) \rightarrow x(t) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

für jedes  $t \in I$ . Da  $x_k(t) \in J$  und  $J$  abgeschlossen ist, erhalten wir auch  $x(t) \in J$ , so dass  $x$  eine Abbildung von  $I$  nach  $J$  ist.

Es bleibt noch zu beweisen, dass  $x$  stetig ist und

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

was bedeutet wird, dass  $\{x_k\}$  gegen  $x$  in  $(X, d)$  konvergiert. Umschreiben wir die Bedingung (3.17) wir folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, m > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \varepsilon.$$

Mit  $m \rightarrow \infty$  (während  $\varepsilon, m$  und  $t$  fest sind) erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x(t)\| \leq \varepsilon,$$

woraus (3.18) folgt. Insbesondere ist  $x(t)$  ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen  $x_k$  (das heißt  $x_k \rightrightarrows x$ ), woraus folgt, dass  $x(t)$  stetig ist.

Jetzt sichern wir, dass die Abbildung  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktion ist. Für beliebige Funktionen  $x, y \in X$  und für jedes  $t \in I$ , gilt  $x(t), y(t) \in J$ , woraus folgt mit Hilfe von

Lipschitz-Bedingung (3.14), dass

$$\begin{aligned}
\|Tx(t) - Ty(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \\
&\leq L |t - t_0| \sup_{s \in I} \|x(s) - y(s)\| \\
&\leq Lrd(x, y),
\end{aligned}$$

und somit

$$d(Tx, Ty) = \sup_{t \in I} \|Tx(t) - Ty(t)\| \leq Lrd(x, y).$$

Setzen wir voraus, dass

$$r < \frac{1}{L},$$

und erhalten, dass  $T$  eine Kontraktion ist. Nach Fixpunktsatz von Banach, hat die Gleichung  $Tx = x$  eine Lösung  $x \in X$ , die nach Lemma 3.5 auch das AWP (3.7) löst.

Wir betonen, dass die gefundene Lösung  $x(t)$  auf dem Intervall  $[t_0 - r, t_0 + r]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $r$  die folgenden drei o.g. Bedingungen erfüllt:

$$0 < r \leq \delta, \quad r \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad r < \frac{1}{L},$$

wobei die Konstanten  $\varepsilon, \delta, L$  aus der lokalen Lipschitz-Bedingung an  $(t_0, x_0)$  kommen, also, der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$ ,  $f$  ist in  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ , und  $M = \sup_Z \|f\|$ . Z.B., man kann immer nehmen

$$r = \min \left( \delta, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L} \right). \quad (3.19)$$

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems (3.7), die auf einem  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind. Wir müssen beweisen, dass  $x = y$  auf  $I$ . Nach Stetigkeit von  $x$  und  $y$ , es existiert  $r \in (0, \delta)$  so dass die Werte von  $x(t)$  und  $y(t)$  für alle  $t$  aus Intervall

$$I' := (t_0 - r, t_0 + r) \cap I$$

in  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  liegen. Die beiden Lösungen  $x, y$  erfüllen die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

für alle  $t \in I'$ . Deshalb erhalten wir für die Differenz  $z(t) := \|x(t) - y(t)\|$  die folgende Ungleichung

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right|.$$

Da die beiden Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elementen von  $Z$  sind, ergibt die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(s) - y(s)\|,$$

woraus folgt

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Nach Grönwall-Lemma (Lemma 2.14) beschließen wir, dass  $z(t) \equiv 0$ , woraus die Gleichheit  $x \equiv y$  auf  $I'$  folgt.

Es bleibt noch zu beweisen, dass  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \in I$ . Betrachten wir eine Teilmenge von  $I$ :

$$E = \{t \in I : x(t) = y(t)\},$$

und zeigen, dass die Menge  $E$  abgeschlossen sowie auch offen in  $I$ . Die Abgeschlossenheit ist offensichtlich: ist  $\{t_k\}$  eine Folge aus  $E$  so dass  $t_k \rightarrow t \in I$  für  $k \rightarrow \infty$ , dann gilt  $x(t_k) = y(t_k)$  für alle  $k$  und somit nach Stetigkeit von  $x$  und  $y$  auch  $x(t) = y(t)$ , also  $t \in E$ .

Um die Offenheit zu beweisen, wählen ein  $t_1 \in E$  und zeigen, dass es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I \subset E$ . Bezeichnen wir mit  $x_1$  den gemeinsamen Wert  $x(t_1) = y(t_1)$  und bemerken, dass die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  das gleiche Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

lösen. Nach dem obigen Teil von Beweis, erhalten wir  $x(t) = y(t)$  auf einem Intervall  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I$  mit  $r > 0$ . Daraus folgt  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I \subset E$ , und somit die Offenheit von  $E$ .

Letztlich benutzen wir das Faktum, dass jedes Intervall  $I$  zusammenhängend ist, was genau bedeutet, dass die einzigen Teilmengen von  $I$ , die gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $I$  sind, sind die Leermenge  $\emptyset$  und  $I$ . Da die Menge  $E$  offen, abgeschlossen und nicht leer ist (weil  $t_0 \in E$ ), beschließen wir, dass  $E = I$ , was zu beweisen war.

Die Zusammenhängendkeit des Intervalls  $U$  beweist man wie folgt. Sei  $S \subset U$  offen und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass entweder  $S$  oder das Komplement  $S^c = U \setminus S$  leer ist. Angenommen das Gegenteil gilt, d.h., die beiden Mengen  $S$  und  $S^c$  sind nicht leer, und wählen einige Punkte  $a_0 \in S$  und  $b_0 \in S^c$ . Setzen wir  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  so dass  $c_0 \in U$ . Dann gehört  $c_0$  zum  $S$  oder zum  $S^c$ . Aus zwei Intervalle  $[a_0, c_0]$ ,  $[c_0, b_0]$  wählen wir ein Intervall, dessen Endpunkte zu verschiedenen Mengen  $S, S^c$  gehören, und es mit  $[a_1, b_1]$  bezeichnen, so dass  $a_1 \in S$  und  $b_1 \in S^c$ . Dann holen wir dieses Argument wieder, indem wir ein Intervall  $[a_2, b_2]$  bilden, das eine Hälfte von  $[a_1, b_1]$  ist, und  $a_2 \in S$ ,  $b_2 \in S^c$ . Durch Induktion erhalten wir eine Intervallschachtelung<sup>16</sup>  $\{[a_k, b_k]\}_{k=0}^{\infty}$ , wobei  $a_k \in S$ ,  $b_k \in S^c$  und  $|b_k - a_k| \rightarrow 0$ . Nach Intervallschachtelungsprinzip existiert ein  $x \in [a_k, b_k]$  für alle  $k$ . Offensichtlich  $x \in U$ . Da  $a_k \rightarrow x$  und  $S$  abgeschlossen ist, es gilt  $x \in S$ . Da  $b_k \rightarrow x$  und  $S^c$  abgeschlossen ist, es gilt auch  $x \in S^c$ . Dieser Widerspruch beweist, dass entweder  $S$  oder  $S^c$  leer ist, d.h., entweder  $S = \emptyset$  oder  $S = U$ . ■

Aus dem Beweis von Existenz der Lösung gewinnt man die folgende Methode für Bestimmung der Lösung  $x(t)$  von (3.7). Man fängt mit konstante Funktion  $x_0(t) \equiv x_0$  an und bildet eine Folge von Näherungslösungen  $x_k(t)$  nach der Regel  $x_{k+1} = Tx_k$ , d.h.

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds.$$

<sup>16</sup>Das ist eine Folge von Intervallen, so dass jedes Intervall komplett in dem vorherigen Intervall liegt.

Diese Folge  $\{x_k\}$  heißt die *Picarditeration*, und sie konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung  $x(t)$  in einem hinreichend kleinen Intervall  $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ .

**Beispiel.** Betrachten wir eine nicht-lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = \int_0^t (1 + x_k^2(s)) ds$$

gegeben, und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t \\ x_2(t) &= \int_0^t (1 + s^2) ds = t + \frac{t^3}{3} \\ x_3(t) &= \int_0^t \left(1 + \left(s + \frac{s^3}{3}\right)^2\right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \\ x_4(t) &= \int_0^t \left(1 + \left(s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{15}s^5 + \frac{1}{63}s^7\right)^2\right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Da die DGL (3.20) trennbar ist, man löst sie mit Hilfe von Trennung der Variablen und erhält

$$t = \int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x,$$

woraus folgt  $x(t) = \tan t$  im Definitionsbereich  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . In diesem Beispiel ergibt die Picarditeration die Taylorentwicklung von  $\tan t$ .

### 3.3 Existenz und Eindeutigkeit für skalare DGLen

Betrachten wir jetzt eine skalare DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

wobei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist. Wir bezeichnen die unabhängigen Variablen in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit  $(t, \mathbf{x})$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , und schreiben  $F = F(t, \mathbf{x})$ .

**Korollar 3.6** (Satz von Picard-Lindelöf für skalare DGLen) *Sei die Funktion  $F(t, \mathbf{x})$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$ . Dann hat für jeden Punkt  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$  das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (3.21)$$

eine Lösung. Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.21), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .

Insbesondere erfüllt die Funktion  $F$  die Voraussetzungen, falls  $F$  in  $\Omega$  stetig und stetig differenzierbar in  $x$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$  und erinnern uns daran, dass die DGL  $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$  äquivalent zur Vektor-DGL  $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x})$  ist, wobei

$$f(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n, F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)).$$

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich stetig in  $\Omega$ . Beweisen wir, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Wir benutzen die 1-Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $Z$  ein Zylinder in  $\Omega$ , wo  $F$  Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Es reicht zu zeigen, dass auch  $f$  in  $Z$  Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$  ist. Für  $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in Z$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\|_1 &= |\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2| + \dots + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n| + |F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \\ &= (L + 1) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1, \end{aligned}$$

also ist  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $L + 1$ .

Das Anfangswertproblem (3.21) ist äquivalent zu

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.22)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})$ . Nach Satz 3.3 (Satz von Picard-Lindelöf für Normalsysteme), hat das Anfangswertproblem (3.22) eine Lösung für jedes  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ , und zwei Lösungen von (3.22) sind identisch auf dem gemeinsamen Intervall. Deshalb gelten die gleichen Aussagen auch für (3.21), was zu beweisen war. ■

### 3.4 Maximale Lösungen

Betrachten wir wieder ein Normalsystem

$$x' = f(t, x), \quad (3.23)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist, die in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Nach Satz 3.3 (Picard-Lindelöf) sind zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

identisch im gemeinsamen Definitionsbereich. Jedoch gibt es viele Lösungen von (3.24), die auf verschiedenen Intervallen definiert sind. In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Lösung von (3.24) mit maximalem Definitionsbereich.

Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.23), die jeweils auf Intervallen  $I_1$  und  $I_2$  definiert sind. Die Lösung  $y(t)$  heißt eine *Fortsetzung* von  $x(t)$ , falls  $I_1 \subset I_2$  und  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I_1$  gilt.

**Definition.** Eine Lösung  $x(t)$  von (3.23) heißt *maximal*, wenn  $x(t)$  keine Fortsetzung (als eine Lösung) auf einem echt größeren Intervall besitzt.



**Satz 3.7** Sei die Funktion  $f(t, x)$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Dann gilt folgendes:

(a) Für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  hat das Anfangswertproblem (3.24) eine eindeutige maximale Lösung

(b) Der Definitionsbereich von einer maximalen Lösung  $x(t)$  ist ein offenes Intervall (dieses Intervall heißt maximales Existenzintervall).

(c) Ist  $x(t)$  eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich  $(a, b)$ , so verlässt  $x(t)$  jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow a$  sowie auch für  $t \rightarrow b$ .

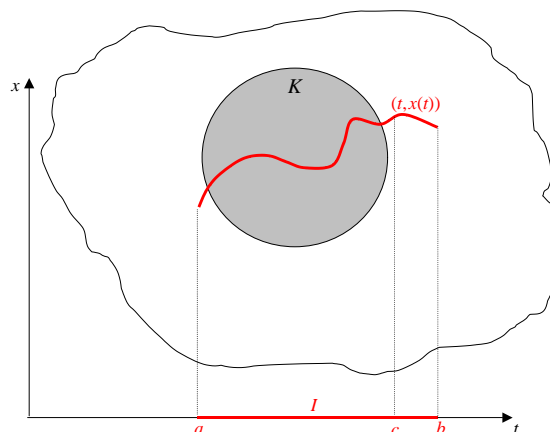


Figure 28: Die Lösung  $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow b$

Die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow b$ ” bedeutet folgendes: es existiert ein Wert  $c \in (a, b)$ , dass für jedes  $c < t < b$  der Punkt  $(t, x(t))$  (des Graphen von  $x$ ) nicht in  $K$  liegt (Fig. 28). Analog bedeutet die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow a$ ”, dass ein  $c \in (a, b)$  existiert, so dass für jedes  $a < t < c$  der Punkt  $(t, x(t))$  nicht in  $K$  liegt.

Die folgende Behauptung folgt aus (a): sind zwei maximale Lösungen  $x$  und  $y$  von (3.23) gleich für einen Wert von  $t$ , dann sind die Funktionen  $x$  und  $y$  identisch, inklusive die Übereinstimmung ihrer Definitionsbereiche, da sie gleiches Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung  $(t, x(t))$  lösen.

**Beispiel.** 1. Betrachten wir die DGL  $x' = x^2$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen. Offensichtlich ist  $x \equiv 0$  eine konstante Lösung. In den Bereichen  $\{x > 0\}$  und  $\{x < 0\}$  erhalten wir

$$\int \frac{x' dt}{x^2} = \int dt$$

und

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x^2} = \int dt = t - C,$$

woraus folgt  $x(t) = \frac{1}{C-t}$ . Diese Funktion bestimmt zwei maximale Lösungen jeweils auf den Intervallen  $(C, +\infty)$  und  $(-\infty, C)$  (Fig. 29).

Jede solche Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$ , aber auf verschiedene Weise: jede Funktion  $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ , weil  $K$  horizontal beschränkt ist,

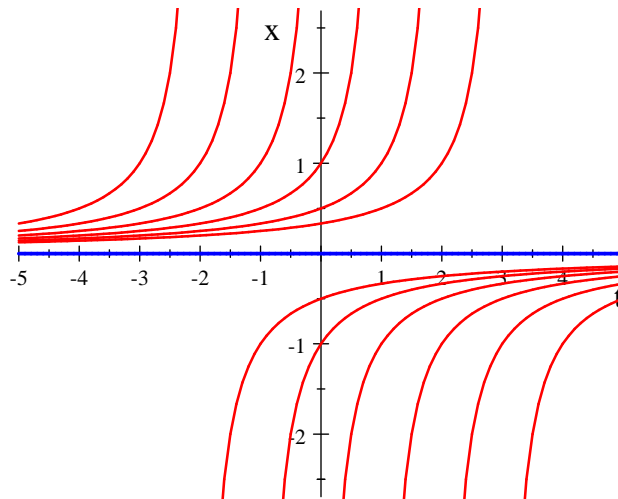


Figure 29: Die Integralkurven von  $x' = x^2$

während die Lösung  $x(t) = \frac{1}{C-t}$  die Menge  $K$  für  $t \rightarrow C$  wegen  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  verlässt, weil  $K$  vertikal beschränkt ist.

2. Betrachten wir die DGL  $x' = \frac{1}{x}$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  (d.h.  $t \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ ). Nach Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{x^2}{2} = \int x dx = \int x x' dt = \int dt = t - C$$

und somit

$$x(t) = \sqrt{2(t - C)}, \quad t > C \tag{3.25}$$

(Fig. 30). Die Funktion (3.25) ist eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich

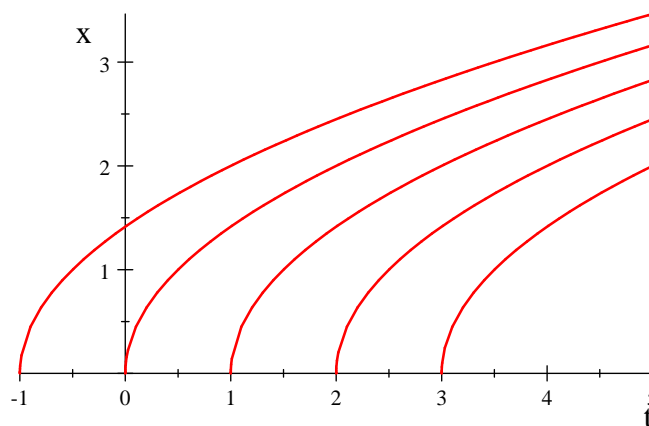


Figure 30: Die Integralkurven von  $x' = \frac{1}{x}$

$(C, +\infty)$ . Die Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow C$ , weil  $(t, x(t)) \rightarrow (C, 0)$  und der Punkt  $(C, 0)$  auf der Grenze von  $\Omega$  liegt.

3. Die DGL  $x' = x^2 + 1$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$  hat die Lösung

$$x(t) = \tan(t - C), \quad t \in \left(C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right),$$

die offensichtlich jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  verlässt (Fig. 31).

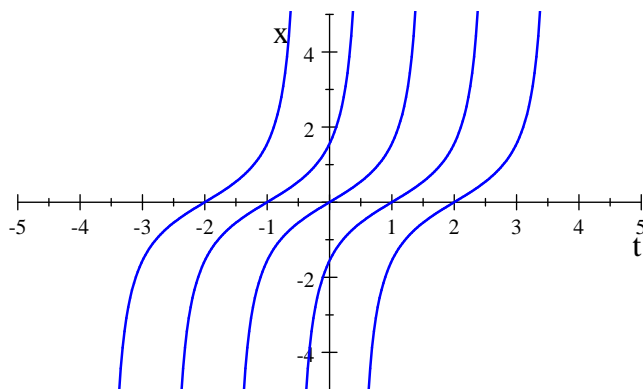


Figure 31: Die Integralkurven von  $x' = x^2 + 1$

Für den Beweis von Satz 3.7 brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.8** Sei  $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha \in A}$  eine Menge von Lösungen des AWP (3.24), wobei  $A$  eine Indexmenge ist, und die Funktion  $x_\alpha$  auf einem Intervall  $I_\alpha$  definiert ist. Setzen wir

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$$

und definieren eine Funktion  $x(t)$  auf  $I$  wie folgt:

$$x(t) = x_\alpha(t) \text{ falls } t \in I_\alpha. \quad (3.26)$$

Dann  $I$  ist ein Intervall, die Funktion  $x(t)$  ist wohldefiniert und löst (3.24) auf  $I$ .

Die durch (3.26) definierte Funktion  $x(t)$  heißt die *Vereinigung* den Lösungen  $\{x_\alpha(t)\}$ , weil der Graph von  $x(t)$  die Vereinigung der Graphen aller Funktionen  $x_\alpha(t)$  ist.

**Beweis von Lemma 3.8.** Die Funktion  $x(t)$  ist wohldefiniert, wenn die rechte Seite der Identität (3.26) unabhängig von  $\alpha$  ist. Gehört  $t$  zu den zwei Intervallen  $I_\alpha$  und  $I_\beta$ , dann gilt  $x_\alpha(t) = x_\beta(t)$  nach dem Eindeutigkeit von Satz 3.3, woraus folgt, dass der Wert von  $x(t)$  unabhängig von der Wahl des Indexes  $\alpha$  ist.

Jetzt beweisen wir, dass  $I$  ein Intervall ist, d.h. mit Punkten  $a < b$  enthält  $I$  auch das ganze Intervall  $[a, b]$ . Es gibt die Indizes  $\alpha, \beta \in A$  mit  $a \in I_\alpha$  und  $b \in I_\beta$ . Da die beiden Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  auch  $t_0$  enthalten, ist die Vereinigung  $I_\alpha \cup I_\beta$  auch ein Intervall, das  $a$  und  $b$  enthält, woraus  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$  folgt und somit  $[a, b] \subset I$  (Fig. 32).

Um zu beweisen, dass  $x$  eine Lösung von (3.24) ist, zeigen wir erst, dass  $x(t)$  stetig auf  $I$  ist. Es reicht zu zeigen, dass  $x(t)$  stetig auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall  $[a, b] \subset I$  ist. Seien  $\alpha, \beta \in A$  zwei Indizes, so dass  $a \in I_\alpha$ ,  $b \in I_\beta$  und somit  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$ . Da die Funktion  $x(t)$  stetig auf  $I_\alpha$  und  $I_\beta$  ist und die Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  nicht-leeren Durchschnitt haben, ist  $x(t)$  stetig auch auf  $I_\alpha \cup I_\beta$  und somit auf  $[a, b]$ .

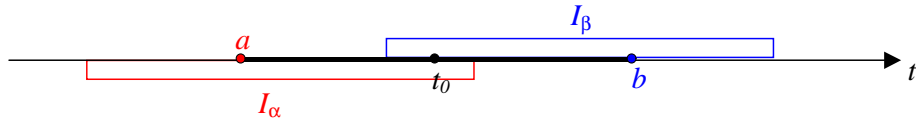


Figure 32: Intervalle  $I_\alpha$  und  $I_\beta$

Die Funktion  $x(t)$  erfüllt auf jedem Intervall  $I_\alpha$  die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Daraus folgt, dass die Gleichung auch für alle  $t \in I$  erfüllt ist und somit  $x(t)$  eine Lösung von (3.24) auf  $I$  ist. ■

**Beweis von Satz 3.7.** (a) Sei  $S$  die Menge aller Lösungen des Anfangswertproblems (3.24), und definieren wir  $x(t)$  als die Vereinigung von allen Lösungen aus  $S$ . Nach Lemma 3.8 ist die Funktion  $x(t)$  auch eine Lösung von (3.24) und deshalb  $x \in S$ . Daraus folgt, dass  $x(t)$  eine maximale Lösung ist, weil der Definitionsbereich von  $x(t)$  die Definitionsbereiche aller anderen Lösungen aus  $S$  enthält und somit  $x(t)$  nicht fortsetzbar auf ein echt größeres Intervall ist.

Sei  $y(t)$  auch eine maximale Lösung von (3.24). Da  $y \in S$ , enthält der Definitionsbereich  $I_x$  von  $x$  den Definitionsbereich  $I_y$  von  $y$ , also  $I_x \supset I_y$ . Da  $y$  maximal ist, muss  $I_x = I_y$  gelten, woraus folgt, dass  $x$  und  $y$  identisch sind.

(b) Sei  $I$  der Definitionsbereich einer maximalen Lösung  $x(t)$ . Dann ist  $I$  ein Intervall, und wir beweisen, dass  $I$  offen ist. Angenommen das Gegenteil gilt,  $I$  ist nicht offen, es gehört z.B. der Endpunkt  $a := \inf I$  zu  $I$ . Dann liegt der Punkt  $(a, x(a))$  in  $\Omega$ , und nach Satz 3.3 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = x(a) \end{cases}$$

eine Lösung auf einem Intervall  $(a - r, a + r)$  mit  $r > 0$  (Fig. 33).

Dann ist die Vereinigung  $z(t)$  der Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die auch für  $t < a$  definiert ist, was bedeutet, dass die Lösung  $x(t)$  auf ein echt größeres Intervall fortsetzbar ist, was im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  steht.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass also  $x(t)$  eine gewisse kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow a$  nicht verlässt. Dann existiert eine Folge  $t_k \in (a, b)$ , so dass  $t_k \rightarrow a$  und  $(t_k, x_k) \in K$ , wobei  $x_k = x(t_k)$ . Da jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in  $K$  besitzt, können wir voraussetzen, dass die ganze Folge  $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$  gegen einen Punkt  $(a, q) \in K$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert. Wegen  $(a, q) \in \Omega$  existiert ein Zylinder

$$Z := [a - \delta, a + \delta] \times \overline{B}(q, \varepsilon) \subset \Omega,$$

wo die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Betrachten wir für ein  $k$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_k) = x_k \end{cases} \quad (3.27)$$

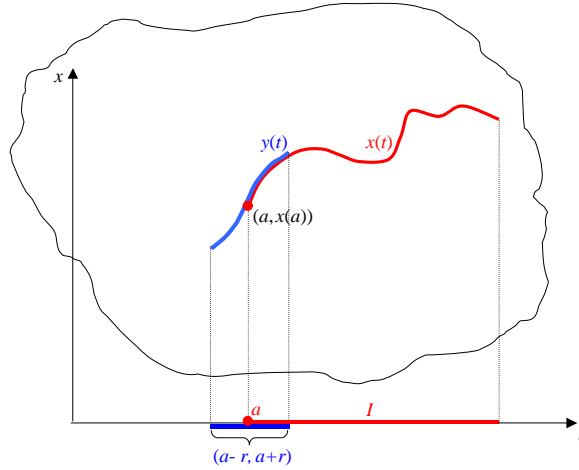


Figure 33: Die Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

(Fig. 34).

Ist  $k$  hinreichend groß, so ist  $(t_k, x_k)$  hinreichend nahe bei  $(a, q)$ , und dann ist der Zylinder

$$Z_k = [t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}] \times \overline{B}(x_k, \frac{\varepsilon}{2})$$

eine Teilmenge von  $Z$ . Insbesondere ist die Funktion  $f$  in  $Z_k$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$  und

$$\sup_{Z_k} \|f\| \leq \sup_Z \|f\| =: M.$$

Deshalb hat (3.27) eine Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $(t_k - r, t_k + r)$ , wobei

$$r := \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2L}\right) > 0$$

(siehe den Beweis von Satz 3.3). Es ist wichtig zu betonen, dass  $r$  von  $k$  unabhängig ist. Ist  $k$  hinreichend groß, so gilt  $a \in (t_k - r, t_k + r)$ , insbesondere  $t_k - r < a$ , so dass  $y(t)$  auch für die Werte  $t < a$  definiert ist. Da die Funktion  $x(t)$  auch das Anfangswertproblem (3.27) löst, ist die Vereinigung von  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  auch für  $t < a$  definiert ist. ■

### 3.5 Stetigkeit von Lösungen bezüglich $f(t, x)$

Seien  $\Omega$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f, g$  zwei Abbildungen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die stetig und bezüglich  $x$  lokal Lipschitz-stetig sind, wie im Satz von Picard-Lindelöf. Betrachten wir zwei Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

und

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

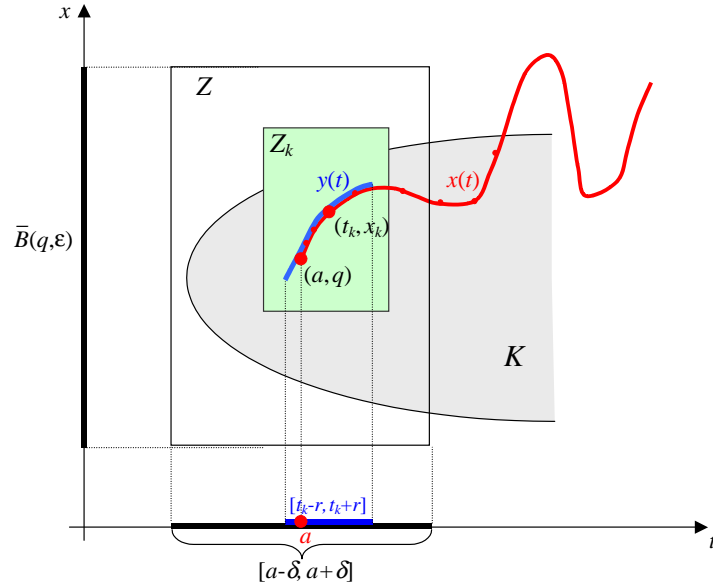


Figure 34: Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

mit gleichem Anfangswert  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .

Wir behandeln die Funktion  $f$  als fest, die Funktion  $g$  als variabel. Sei  $x(t)$  eine Lösung von (3.28). Unsere Absicht ist zu zeigen, dass  $y$  nahe bei  $x$  ist, vorausgesetzt, dass  $g$  nahe bei  $f$  ist. Dieses Resultat hat eine theoretische sowie auch praktische Bedeutung. Ist z.B. die Funktion  $f(t, x)$  nur ungefähr bekannt, so löst man statt des genauen AWP (3.28) ein anderes AWP (3.29) mit  $g \approx f$ . In diesem Fall ist es wichtig zu wissen, ob  $y(t) \approx x(t)$  ist, und eine Abschätzung des Fehlers  $\|x(t) - y(t)\|$  zu haben.

**Satz 3.9** Sei  $x(t)$  eine Lösung des AWP (3.28), die auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, wobei  $\alpha < t_0 < \beta$ . Dann existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\eta > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: ist  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige und in  $x$  lokal Lipschitz-stetige Funktion mit

$$\sup_{\Omega} \|f - g\| \leq \eta, \quad (3.30)$$

so existiert eine Lösung  $y(t)$  des AWP (3.29), die auf  $[\alpha, \beta]$  definiert ist; außerdem erfüllt die Lösung  $y(t)$  die folgende Ungleichung

$$\sup_{[\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq \epsilon. \quad (3.31)$$

**Beweis.** Wir fangen mit der folgenden Abschätzung der Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  an.

**Behauptung 1.** Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die Lösungen von jeweils (3.28) und (3.29), die auf einem gleichen Intervall  $(a, b)$  definiert sind, wobei  $a < t_0 < b$ . Angenommen es existiert eine Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (A) die Graphen von  $x(t)$  und  $y(t)$  sind in  $K$  enthalten;
  - (B) die Funktion  $f(t, x)$  ist in  $x$  Lipschitz-stetig auf  $K$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ .
- Dann gilt

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_K \|f - g\|. \quad (3.32)$$

Die beiden Funktionen  $x$  und  $y$  erfüllen die Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{und} \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds.$$

Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir für jedes  $t \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right|. \end{aligned}$$

Da die Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elemente von  $K$  sind, kann der erste Integrand durch die Lipschitz-Bedingung in  $K$  abgeschätzt werden:

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(s) - y(s)\|.$$

Der zweite Integral schätzen wir ab wie folgt:

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \leq \sup_K \|f - g\| |t - t_0| \leq \sup_K \|f - g\| (b - a) =: C,$$

woraus folgt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \right| + C. \quad (3.33)$$

Anwendung des Grönwall-Lemmas zur Funktion  $\|x(t) - y(t)\|$  ergibt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C e^{L|t-t_0|} \leq e^{L(b-a)} (b - a) \sup_K \|f - g\|,$$

was äquivalent zu (3.32) ist.

Die Ungleichung (3.32) bedeutet insbesondere folgendes: ist  $\sup_\Omega \|f - g\|$  klein, dann ist auch die Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  klein, was im Grunde die Behauptung von Satz 3.9 ist. Aber bevor wir Behauptung 1 anwenden können, müssen wir auf die folgenden Fragen antworten:

- warum ist die Lösung  $y(t)$  auf dem ganzen Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert?
- warum existiert eine Teilmenge  $K \subset \Omega$  mit den Eigenschaften (A) und (B)?

Zunächst bilden wir solche Mengen  $K$ . Für jedes  $\varepsilon \geq 0$  betrachten wir die Menge

$$K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\}. \quad (3.34)$$

Insbesondere ist  $K_0$  der Graph der Funktion  $x(t)$ , und  $K_\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  ist eine abgeschlossene  $\varepsilon$ -Umgebung von  $K_0$  bezüglich der Variable  $x$  (Fig. 35).

Die Menge  $K_0$  ist kompakt, weil  $K_0$  das Bild des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  unter der stetigen Abbildung  $t \mapsto (t, x(t))$  ist. Daraus folgt, dass  $K_\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$  auch eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Behauptung 2.** *Es existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und  $f$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist.*

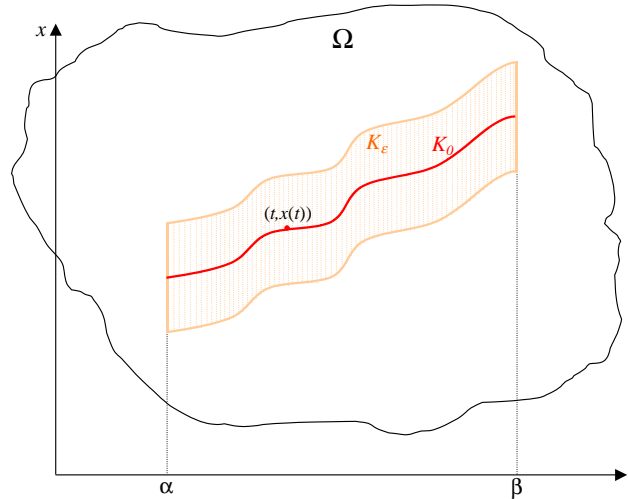


Figure 35: Die Mengen  $K_0$  und  $K_\varepsilon$

Nach der Lipschitz-Bedingung, existieren für jedes  $(t, x) \in \Omega$  (insbesondere für  $(t, x) \in K_0$ ) die Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$ , so dass der Zylinder

$$Z = [t - \delta, t + \delta] \times \overline{B}(x, \varepsilon)$$

ein Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist (Fig. 36).

Betrachten wir auch den offenen Zylinder

$$U = (t - \delta, t + \delta) \times B(x, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Variieren des Punktes  $(t, x)$  in  $K_0$  ergibt eine Überdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylindern  $U$ . Da  $K_0$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylindern, d.h. es existieren eine endliche Folge von Punkte  $\{(t_i, x_i)\}_{i=1}^m$  aus  $K_0$  und entsprechende Konstanten  $\varepsilon_i, \delta_i > 0$ , so dass die Zylinder

$$U_i = (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \times B(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i)$$

die Menge  $K_0$  überdecken. Bezeichnen wir mit  $Z_i$  den Zylinder

$$Z_i = [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i] \times \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$$

und mit  $L_i$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  in  $Z_i$  (wir erinnern uns daran, dass nach der Wahl von  $\varepsilon_i, \delta_i$  auf jedem Zylinder  $Z_i$  die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist).

Wir definieren  $\varepsilon$  und  $L$  durch

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i, \quad L = \max_{1 \leq i \leq m} L_i, \quad (3.35)$$

und zeigen, dass die Menge  $K_\varepsilon$  die Eigenschaften (A) und (B) von Behauptung erfüllt, d.h.  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und die Funktion  $f$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Für jeden Punkt  $(t, x) \in K_\varepsilon$  haben wir nach Definition von  $K_\varepsilon$ , dass  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $(t, x(t)) \in K_0$  und

$$\|x - x(t)\| \leq \varepsilon.$$



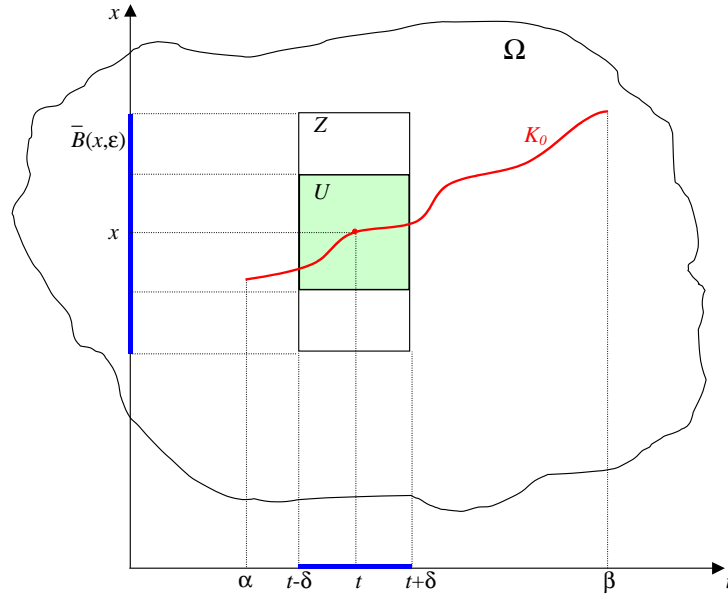


Figure 36: Die Zylinder  $Z$  und  $U$

Der Punkt  $(t, x(t))$  gehört zu einem Zylinder  $U_i$ , also

$$t \in (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \quad \text{und} \quad \|x(t) - x_i\| < \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

(Fig. 37).

Nach der Dreiecksungleichung haben wir

$$\|x - x_i\| \leq \|x - x(t)\| + \|x(t) - x_i\| < \varepsilon + \varepsilon_i/2 \leq \varepsilon_i,$$

wobei man benutzt, dass nach (3.35)  $\varepsilon \leq \varepsilon_i/2$  gilt. Daraus folgt, dass  $x \in B(x_i, \varepsilon_i)$  und somit  $(t, x) \in Z_i$ . Insbesondere erhalten wir  $(t, x) \in \Omega$ , was beweist, dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$ .

Sind  $(t, x), (t, y) \in K_\varepsilon$ , dann gehören die beiden Punkte  $x, y$  zur gleichen Kugel  $B(x_i, \varepsilon_i)$ , die von der Bedingung  $(t, x(t)) \in U_i$  bestimmt wird. Dann gilt  $(t, x), (t, y) \in Z_i$  und, weil  $f$  Lipschitz-stetig auf  $Z_i$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L_i$  ist, erhalten wir

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_i \|x - y\| \leq L \|x - y\|,$$

wobei man benutzt, dass nach (3.35)  $L_i \leq L$  gilt. Das beweist, dass  $f$  Lipschitz-stetig in  $K_\varepsilon$  ist, was in Behauptung 2 zu beweisen war.

Jetzt beweisen wir die Existenz einer Lösung  $y(t)$  von (3.29), die auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist. Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung von (3.29). Nach Satz 3.7 ist  $I$  ein offenes Intervall, und  $t_0 \in I$ . Wir bestimmen zunächst ein Intervall  $(a, b)$ , wo die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  definiert sind und ihre Graphen über  $(a, b)$  in  $K_\varepsilon$  enthalten sind. Wegen  $y(t_0) = x_0$  gehört der Punkt  $(t_0, y(t_0))$  des Graphen von  $y(t)$  zu  $K_\varepsilon$ . Nach Satz 3.7 verlässt der Graph von  $y(t)$  die Menge  $K_\varepsilon$  für  $t$  gegen die Endpunkte von  $I$ , also  $(t, y(t)) \notin K_\varepsilon$ , wenn  $t$  nahe bei den Endpunkten von  $I$  ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} a &= \sup \{t \in I, t < t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\}, \\ b &= \inf \{t \in I, t > t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\}, \end{aligned}$$

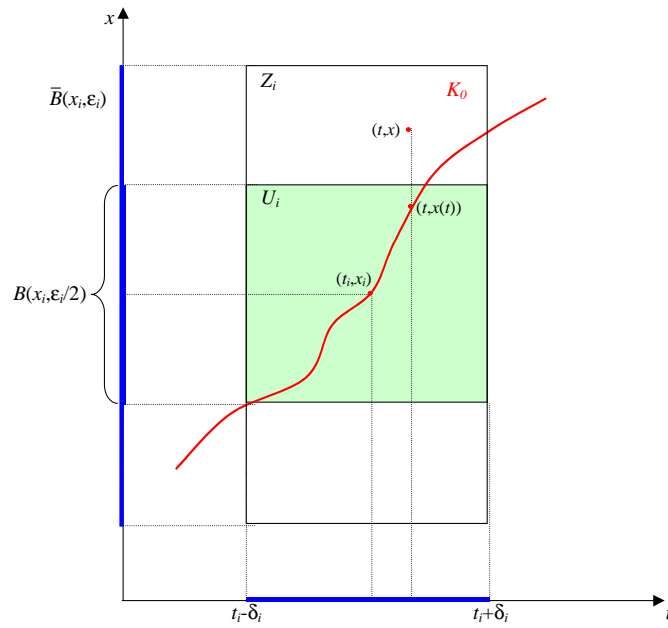


Figure 37: Die Zylinder  $U_i$  und  $Z_i$

so dass  $a, b \in I$  und  $a < t_0 < b$ . Wir betonen, dass  $y(t)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert ist. Für jedes  $t \in (a, b)$  haben wir nach Definition von  $a$  und  $b$ , dass  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$  und somit  $t \in [a, b]$ , woraus  $[a, b] \subset [a, b]$  folgt. Man kann auch sagen, dass  $[a, b]$  maximales Intervall ist mit der Eigenschaft, dass der Graph von  $y(t)$  über  $[a, b]$  in  $K_\varepsilon$  enthalten ist (Fig. 38).

Der letzte Schritt des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass  $[a, b] = [\alpha, \beta]$ . Daraus würde folgen, dass die Lösung  $y(t)$  auf ganzem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist und für jedes  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$ , also

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon,$$

was zu beweisen war. Angenommen, dass

$$\|f - g\|_{K_\varepsilon} \leq \eta,$$

wobei  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  noch bestimmt werden muss. Dann erhalten wir aus (3.32) mit  $K = K_\varepsilon$ , dass

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \|f - g\|_{K_\varepsilon} \leq e^{L(\beta-\alpha)} (\beta-\alpha) \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.36)$$

vorausgesetzt

$$\eta := \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} e^{-L(\beta-\alpha)}.$$

Mit  $t \rightarrow a+$  erhalten wir aus (3.36), dass

$$\|x(a) - y(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.37)$$

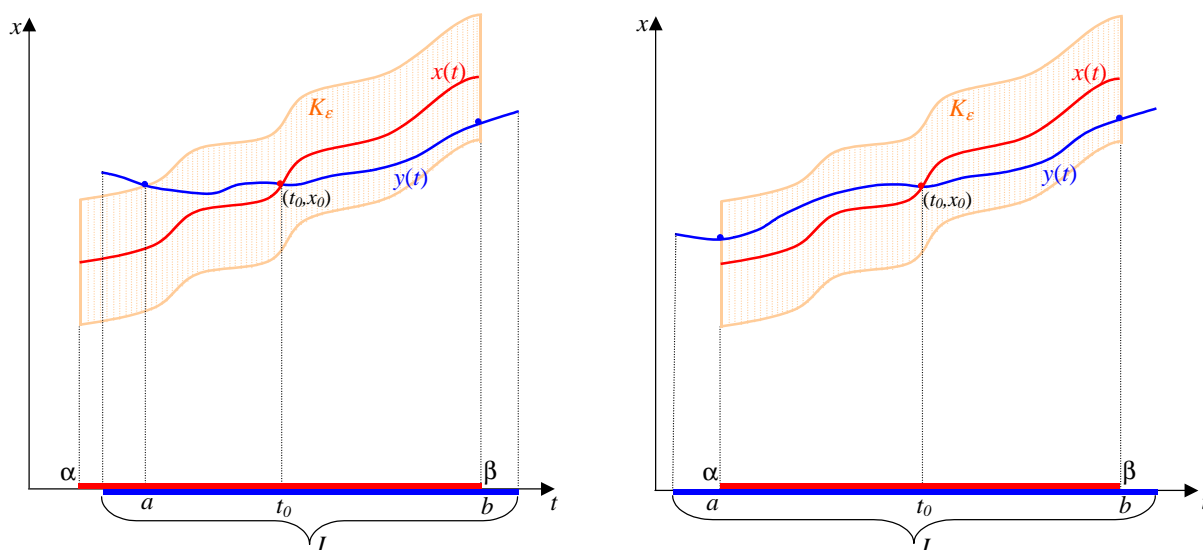


Figure 38: Definition des Intervalls  $[a, b]$ . Zwei Fälle:  $a > \alpha$  und  $a = \alpha$ .

Es folgt aus (3.37), dass  $a = \alpha$ . Ist  $a > \alpha$ , dann sind die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  in einem Intervall  $(a - r, a + r)$  mit hinreichend kleinem  $r > 0$  definiert, und es gilt in diesem Intervall  $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ , insbesondere für  $t \in (a - r, a]$ , was im Widerspruch zur Definition von  $a$  ist. Mit gleichem Argument zeigt man, dass  $b = \beta$ . ■

Aus dem Beweis ergibt sich die folgende Verfeinerung von Satz 3.9.

**Korollar 3.10** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.9 sei  $\varepsilon > 0$  eine Konstante, so dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und  $f(t, x)$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$  ist (wobei  $K_\varepsilon$  durch (3.34) definiert ist). Ist  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  hinreichend klein, so hat das AWP (3.29) eine Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\sup_{[\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|. \quad (3.38)$$

**Beweis.** Nach dem Beweis von Satz 3.9 wissen wir, dass die Kleinheit von  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  die Gleichheit  $[a, b] = [\alpha, \beta]$  ergibt. Dann folgt (3.38) aus (3.32). ■

### 3.6 Stetigkeit von Lösungen in Parameter

Betrachten wir das folgende Anfangswertproblem mit einem Parameter  $s$ :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.39)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist. Hier sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^m$ , und das Tripel  $(t, x, s)$  wird wie folgt mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  identifiziert:

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wie soll man das AWP (3.39) verstehen? Für jedes  $s \in \mathbb{R}^m$  betrachten wir die offene Menge

$$\Omega_s = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : (t, x, s) \in \Omega\}.$$

Alternativ kann  $\Omega_s$  definiert werden als der Durchschnitt  $\Omega \cap H_s$  mit der Hyperebene

$$H_s = \{(t, x, s) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\},$$

die mit  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird. Wir betonen, dass  $\Omega_s$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Ist  $(t, x) \in \Omega_s$ , dann gilt  $(t, x, s) \in \Omega$  und somit existiert eine Kugel  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  mit Zentrum an  $(t, x, s)$ , die in  $\Omega$  enthalten ist. Dann ist der Durchschnitt  $B \cap H_s$  eine Kugel in  $H_s$  mit Zentrum  $(t, x)$ , die in  $\Omega_s$  enthalten ist, woraus folgt, dass  $\Omega_s$  offen ist (Fig. 39).

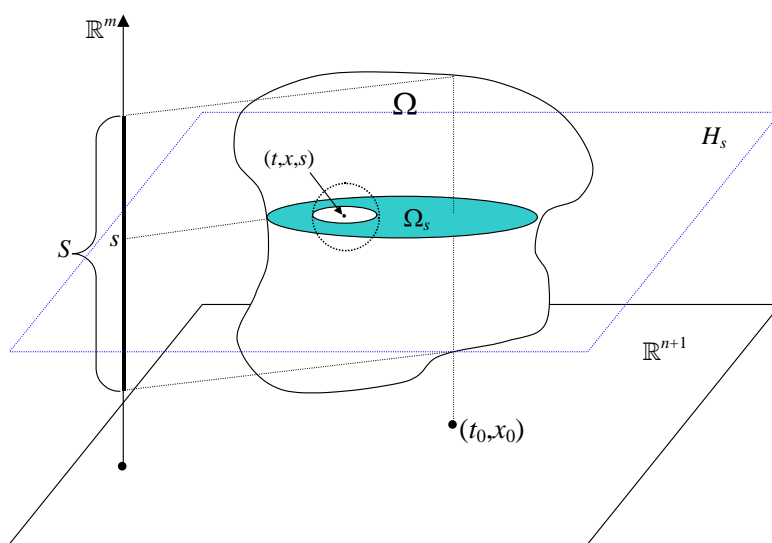


Figure 39: Menge  $\Omega_s$

Bezeichnen wir mit  $S$  die Menge der Werten von  $s$  mit  $(t_0, x_0) \in \Omega_s$ , also

$$S = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0) \in \Omega_s\} = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0, s) \in \Omega\}.$$

Wir setzen immer voraus, dass  $S$  nicht leer ist, und betrachten für jedes  $s \in S$  das Anfangswertproblem (3.39) im Definitionsbereich  $\Omega_s$ .

Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $(t, x, s)$  in  $\Omega$  und für jedes  $s \in S$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$  in  $\Omega_s$ . Nach Satz 3.7 existiert für jedes  $s \in S$  die maximale Lösung von (3.39), die mit  $x(t, s)$  bezeichnet wird. Sei  $I_s$  der Definitionsbereich der Funktion  $t \mapsto x(t, s)$ , also  $I_s$  ein offenes Intervall. Dann ist der Definitionsbereich  $U$  der Funktion  $(t, s) \mapsto x(t, s)$  durch die Identität

$$U = \{(t, s) \in \mathbb{R}^{m+1} : s \in S, t \in I_s\}$$

gegeben (Fig. 40).

**Satz 3.11** *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Menge  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$ , und die Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig bezüglich  $(t, s)$ .*

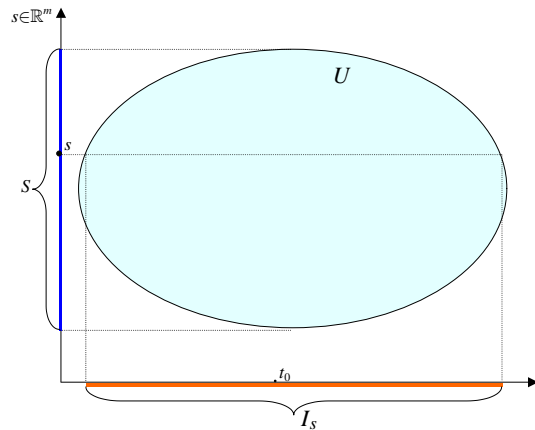


Figure 40: Die Menge  $U$

**Beweis.** Halten wir einen Wert  $s_0 \in S$  fest und betrachten die Lösung  $x(t) = x(t, s_0)$ , die auf dem Intervall  $I_{s_0}$  definiert ist. Sei  $[\alpha, \beta]$  ein Teilintervall von  $I_{s_0}$  mit  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . Wir beweisen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$[\alpha, \beta] \times \bar{B}(s_0, \delta) \subset U, \quad (3.40)$$

was die Offenheit von  $U$  implizieren wird. Die Kugeln in allen Räumen  $\mathbb{R}^k$  werden bezüglich der  $\infty$ -Norm betrachtet, so dass das Produkt von zwei Kugeln wieder eine Kugel ist (Fig. 41).

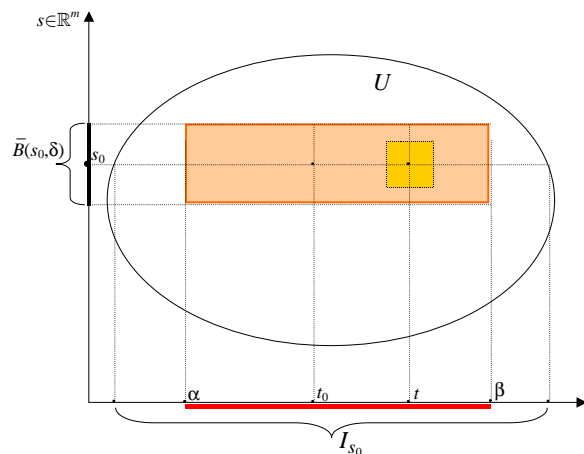


Figure 41: Die Menge  $U$  ist offen

Die Funktion  $x(t)$  löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $f(t, x) := f(t, x, s_0)$ . Betrachten wir noch einen Wert von  $s \in \bar{B}(s_0, \delta)$  und die Funktion  $y(t) = x(t, s)$ , die das folgende Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases} y' = g(t, y), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $g(t, y) = f(t, y, s)$ . Um (3.40) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass die Lösung  $y(t)$  auf ganzem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $\|s - s_0\|$  hinreichend klein ist, also dass  $\delta$  hinreichend klein ist. Dafür betrachten wir die Menge

$$K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\},$$

(vgl. der Beweis von Satz 3.9), die für hinreichend kleines  $\varepsilon$  eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, und die Funktion  $f(t, x)$  in  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Da  $K_\varepsilon$  eine kompakte Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, gilt für hinreichend kleines  $\delta > 0$  die Inklusion

$$K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta) \subset \Omega,$$

was mit dem gleichen Argument bewiesen wird wie die Inklusion  $K_\varepsilon \subset \Omega_{s_0}$  (Fig. 42).

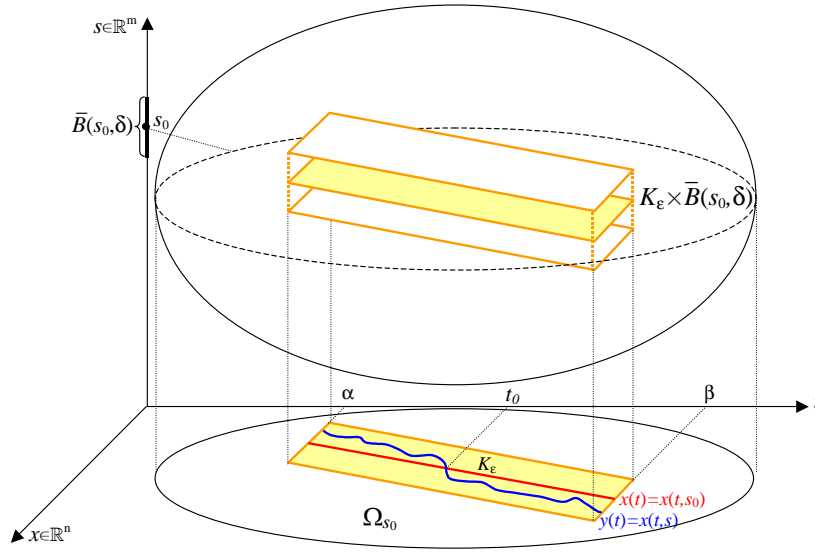


Figure 42: Die Mengen  $K_\varepsilon$  und  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$

Insbesondere gilt  $K_\varepsilon \subset \Omega_s$  für alle  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$ , und somit ist  $g(t, y)$  auch auf  $K_\varepsilon$  definiert. Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig ist, ist sie gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$ , insbesondere auf  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$ . Daraus folgt, dass

$$\sup_{(t,x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x, s_0) - f(t, x, s)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, \quad (3.41)$$

also, es wird  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  für  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$  beliebig klein sein, vorausgesetzt  $\delta$  ist hinreichend klein. Dies angenommen, erhalten wir nach Korollar 3.10, dass die Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, woraus (3.40) folgt.

Darüber hinaus ergibt die Ungleichung (3.38) in Korollar 3.10 folgendes:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| &= \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq C \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\| \\ &= C \sup_{(t,x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x, s_0) - f(t, x, s)\|, \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei  $C := e^{L(\beta-\alpha)}(\beta - \alpha)$ . Es folgt aus (3.41) und (3.42), dass

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, \quad (3.43)$$

so dass  $x(t, s)$  stetig bezüglich  $s$  in  $s = s_0$  ist, und zwar ist die Stetigkeit gleichmäßig bezüglich  $t \in [\alpha, \beta]$ . Da  $x(t, s)$  für jedes  $s$  stetig in  $t$  ist, folgt, dass  $x$  stetig in  $(t, s)$  ist.

In der Tat zeigen wir, dass für jedes  $(t_0, s_0) \in U$  (wobei  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  nicht unbedingt der Anfangswert ist) gilt  $x(t, s) \rightarrow x(t_0, s_0)$  für  $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$ . Anwendung von (3.43) und die Stetigkeit der Funktion  $x(t, s_0)$  in  $t$  ergeben

$$\begin{aligned} \|x(t, s) - x(t_0, s_0)\| &\leq \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, t \rightarrow t_0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Als ein Beispiel von Anwendung von Satz 3.11, betrachten wir die Abhängigkeit der Lösung von dem Anfangswert.

**Korollar 3.12** *Betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.44)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion in einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist. Sei  $f$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  bezeichnen wir mit  $x(t, t_0, x_0)$  die maximale Lösung von (3.44). Dann ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+2}$  definiert und stetig in  $(t, t_0, x_0)$ .

**Beweis.** Betrachten wir eine neue Funktion  $y(t) = x(t + t_0) - x_0$ , die die folgende DGL erfüllt:

$$y'(t) = x'(t + t_0) = f(t + t_0, x(t + t_0)) = f(t + t_0, y(t) + x_0).$$

Betrachten wir die Variable  $s := (t_0, x_0)$  als einen Parameter der Dimension  $n + 1$  und definieren eine Funktion  $F$  durch

$$F(t, y, s) = f(t + t_0, y + x_0).$$

Dann löst  $y(t)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = F(t, y, s) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich der Funktion  $F$  enthält den Punkt  $(t, y, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  genau dann, wenn

$$(t + t_0, y + x_0) \in \Omega,$$

woraus folgt, dass der Definitionsbereich von  $F$  die offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+2}$  ist, die das Vorbild von  $\Omega$  unter der Abbildung  $(t, y, t_0, x_0) \mapsto (t + t_0, y + x_0)$  ist. Da die Funktion  $F(t, y, s)$  stetig in  $(t, y, s)$  und lokal Lipschitz-stetig in  $y$  ist, erhalten wir nach Satz 3.11, dass die maximale Lösung  $y = y(t, s)$  auf einer offenen Menge definiert und stetig in  $(t, s)$  ist. Somit ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0) = y(t - t_0, t_0, x_0) + x_0$  auch auf einer offenen Menge definiert und stetig in  $(t, t_0, x_0)$ . ■

## 3.7 Differenzierbarkeit von Lösungen in Parameter

### 3.7.1 Die Variationsgleichung

Betrachten wir wieder das Anfangswertproblem mit Parameter  $s \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.45)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist,  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist, und

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für die Ableitung von  $f$  in  $x$ :

$$f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $k = 1, \dots, n$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_x$  eine  $n \times n$  Matrix ist. Diese Matrix heißt auch die *Jacobi-Matrix* von  $f$  in  $x$ . Analog definieren wir die Ableitung von  $f$  in  $s$ :

$$f_s = \partial_s f = \frac{\partial f}{\partial s} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial s_l} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_s$  eine  $n \times m$  Matrix ist. Wir betrachten die Ableitungen  $f_x$  und  $f_s$  als Funktionen auf  $\Omega$  mit Werten in jeweils  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

Nach Lemma 3.1, ist  $f_x$  stetig in  $\Omega$ , dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass  $f$  und  $f_x$  stetig in  $\Omega$  sind, so dass die obigen Ergebnisse verwendbar sind, und untersuchen die Existenz und die Eigenschaften der Ableitung  $y = \partial_s x$ .

Sei  $x(t, s)$  die maximale Lösung von (3.45). Nach Satz 3.11 ist der Definitionsbereich  $U$  von  $x(t, s)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$  und die Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig.

**Satz 3.13** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist in  $\Omega$  stetig und stetig differenzierbar in  $x$  und  $s$ . Dann ist die Funktion  $x(t, s)$  stetig differenzierbar in  $(t, s) \in U$  und die Ableitung  $y = \partial_s x$  löst das folgende Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Wir beweisen diesen Satz später. Die Ableitung  $\partial_s x = \left( \frac{\partial x_k}{\partial s_l} \right)$  ist eine  $n \times m$  Jacobi-Matrix, wobei  $k = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind. Deshalb nimmt die Funktion  $y(t, s) = \partial_s x$  die Werte in  $\mathbb{R}^{n \times m}$  an. Die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.46) sind auch  $n \times m$  Matrizen:  $f_s$  ist eine  $n \times m$  Matrix nach Definition, und  $f_x y$  ist das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $f_x$  und der  $n \times m$  Matrix  $y$ , was wieder eine  $n \times m$  Matrix ist.

Die Bezeichnung  $f_x(t, x(t, s), s)$  bedeutet, dass man erst die Ableitung  $f_x(t, x, s)$  berechnet und danach den Wert von  $x = x(t, s)$  einsetzt. Die gleiche Erklärung gilt auch für  $f_s(t, x(t, s), s)$ .



Die DGL in (3.46) heißt die *Variationsgleichung* von der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang der Lösung  $x(t, s)$ .

Wir betonen, dass die Variationsgleichung linear ist. In der Tat für jedes  $s$  kann die Variationsgleichung in der Form

$$y' = a(t)y + b(t)$$

geschrieben werden, wobei

$$a(t) = f_x(t, x(t, s), s), \quad b(t) = f_s(t, x(t, s), s).$$

Die Funktionen  $a(t)$  und  $b(t)$  sind stetig, weil  $f$  und  $x(t, s)$  stetig sind. Ist  $I_s$  der Definitionsbereich der Lösung  $t \mapsto x(t, s)$ , so ist  $I_s \times \mathbb{R}^{n \times m}$  der Definitionsbereich der Variationsgleichung. Nach Satz 2.3 existiert die Lösung  $y(t)$  von (3.46) auf dem ganzen Intervall  $I_s$ . Deshalb kann den Satz 3.13 wie folgt verstanden werden: sind  $x(t, s)$  die Lösung von (3.45) auf  $I_s$  und  $y(t)$  die Lösung von (3.46) auf  $I_s$ , dann gilt  $y(t) = \partial_s x(t, s)$  für alle  $t \in I_s$ .

Somit liefert der Satz 3.13 die Methode für Bestimmung der Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  für einen Wert von  $s$ , ohne die Lösung  $x(t, s)$  für alle  $s$  berechnen zu müssen.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem mit Parameter

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

im Bereich  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (also,  $t > 0$  und  $x, s$  sind beliebig reell). Berechnen wir  $x(t, s)$  und  $\partial_s x$  für  $s = 0$ . Da die Funktion  $f(t, x, s) = x^2 + 2s/t$  stetig differenzierbar in  $(x, s)$  ist, ist die Lösung  $x(t, s)$  stetig differenzierbar in  $(t, s)$ .

Für  $s = 0$  haben wir das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

das man löst und erhält  $x(t, 0) = -\frac{1}{t}$ . Da  $f_x = 2x$  und  $f_s = 2/t$ , erhalten wir die Variationsgleichung entlang diese Lösung

$$y' = \left( f_x(t, x, s)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y + \left( f_s(t, s, x)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) = -\frac{2}{t}y + \frac{2}{t}.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung der Form  $y' = a(t)y + b(t)$ , die man mit Hilfe der Identität

$$y = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

löst, wobei  $A(t)$  eine Stammfunktion von  $a(t) = -2/t$  ist (vgl. Satz 1.4). Setzen wir  $A(t) = -2 \ln t$  ein und erhalten

$$y(t) = t^{-2} \int t^2 \frac{2}{t} dt = t^{-2} (t^2 + C) = 1 + Ct^{-2}.$$

Die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$  ist mit  $C = -1$  erfüllt, so dass  $y(t) = 1 - t^{-2}$ . Nach Satz 3.13 beschliessen wir, das  $\partial_s x(t, 0) = 1 - t^{-2}$ .

Die Taylorentwicklung von  $x(t, s)$  erster Ordnung in  $s \rightarrow 0$  ist wie folgt:

$$x(t, s) = x(t, 0) + \partial_s x(t, 0) s + o(s) \text{ as } s \rightarrow 0,$$

also

$$x(t, s) = -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s + o(s) \text{ as } s \rightarrow 0.$$

Deshalb erhalten wir für kleinen Werten von  $s$  eine Annäherung

$$x(t, s) \approx -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s.$$

Später können wir die weiteren Terme in der Taylorentwicklung der Lösung bestimmen.

Besprechen wir weiter die Variationsgleichung (3.46). Es ist einfach (3.46) zu gewinnen, vorausgesetzt, dass die gemischten Ableitungen  $\partial_s \partial_t x$  und  $\partial_t \partial_s x$  existieren und sind gleich. Ableitung die Gleichung (3.45) in  $s$  mit Hilfe von Kettenregel ergibt

$$\partial_t \partial_s x = \partial_s (\partial_t x) = \partial_s [f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s) \partial_s x + f_s(t, x(t, s), s),$$

woraus (3.46) folgt nach Einsetzen  $\partial_s x = y$ . Obwohl dieses Argument kein Beweis von Satz 3.13 ist, es hilft die Variationsgleichung zu erinnern.

Die Existenz und die Gleichheit der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  gelten unter den Bedingungen von Satz 3.13, aber im Beweis erhält man sie erst nach der Variationsgleichung<sup>17</sup> (vgl. die Bemerkung nach dem Beweis).

Man kann die Variationsgleichung (3.46) auch durch die Linearisierung gewinnen, wie folgt. Halten wir fest den Wert  $s = s_0$  und setzen  $x(t) = x(t, s_0)$ . Da  $f(t, x, s)$  stetig differenzierbar in  $x$  und  $s$  ist und somit auch differenzierbar in  $(x, s)$ , können wir für jedes  $t$  schreiben

$$f(t, x, s) = f(t, x(t), s_0) + f_x(t, x(t), s_0) (x - x(t)) + f_s(t, x(t), s_0) (s - s_0) + R,$$

wobei  $R$  der Restterm ist, also

$$R = o(\|x - x(t)\| + \|s - s_0\|) \text{ für } \|x - x(t)\| + \|s - s_0\| \rightarrow 0.$$

Ist  $s$  nahe bei  $s_0$ , dann ist nach Satz 3.11  $x(t, s)$  nahe bei  $x(t)$ , und wir erhalten die Annäherung

$$f(t, x(t, s), s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0),$$

woraus folgt

$$x'(t, s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0).$$

Die rechte Seite ist linear bezüglich  $x(t, s)$ , und diese Gleichung heißt die *Linearisierung* der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang die Lösung  $x(t)$ . Ersetzen  $f(t, x(t), s_0)$  mit  $x'(t)$  und dividieren durch  $s - s_0$  ergibt die folgende ungefähre Gleichung für die Funktion  $z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t)}{s - s_0}$ :

$$z' \approx a(t) z + b(t).$$

Die Ableitung  $y(t) = \partial_s x|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  erfüllt diese Gleichung exakt.

---

<sup>17</sup>Man könnte die Identität  $\partial_t \partial_s x = \partial_s \partial_t x$  mit Hilfe von Satz von Schwarz beschließen, indem man zunächst die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  zeigt, aber der Beweis von Stetigkeit liefert gleichzeitig auch die Identität.

### 3.7.2 Höhere Ableitungen in $s$

Der folgende Satz ergänzt den Satz 3.13 im Fall, wenn  $f$  die höheren Ableitungen in  $s$  besitzt. Sei  $F$  eine Funktion von Variablen  $a, b, c, \dots$ . Wir schreiben

$$F \in C^k(a, b, \dots),$$

wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  von der Funktion  $F$  in Variablen  $a, b, \dots$  existieren und stetig im Definitionsbereich von  $F$  sind. Z.B., den ersten Teil von Satz 3.13 schreibt man kurz in der Form

$$f(t, x, s) \in C^1(x, s) \Rightarrow x(t, s) \in C^1(s),$$

weil nach der Voraussetzung  $f_x$  und  $f_s$  existieren und stetig sind, und nach der Behauptung  $x$  stetig differenzierbar in  $s$  ist<sup>18</sup>.

**Satz 3.14** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $\Omega$  und  $f(t, x, s) \in C^k(x, s)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $x(t, s)$  die maximale Lösung von (3.45). Dann gilt  $x(t, s) \in C^k(s)$ . Außerdem gilt die folgende Identität für jeden Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  der Ordnung  $|\alpha| \leq k$ :*

$$\partial_t \partial_s^\alpha x = \partial_s^\alpha \partial_t x. \quad (3.47)$$

Ein Multiindex  $\alpha$  ist eine Folge  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  von  $m$  nicht-negativen ganzen Zahlen  $\alpha_i$ , die Ordnung  $|\alpha|$  von  $\alpha$  ist durch  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  definiert, und die Ableitung  $\partial_s^\alpha$  ist durch

$$\partial_s^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s_1^{\alpha_1} \dots \partial s_m^{\alpha_m}}$$

definiert. Wir beweisen diesen Satz später.

Angenommen  $f \in C^2(x, s)$  und  $n = m = 1$ , bestimmen wir mit Hilfe von Satz 3.14 die zweite Ableitung  $z = \partial_{ss}x$ . Wir schreiben auch wie oberhalb  $y = \partial_s x$ . Die erste Ableitung der Gleichung  $\partial_t x = f(t, x, s)$  in  $s$  ergibt

$$\partial_s \partial_t x = f_x(t, x(t, s), s) \partial_s x + f_s(t, x(t, s), s),$$

und nach der zweiten Ableitung erhält man

$$\partial_s^2 \partial_t x = f_x(t, x(t, s), s) \partial_{ss}x + f_{xx}(t, x, s) (\partial_s x)^2 + f_{xs}(t, x, s) \partial_s x + f_{sx}(t, x, s) \partial_s x + f_{ss}(t, x, s).$$

Wegen  $\partial_s^2 \partial_t x = \partial_t \partial_s^2 x = \partial_t z$  erhalten wir für  $z$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = f_x(t, x, s) z + f_{xx}(t, x, s) y^2 + 2f_{xs}(t, x, s) y + f_{ss}(t, x, s) \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Natürlich müssen überall  $x$  und  $y$  jeweils durch  $x(t, s)$  und  $y(t, s)$  ersetzt werden.

Die Gleichung (3.48) heißt die *zweite Variationsgleichung* entlang die Lösung  $x(t, s)$ . Sie ist eine lineare DGL und sie hat den gleichen Koeffizient  $f_x(t, x(t, s), s)$  vor der

<sup>18</sup>Satz 3.13 besagt auch die stetige Differenzierbarkeit von  $x(t, s)$  in  $t$ , aber das ist offensichtlich und folgt direkt aus der Gleichung  $\partial_t x = f(t, x, s)$ .

unbekannten Funktion, wie die erste Variationsgleichung. Man löst zuerst die erste Variationsgleichung und danach benutzt die Lösung  $y$ , um die zweite Variationsgleichung zu bestimmen. Analog bestimmt man die Variationsgleichungen höherer Ordnungen.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

Wir haben schon für  $s = 0$  die Lösung und die Ableitung in  $s$  bestimmt:

$$x(t) := x(t, 0) = -\frac{1}{t} \quad \text{und} \quad y(t) := \partial_s x(t, 0) = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Jetzt bestimmen wir die zweite Ableitung  $z(t) = \partial_{ss} x(t, 0)$ . Da

$$f_x = 2x, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xs} = 0, \quad f_{ss} = 0,$$

ist die zweite Variationsgleichung wie folgt:

$$\begin{aligned} z' &= \left( f_x|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) z + \left( f_{xx}|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y^2 \\ &= -\frac{2}{t} z + 2(1 - t^{-2})^2. \end{aligned}$$

Die Lösung der linearen Gleichung  $z' = a(t)z + b(t)$  mit  $a(t) = -\frac{2}{t}$  und  $b(t) = 2(1 - t^{-2})^2$  ist

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt = t^{-2} \int 2t^2 (1 - t^{-2})^2 dt \\ &= t^{-2} \left( \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{t} - 4t + C \right) = \frac{2}{3} t - \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t} + \frac{C}{t^2}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung  $z(1) = 0$  ergibt  $C = \frac{16}{3}$  und somit

$$z(t) = \frac{2}{3} t - \frac{4}{t} + \frac{16}{3t^2} - \frac{2}{t^3}.$$

Dann ist die Taylorentwicklung von  $x(t, s)$  zweiter Ordnung in  $s \rightarrow 0$  wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t, s) &= x(t) + y(t)s + \frac{1}{2} z(t) s^2 + o(s^2) \\ &= -\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s + \left( \frac{1}{3} t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3} \right) s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Für Vergleich werden auf dem Bild 43 die folgenden Funktionen gezeigt:

1. die Lösung  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  (schwarz), die sehr präzise mit Hilfe von numerischen Methoden (MAPLE) berechnet worden ist;
2. die Näherungslösung der Ordnung 0, also die Funktion  $-\frac{1}{t}$  (blau);
3. die Näherungslösung der Ordnung 1, also die Funktion  $-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s$  (grün);

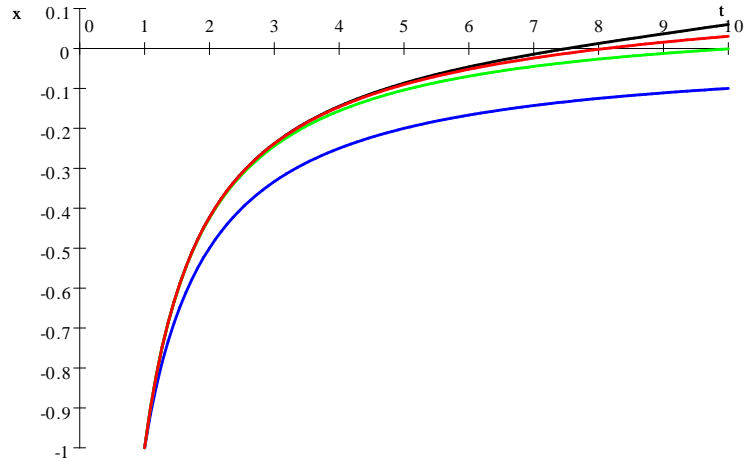


Figure 43: Die Funktion  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  und Näherungslösungen

4. die Näherungslösung der Ordnung 2, also die Funktion

$$-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s + \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}\right)s^2 \quad (\text{rot}).$$

Offensichtlich liefert die letzte Funktion die beste Näherung von  $x(t, s)$ .

Jetzt besprechen wir eine alternative Methode für Bestimmung der Variationsgleichungen erster und zweiter Ordnung. Wie zuvor, seien  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  jeweils  $x(t, 0)$ ,  $\partial_s x(t, 0)$  und  $\partial_{ss} x(t, 0)$ . Nach Taylor-Formel haben wir für  $s \rightarrow 0$

$$x(t, s) = x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2). \quad (3.49)$$

Bestimmen wir die ähnliche Entwicklung für  $x' = \partial_t x$ :

$$x'(t, s) = x'(t, 0) + \partial_s x'(t, 0) + \frac{1}{2}\partial_{ss} x'(t, s)s^2 + o(s^2)$$

und bemerken, dass nach Satz 3.14

$$\partial_s x' = \partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x = y'$$

und analog

$$\partial_{ss} x' = \partial_s y' = \partial_t \partial_s y = z',$$

woraus folgt

$$x'(t, s) = x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2). \quad (3.50)$$

Einsetzen (3.49) und (3.50) in die DGL

$$x' = x^2 + 2s/t$$

ergibt

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2) = \left(x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2)\right)^2 + 2s/t$$

und somit

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 = x^2(t) + 2x(t)y(t)s + \left(y(t)^2 + x(t)z(t)\right)s^2 + 2s/t + o(s^2).$$

Gleichsetzen die Terme mit den gleichen Potenzen von  $s$  (was gilt nach der Eindeutigkeit von Taylorentwicklung) ergibt die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}x'(t) &= x^2(t) \\y'(t) &= 2x(t)y(t) + 2s/t \\z'(t) &= 2x(t)z(t) + 2y^2(t).\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung  $x(1, s) = -1$  erhalten wir

$$-1 = x(1) + sy(1) + \frac{s^2}{2}z(1) + o(s^2),$$

woraus folgt

$$x(t) = -1, \quad y(1) = z(1) = 0.$$

Die Lösung von den obigen DGLen mit diesen Anfangsbedingungen ergibt die gleichen Funktionen  $x(t), y(t), z(t)$  wie oberhalb.

### 3.7.3 Konvexität und Hadamard-Lemma

Für den Beweis von Sätze 3.13 und 3.14 brauchen wir einige Hilfssätze aus Analysis.

**Definition.** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls  $x, y \in K \Rightarrow [x, y] \subset K$ ; d.h.  $x, y \in K$  ergibt  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$  für jedes  $\lambda \in [0, 1]$ .

Wir brauchen die folgenden zwei einfachen Eigenschaften von konvexen Mengen.

**Behauptung 1** Jede Kugel in  $\mathbb{R}^n$  bezüglich einer beliebigen Norm ist konvex.

**Beweis.** (Vgl. Lemma 3.1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es zu zeigen, dass die Kugel  $B(0, r)$  in  $\mathbb{R}^n$  konvex. Gilt  $x, y \in B(0, r)$ , so haben wir  $\|x\| < r$  und  $\|y\| < r$ , woraus folgt für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| < r,$$

und somit  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B(0, r)$ , was zu beweisen war. ■

**Behauptung 2** Sind  $A, B$  zwei konvexen Teilmengen von jeweils  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , dann ist das Produkt  $A \times B$  auch konvex.

**Beweis.** Bezeichnen wir die Elementen von  $A \times B$  mit  $(x, y)$  wobei  $x \in A$  und  $y \in B$ . Sind  $(x, y)$  und  $(x', y')$  Elementen von  $A \times B$  dann gilt für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = ((1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y') \in A \times B,$$

woraus die Konvexität von  $A \times B$  folgt. ■

**Lemma 3.15** (Hadamard-Lemma) Seien  $\Omega$  eine offene konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(x, y) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt:

$$f(y) - f(x) = \varphi(x, y)(y - x), \tag{3.51}$$

für alle  $x, y \in \Omega$  (wobei  $\varphi(x, y)(y - x)$  das Produkt der  $l \times n$  Matrix und des Spaltenvektor der Dimension  $n$ ).

Außerdem gilt für alle  $x \in \Omega$  die folgende Identität

$$\varphi(x, x) = f_x(x). \tag{3.52}$$

Bemerken wir, dass nach der Differenzierbarkeit von  $f$

$$f(y) - f(x) = f_x(x)(y - x) + o(\|y - x\|) \text{ für } y \rightarrow x.$$

Die Identität (3.51) bedeutet, dass die Term  $o(\|x - y\|)$  gelöscht werden kann, vorausgesetzt, dass  $f_x(x)$  durch eine stetige Funktion  $\varphi(x, y)$  ersetzt wird.

Betrachten wir die einfachen Beispiele von Funktionen  $f(x)$  im Fall  $n = l = 1$ . Für  $f(x) = x^2$  haben wir

$$f(y) - f(x) = (y + x)(y - x)$$

so dass (3.51) gilt mit  $\varphi(x, y) = y + x$ . Insbesondere gilt  $\varphi(x, x) = 2x = f'(x)$ . Analog haben wir für  $f(x) = x^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ :

$$f(y) - f(x) = (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1})(y - x),$$

so dass  $\varphi(x, y) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}$  und  $\varphi(x, x) = kx^{k-1} = f'(x)$ .

Im Fall  $n = l = 1$  ist der Beweis von Hadamard-Lemma einfach, weil man die Funktion  $\varphi$  wie folgt definieren kann:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, & y \neq x, \\ f'(x), & y = x, \end{cases}$$

die offensichtlich die beiden Identitäten (3.51) und (3.52) erfüllt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $\varphi$  stetig ist. Die Funktion  $\varphi$  ist offensichtlich stetig in jedem Punkt  $(x, y)$  mit  $x \neq y$ . Sie ist auch stetig in  $(x, x)$  weil für jede Folge  $\{(x_k, y_k)\}$  mit  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, x)$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt

$$\varphi(x_k, y_k) = \begin{cases} \frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}, & x_k \neq y_k, \\ f'(x_k), & x_k = y_k, \end{cases} = f'(\xi_k) \rightarrow f'(x) = \varphi(x, x),$$

wobei nach dem Mittelwertsatz  $\xi_k \in [x_k, y_k]$ , also  $\xi_k \rightarrow x$  und  $f'(\xi_k) \rightarrow f'(x)$  nach der Stetigkeit von  $f'(x)$ .

Dieses Argument funktioniert für  $n > 1$  nicht, weil man im Fall  $n > 1$  durch  $y - x$  nicht dividieren kann. Im allgemeinen Fall benutzt man einen anderen Ansatz. Darüber hinaus brauchen wir eine Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma, wenn die Funktion  $f$  von  $(t, x)$  abhängt, nicht nur von  $x$ .

**Lemma 3.16** (Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma) *Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  so dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Menge*

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \Omega\}$$

*konvex ist (vgl. Fig. 44). Sei  $f(t, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion ist so dass  $f_x$  existiert und stetig in  $\Omega$  ist. Setzen wir*

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \mathbb{R}, x, y \in \Omega_t\} \\ &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (t, x) \in \Omega, (t, y) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

*Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(t, x, y) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt*

$$f(t, y) - f(t, x) = \varphi(t, x, y)(y - x)$$

*für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ . Außerdem gilt für alle  $(t, x) \in \Omega$  die folgende Identität*

$$\varphi(t, x, x) = f_x(t, x). \tag{3.53}$$

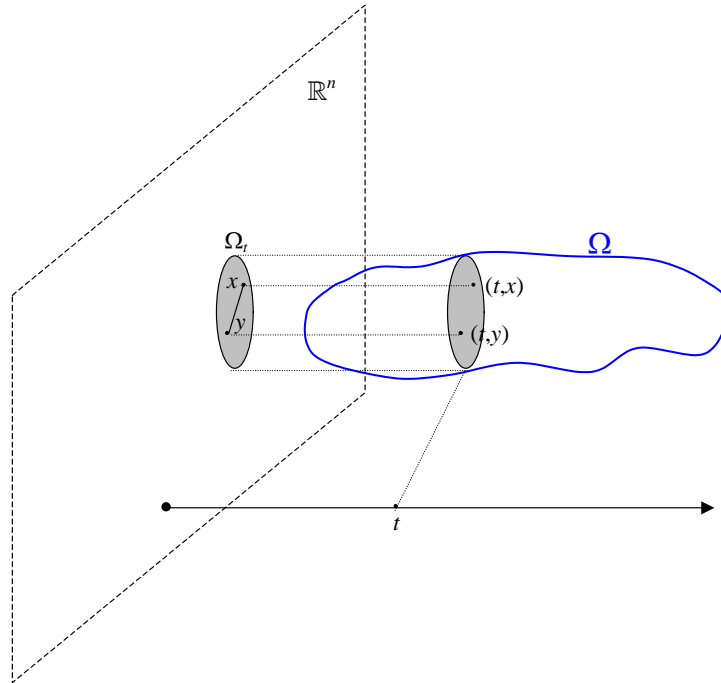


Figure 44: Die Mengen  $\Omega$  und  $\Omega_t$

Ist Funktion  $f(t, x)$  unabhängig von  $t$ , dann führt sich Lemma 3.16 auf Lemma 3.15 zurück.

**Beweis von Lemma 3.16.** Jede Komponente  $f_i$  kann separat behandelt werden und somit es reicht nur den Fall  $l = 1$  zu betrachten. In diesem Fall ist  $\varphi$  eine Zeile  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , und wir müssen beweisen, dass es  $n$  reellwertige stetige Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  auf  $\Omega'$  gibt, die die folgende Identität erfüllen

$$f(t, y) - f(t, x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y) (y_i - x_i),$$

für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ . Halten wir fest einen Punkt  $(t, x, y) \in \Omega'$  und betrachten die Funktion

$$F(\lambda) = f(t, x + \lambda(y - x))$$

für  $\lambda \in [0, 1]$ . Da  $x, y \in \Omega_t$  und  $\Omega_t$  konvex ist, liegt der Punkt  $x + \lambda(y - x)$  in  $\Omega_t$ . Dann gilt  $(t, x + \lambda(y - x)) \in \Omega$  und somit ist die Funktion  $F(\lambda)$  wohldefiniert für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

Offensichtlich gilt  $F(0) = f(t, x)$ ,  $F(1) = f(t, y)$ . Nach der Kettenregel ist die Funktion  $F(\lambda)$  stetig differenzierbar und

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) (y_i - x_i).$$



Nach Fundamentalsatz der Analysis erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(t, y) - f(t, x) &= F(1) - F(0) \\
 &= \int_0^1 F'(\lambda) d\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))(y_i - x_i) d\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y)(y_i - x_i),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_i(t, x, y) = \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) d\lambda. \quad (3.54)$$

Insbesondere gilt es für  $x = y$

$$f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) = f_{x_i}(t, x),$$

woraus folgt

$$\varphi_i(t, x, x) = f_{x_i}(t, x)$$

und somit  $\varphi(t, x, x) = f_x(t, x)$ , also (3.53).

Um die Stetigkeit von  $\varphi_i$  zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass  $\Omega'$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist, da  $\Omega'$  das Vorbild von  $\Omega \times \Omega$  unter der stetigen Abbildung

$$(t, x, y) \mapsto ((t, x), (t, y))$$

ist. Offensichtlich ist  $f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))$  eine stetige Funktion von  $(t, x, y, \lambda) \in \Omega' \times [0, 1]$ . Nach Integration in  $\lambda$  (vgl. (3.54)) erhält man eine stetige Funktion von  $(t, x, y)$ , was zu beweisen war. ■

Der Vollständigkeit halber beweisen wir die letzte Behauptung, die zu Analysis II gehört (vgl. Lemma 1.9).

**Lemma** Sei  $f(v, \lambda)$  eine reellwertige stetige Funktion auf  $V \times [a, b]$ , wobei  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  ist,  $v \in V$  und  $\lambda \in [a, b]$ . Dann ist die Funktion

$$\varphi(v) = \int_a^b f(v, \lambda) d\lambda$$

stetig in  $v \in V$ .

**Beweis.** Sei  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $V$ , die gegen einen Punkt  $v \in V$  konvergiert. Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  so dass  $\overline{B}(v, \varepsilon) \subset V$ . Es folgt aus  $v_k \rightarrow v$ , dass alle Punkte  $v_k$  mit genügend großen  $k$  in der Kugel  $\overline{B}(v, \varepsilon)$  liegen. Da  $f$  stetig auf  $V \times [a, b]$  ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von  $V \times [a, b]$ , insbesondere auf  $\overline{B}(v, \varepsilon) \times [a, b]$ . Daraus folgt, dass

$$f(v_k, \lambda) \rightrightarrows f(v, \lambda) \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

wobei das Zeichen  $\rightrightarrows$  die gleichmäßige Konvergenz bezüglich  $\lambda \in [a, b]$  bezeichnet. Da das Integralzeichen und die gleichmäßige Konvergenz vertauschbar sind, erhalten wir

$$\varphi(v_k) = \int_a^b f(v_k, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_a^b f(v, \lambda) d\lambda = \varphi(v),$$

also  $\varphi$  stetig ist, was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Man kann auch zeigen, dass  $\varphi(x, y)$  in  $(x, y)$   $k$ -fach stetig differenzierbar ist, vorausgesetzt, dass  $f(t, x)$  in  $x$   $(k + 1)$ -fach stetig differenzierbar ist.

### 3.7.4 Beweise von Sätze 3.13 und 3.14

**Beweis von Satz 3.13.** Erinnern wir uns daran, dass  $x(t, s)$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems (3.45) ist, die auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$  definiert und stetig ist (vgl. Satz 3.11). Im ersten Teil des Beweises zeigen wir, dass die partielle Ableitung  $\partial_{s_i} x$  in  $U$  existiert. Da dies unabhängig für jede Komponente  $s_j$  gemacht werden kann und auch die Variationsgleichung für jede Komponente  $y_j = \partial_{s_j} x$  unabhängig bewiesen werden kann, setzen wir in diesem Teil des Beweises voraus, dass  $s$  ein-dimensional ist, also  $m = 1$ .

Halten wir einen Wert  $s_0$  des Parameters  $s$  fest und beweisen, dass die Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$ . Dafür werden wir das Verhältnis

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0}$$

betrachten und bemerken, dass  $z$  die folgende DGL erfüllt:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} \\ &= \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0)}{s - s_0} \\ &= \frac{a(t, s)(x(t, s) - x(t, s_0)) + b(t, s)(s - s_0)}{s - s_0} \\ &= a(t, s)z + b(t, s) \end{aligned} \tag{3.55}$$

wobei die Funktionen  $a$  und  $b$  aus dem Hadamard-Lemma kommen. Dann werden wir mit Hilfe der DGL (3.55) zeigen, dass  $\lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  existiert.

Die Einzelheiten, sowohl auch die Fortsetzung dieses Arguments, folgen später, nachdem die Anwendung von Hadamard-Lemma begründet ist. Dafür muss die Funktion  $f(t, x, s)$  in einer offenen Teilmenge  $W \subset \Omega$  betrachtet werden, so dass

- $W_t$  konvex für alle  $t$  ist und
- $(t, x(t, s), s) \in W$  für alle  $s$  in einer Umgebung von  $s_0$ .

Jetzt bilden wir die Menge  $W$ . Sei  $[\alpha, \beta]$  ein beschränktes abgeschlossenes Teilintervall von  $I_{s_0}$ , wobei  $I_{s_0}$  der Definitionsbereich der Lösung  $x(t, s_0)$  ist. Es reicht zu beweisen, dass  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$  für jedes  $t \in (\alpha, \beta)$ . Wir nehmen immer an, dass  $(\alpha, \beta)$  den Punkt  $t_0$  enthält. Nach dem Beweis von Satz 3.11 existieren hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  mit folgenden Eigenschaften: die Menge

$$V = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon\}$$

eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$ , die Lösung  $t \mapsto x(t, s)$  ist für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  auf dem Intervall  $(\alpha, \beta)$  definiert, und der Graph dieser Lösung ist in  $V$  enthalten (vgl. Fig. 45).

Setzen wir jetzt

$$W := V \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

und bemerken, dass  $W$  offen ist und  $W \subset \Omega$  für hinreichend kleines  $\delta$ . Außerdem ist  $W_t$  konvex für jedes  $t$ . In der Tat haben wir nach Definition von  $W$ , dass

$$W_t = B(x(t, s_0), \varepsilon) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

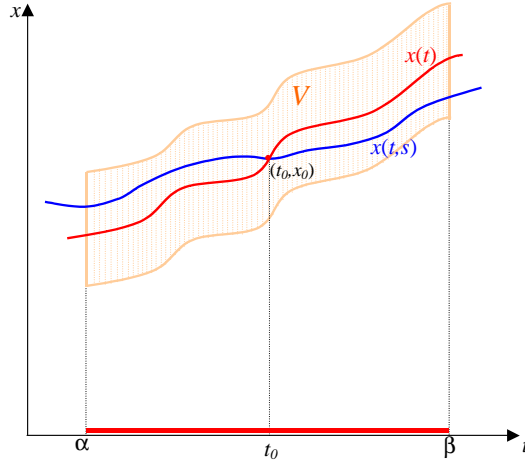


Figure 45: Lösungen  $x(t)$  und  $x(t, s)$

für  $t \in (\alpha, \beta)$ , und  $W_t = \emptyset$  für  $t \notin (\alpha, \beta)$  (vgl. Fig. 46). Da die Kugel  $B(x(t, s_0), \varepsilon)$  und das Intervall  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  konvex sind, ist  $W_t$  auch konvex.

Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig in  $(t, x, s)$  und stetig differenzierbar in  $(x, s)$  ist, ist Lemma 3.16 verwendbar mit Funktion  $f(t, x, s)$  im Definitionsbereich  $W$ , mit dem Parameter  $t$  und Funktionsargument  $(x, s)$ . Nach Lemma 3.16 erhalten wir die Identität

$$f(t, y, s) - f(t, x, s_0) = \varphi(t, x, s_0, y, s)(y - x) + \psi(t, x, s_0, y, s)(s - s_0),$$

für alle  $(t, y, s), (t, x, s_0) \in W$ , wobei  $\varphi$  und  $\psi$  stetige Funktionen sind<sup>19</sup>

Insbesondere erhalten wir für  $x = x(t, s_0)$  und  $y = x(t, s)$ :

$$\begin{aligned} f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0) &= \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s)(x(t, s) - x(t, s_0)) \\ &\quad + \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s)(s - s_0) \\ &= a(t, s)(x(t, s) - x(t, s_0)) + b(t, s)(s - s_0), \end{aligned}$$

wobei the Funktionen

$$a(t, s) = \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \text{ und } b(t, s) = \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \quad (3.56)$$

stetig in  $(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  sind (und  $s_0$  als eine Konstante betrachtet wird).

Für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  definieren wir die Funktion

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} \quad (3.57)$$

und bemerken, dass nach (3.45) und (3.56),

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} = \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t), s_0)}{s - s_0} \\ &= a(t, s)z + b(t, s). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Der Definitionsbereich der Funktion  $\varphi(t, x, r, y, s)$  ist die Menge

$$\begin{aligned} W' &= \{(t, x, r, y, s) : (t, x, r) \in W, (t, y, s) \in W\} \\ &= \{(t, x, r, y, s) : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon, \|y - x(t, s_0)\| < \varepsilon, |r - s_0| < \delta, |s - s_0| < \delta\} \end{aligned}$$

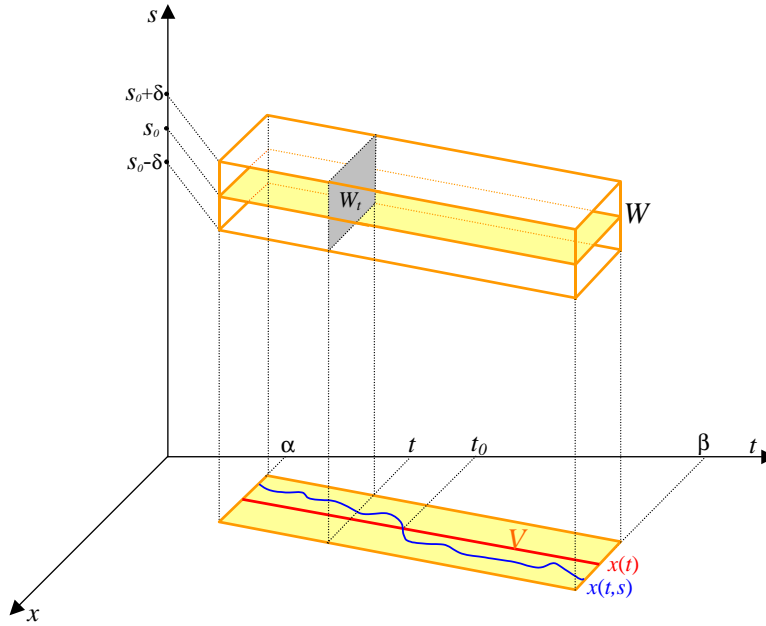


Figure 46: Die Mengen  $W$  und  $W_t$

Da auch  $z(t_0, s) = 0$  gilt (weil  $x(t_0, s) = x(t_0, s_0) = x_0$ ), löst die Funktion  $z(t, s)$  für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = a(t, s)z + b(t, s) \\ z(t_0, s) = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Da die DGL (3.58) linear ist und the Funktionen  $a$  und  $b$  stetig in

$$(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \quad (3.59)$$

sind, erhalten wir nach Satz 2.3 (Picard-Lindelöf für lineare Systeme), dass die Lösung des AWP's (3.58) für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  existiert und eindeutig ist. Bezeichnen wir jetzt mit  $z(t, s)$  die Lösung von (3.58), die als Funktion von  $(t, s)$  im Bereich (3.59) definiert ist, und bemerken, dass nach Satz 3.11 die Funktion  $z(t, s)$  stetig in diesem Bereich ist. Andererseits ist die Lösung von (3.58) für  $s \neq s_0$  durch (3.57) gegeben. Nach der Stetigkeit von  $z(t, s)$  in  $s$  erhalten wir

$$\partial_s x(t, s) \big|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s) = z(t, s_0),$$

so dass die Ableitung  $y(t) = \partial_s x(t, s) \big|_{s=s_0}$  existiert und mit  $z(t, s_0)$  übereinstimmt, also  $y(t)$  erfüllt das Anfangswertproblem (3.58) mit  $s = s_0$ :

$$\begin{cases} y' = a(t, s_0)y + b(t, s_0), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Nach (3.56) und Lemma 3.16 erhalten wir

$$a(t, s_0) = \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) = f_x(t, x(t, s_0), s_0)$$

und

$$b(t, s_0) = \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) = f_s(t, x(t, s_0), s_0).$$

Einsetzen in (3.60) ergibt die Variationsgleichung (3.46) für  $y(t)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion  $x(t, s)$  *stetig* differenzierbar in  $(t, s)$  ist, d.h. die Ableitungen  $\partial_t x$  und  $\partial_s x$  stetig sind. Dafür kehren wir zum allgemeinen Fall  $s \in \mathbb{R}^m$  zurück. Die Ableitung  $\partial_s x = y$  erfüllt die Variationsgleichung (3.46), also

$$\partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s) \quad (3.61)$$

und ist somit stetig in  $(t, s)$  nach Satz 3.11. Die Ableitung  $\partial_t x$  erfüllt die DGL

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s), \quad (3.62)$$

woraus die Stetigkeit von  $\partial_t x$  folgt. ■

**Beweis von Satz 3.14.** Induktion nach  $k$ . Für den Induktionsanfang mit  $k = 1$  haben wir  $x \in C^1(s)$  nach Satz 3.13. Es folgt aus der DGL (3.62), dass  $\partial_t x$  differenzierbar in  $s$  ist, und wir erhalten nach der Kettenregel

$$\partial_s(\partial_t x) = \partial_s[f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s). \quad (3.63)$$

Andererseits die Variationsgleichung (3.61) ergibt

$$\partial_t(\partial_s x) = \partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s), \quad (3.64)$$

und wir beschliessen nach dem Vergleich von (3.63) und (3.64), dass

$$\partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x. \quad (3.65)$$

Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  für  $k \geq 2$ . Angenommen  $f \in C^k(x, s)$ , wir haben auch  $f \in C^{k-1}(x, s)$  und erhalten nach der Induktionsvoraussetzung, dass  $x \in C^{k-1}(s)$ . Setzen wir  $y = \partial_s x$  und benutzen die Variationsgleichung von Satz 3.13:

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x, s)y + f_s(t, x, s), \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \quad (3.66)$$

wobei  $x = x(t, s)$ . Da  $f_x, f_s \in C^{k-1}(x, s)$  und  $x(t, s) \in C^{k-1}(s)$ , beschließen wir, dass die Verkettungen  $f_x(t, x(t, s), s)$  und  $f_s(t, x(t, s), s)$  von der Klasse  $C^{k-1}(s)$  sind. Deshalb ist die rechte Seite von (3.66) von der Klasse  $C^{k-1}(y, s)$ , und nach der Induktionsvoraussetzung erhalten wir, dass  $y \in C^{k-1}(s)$ . Daraus folgt, dass  $x \in C^k(s)$ .

Jetzt beweisen wir die Identität (3.47). Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  ein Multiindex mit  $0 < |\alpha| \leq k$ . Wählen wir einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\alpha_i \geq 1$  aus und bezeichnen mit  $\beta$  den Index

$$\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m),$$

wobei 1 nur an der Stelle  $i$  subtrahiert wird. Dann gilt die Identität  $\partial_s^\alpha = \partial_s^\beta \partial_{s_i}$  von Differentialoperatoren auf alle Funktionen von  $C^k(s)$ . Da

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s) \in C^k(s),$$

erhalten wir nach (3.65)

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_{s_i} \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_t \partial_{s_i} x = \partial_s^\beta \partial_t y_i,$$

wobei  $y_i = \partial_{s_i} x$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $y = \partial_s x$  ist. Nach der Variationsgleichung (3.66) erfüllt  $y_i$  die folgende DGL

$$\partial_t y_i = f_x(t, x, s) y_i + f_{s_i}(t, x, s), \quad (3.67)$$

wobei die rechte Seite zur  $C^{k-1}(y, s)$  gehört. Da  $|\beta| \leq k-1$ , erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung für die DGL (3.67), dass

$$\partial_s^\beta \partial_t y_i = \partial_t \partial_s^\beta y_i,$$

woraus folgt

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_t \partial_s^\beta y_i = \partial_t \partial_s^\beta \partial_{s_i} x = \partial_t \partial_s^\alpha x.$$

■

## 4 Autonome Systeme und Stabilität von Lösungen

### 4.1 Autonome DGLen

Eine *autonome* DGL ist die DGL der Form

$$x' = f(x) \quad (4.1)$$

wobei die Funktion keine explizite Abhängigkeit von  $t$  enthält. Die Funktion  $f(x)$  ist auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert und nimmt die Werte in  $\mathbb{R}^n$  an. Der Definitionsbereich der DGL (4.1) ist somit  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Wir nehmen immer an, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig ist, so dass Satz 3.3 (Picard-Lindelöf) gilt.

Die Menge  $\Omega$  heißt der *Phasenraum* (oder Zustandsraum) von (4.1). Jede maximale Lösung  $x : I \rightarrow \Omega$  (wobei  $I$  ein offenes Intervall ist) bestimmt eine *Phasenkurve* oder eine *Trajektorie* von (4.1), die nach Definition die Menge  $\{x(t) \in \Omega : t \in I\}$  ist. Die Gesamtheit von allen Trajektorien heißt das *Phasendiagramm* von (4.1).

Erinnern wir uns daran, dass der Graph von jeder Lösung, d.h. die Integralkurve  $\{(t, x(t)) : t \in I\}$ , eine Teilmenge des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times \Omega$  ist. Offensichtlich ist die Phasenkurve die Projektion der Integralkurve auf  $\Omega$ .

Die Unabhängigkeit der Funktion  $f$  von  $t$  impliziert die folgenden vier Behauptungen.

**Behauptung** *Ist  $x(t)$  eine Lösung von (4.1), so ist auch die Funktion  $t \mapsto x(t+a)$  eine Lösung von (4.1) für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .*

**Behauptung** *Für jeden Punkt  $x_0 \in \Omega$  existiert genau eine Phasenkurve durch  $x_0$ , bis zur Zeitverschiebung.*

**Beweis.** Die Existenz folgt aus Satz 3.3 (Picard-Lindelöf). Angenommen, zwei Phasenkurven gehen durch einen Punkt. Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die entsprechenden Lösungen. Dann gilt  $x(t_1) = y(t_2)$  für einigen Werten  $t_1, t_2$ . Betrachten wir die Lösungen  $\tilde{x}(t) = x(t+t_1)$  und  $\tilde{y}(t) = y(t+t_2)$ . Dann gilt  $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0)$ , woraus folgt die Gleichheit  $\tilde{x}(t) \equiv \tilde{y}(t)$  für alle  $t$  nach Satz 3.3. Daher erhalten wir  $x(t) \equiv y(t+t_2-t_1)$ , was zu beweisen war. ■

**Behauptung** *Sei  $x_0 \in \Omega$ . Die konstante Funktion  $x(t) \equiv x_0$  ist eine Lösung von  $x' = f(x)$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ .*

**Definition.** Jede Nullstelle von  $f$  heißt *Ruhelage* der DGL  $x' = f(x)$ .

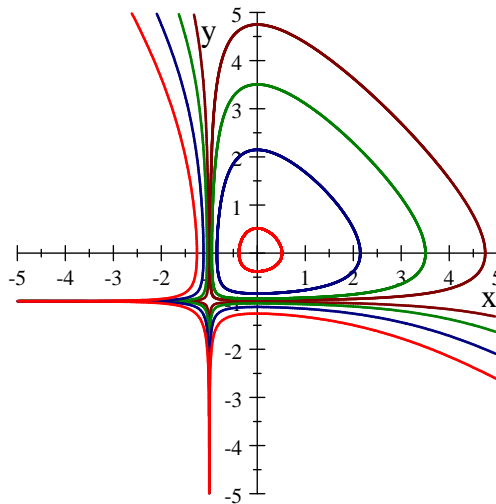


Figure 47: Das Phasendiagramm von (4.2)

Dann ist jede Ruhelage eine konstante Lösung, was diese Bezeichnung erklärt. Es ist häufig der Fall, dass die Ruhelagen eines Systems die Form des Phasendiagramms bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases} \quad (4.2)$$

die teilweise gelöst werden kann, wie folgt. Dividieren die Gleichungen ergibt die trennbare DGL für  $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y)}{y(1+x)},$$

woraus folgt

$$\int \frac{y dy}{1+y} = - \int \frac{x dx}{1+x}$$

und

$$y - \ln|y+1| + x - \ln|x+1| = C. \quad (4.3)$$

Die Trajektorien von (4.3) sind auf das Bild 47 gezeichnet. Man sieht zwei "Besonderheiten" des Phasendiagramms: die Punkte  $(0,0)$  und  $(-1,-1)$ , die genau die Ruhelagen von (4.2) sind.

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *Ljapunow-stabil* wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  derart, dass jede maximale Lösung  $x(t)$  mit  $\|x(0) - x_0\| < \delta$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \|x(t) - x_0\| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Also, die Ljapunow-Stabilität bedeutet, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Für ein beschränktes Intervall  $[0, T]$  gilt es immer, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \in [0, T],$$

was aus Korollar 3.12 folgt. Deshalb ist die Hauptfrage der Ljapunow-Stabilität das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow +\infty$ .

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *asymptotisch stabil* wenn  $x_0$  Ljapunow-stabil ist und *attraktiv*, d.h.

$$x(t) \rightarrow x_0 \text{ as } t \rightarrow +\infty,$$

vorausgesetzt  $\|x(0) - x_0\|$  hinreichend klein ist.

Die Ljapunow-Stabilität und die asymptotische Stabilität sind unabhängig von der Wahl der Norm, da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind.

Die Stabilität kann man auch für beliebige Lösungen des Systems  $x' = f(t, x)$  definieren. Dann bedeutet die Ljapunow-Stabilität, dass die kleinen Störungen des Anfangswerts  $x(0)$  zu kleinen Störungen von  $x(t)$  für alle  $t > 0$  führen. Für eine asymptotisch stabile Lösung gilt, dass die Lösung  $x(t)$  sich asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$  nicht ändern lässt trotz der Störung von  $x(0)$ .

Die Stabilität der bestimmten physikalischen Systems hat die große Bedeutung für die Menschheit, z.B. die Stabilität des Sonnensystems. Die mathematische Untersuchung der Stabilität solches komplizierten Systems kann extrem schwierig sein.

## 4.2 Stabilität eines linearen Systems

Betrachten wir ein lineares System  $x' = Ax$  in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ein konstante Operator ist. Offensichtlich ist  $x = 0$  eine Ruhelage.

**Satz 4.1** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Setzen wir

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

Gilt  $\alpha < 0$ , so ist 0 asymptotisch stabil (und somit auch Ljapunow-stabil) für das System  $x' = Ax$ . Gilt  $\alpha \geq 0$ , so ist 0 nicht asymptotisch stabil. Gilt  $\alpha > 0$ , so ist 0 instabil (=nicht Ljapunow-stabil).

Im Fall  $\alpha = 0$  kann man die Ljapunow-Stabilität nicht eindeutig bestimmen, wie die Beispiele zeigen.

Den Satz 4.1 beweisen wir später. Jetzt betrachten wir den Fall  $n = 2$ , wenn die vollständige Klassifikation der Fällen von Stabilität möglich ist, sowohl auch die Beschreibung von den Phasendiagrammen.

Seien  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $b = \{b_1, b_2\}$  die Jordan-Basis von  $A$ , und  $A^b$  die Jordan-Normalform von  $A$  in dieser Basis. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn

$$A^b = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Dann sind  $b_1$  und  $b_2$  die Eigenvektoren mit den Eigenwerten jeweils  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} b_2,$$

also in der Basis  $b$

$$x(t) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t})$$

und  $x(0) = (C_1, C_2)$ . Daraus folgt, dass

$$\|x(t)\|_\infty = \max(|C_1 e^{\lambda_1 t}|, |C_2 e^{\lambda_2 t}|) = \max(|C_1| e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t}, |C_2| e^{\operatorname{Re} \lambda_2 t}) \leq \|x(0)\|_\infty e^{\alpha t}$$



wobei

$$\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2).$$

Ist  $\alpha \leq 0$ , so gilt

$$\|x(t)\|_\infty \leq \|x(0)\|$$

woraus die Ljapunow-Stabilität folgt<sup>20</sup>. Ist  $\alpha > 0$ , so ergibt der Satz 4.1 die Instabilität.

Zeichnen wir das Phasendiagramm des Systems  $x' = Ax$  unter der obigen Voraussetzungen in den verschiedenen Fällen.

Fall  $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell.

Für die Komponenten  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Lösung  $x(t)$  in der Basis  $\{b_1, b_2\}$  haben wir

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Im Fall  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  erhalten wir die folgende Beziehung zwischen  $x_1$  und  $x_2$ :

$$x_2 = C |x_1|^\gamma, \tag{4.5}$$

wobei  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ . Das Phasendiagramm besteht aus den Kurven (4.5) sowohl auch aus den Halbgeraden  $x_1 > 0, x_1 < 0, x_2 > 0, x_2 < 0$ , die den Nullwerten von  $C_2$  und  $C_1$  entsprechen.

Ist  $\gamma > 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben gleiches Vorzeichen), so heißt die Ruhelage (bzw. das Phasendiagramm) der *Knoten* (vgl. Fig. 48 und 49). Der Knoten ist (und heißt) stabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , und instabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

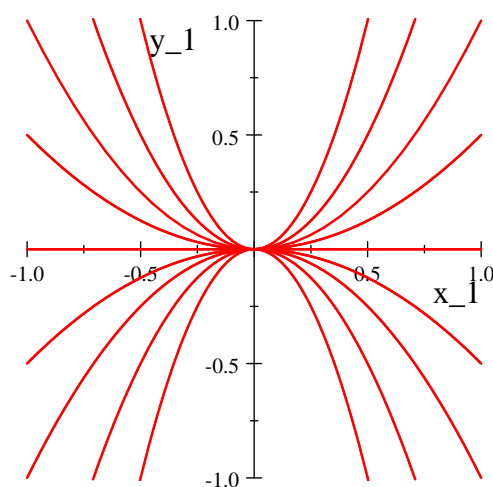


Figure 48: Der Knoten mit  $\gamma > 1$

Ist  $\gamma < 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben verschiedene Vorzeichen), dann heißt die Ruhelage der *Sattel* (vgl. Fig. 50). Der Sattel ist immer instabil.

Ist einer (oder die beiden) von  $\lambda_1, \lambda_2$  gleich 0, dann heißt die Ruhelage *ausgeartet* (horizontale oder vertikale Geraden oder Punkte).

Fall  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind imaginär, also  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  und  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , und  $\beta \neq 0$ .

<sup>20</sup>Ist  $\alpha < 0$ , so folgt die Stabilität auch aus Satz 4.1.

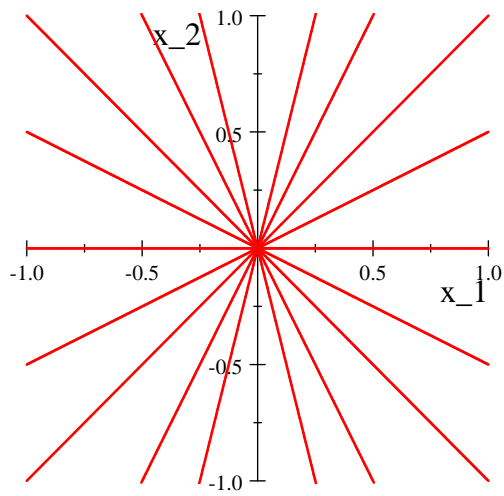


Figure 49: Der Knoten mit  $\gamma = 1$

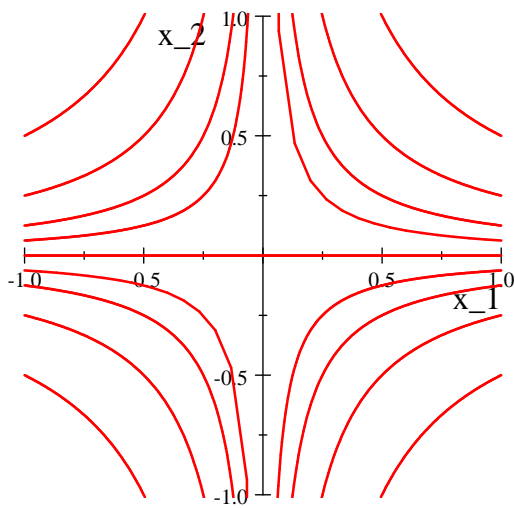


Figure 50: Der Sattel

Betrachten wir eine neue Basis  $\{u, v\}$  mit  $u = \frac{b_1+b_2}{2}$  und  $v = \frac{b_1-b_2}{2i}$ . Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \operatorname{Re} e^{(\alpha-i\beta)t} b_1 + C_2 \operatorname{Im} e^{(\alpha-i\beta)t} b_1 \\ &= C_1 e^{\alpha t} \operatorname{Re} (\cos \beta t - i \sin \beta t) (u + iv) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{Im} (\cos \beta t - i \sin \beta t) (u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t) u + e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) v \\ &= C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \psi) u + C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi) v \end{aligned}$$

wobei  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  und

$$\cos \psi = \frac{C_1}{C}, \quad \sin \psi = \frac{C_2}{C}.$$

Offensichtlich hat die Lösung die folgende Polarkoordinaten in der Ebene  $(u, v)$ :

$$r(t) = C e^{\alpha t} \quad \text{und} \quad \theta(t) = \beta t + \psi.$$

Ist  $\alpha \neq 0$  so bestimmen diese Gleichungen eine logarithmische Spirale, und die Ruhelage heißt auch *Spirale* (vgl. Fig. 51). Die Spirale ist stabil, falls  $\alpha < 0$  und instabil falls  $\alpha > 0$ .

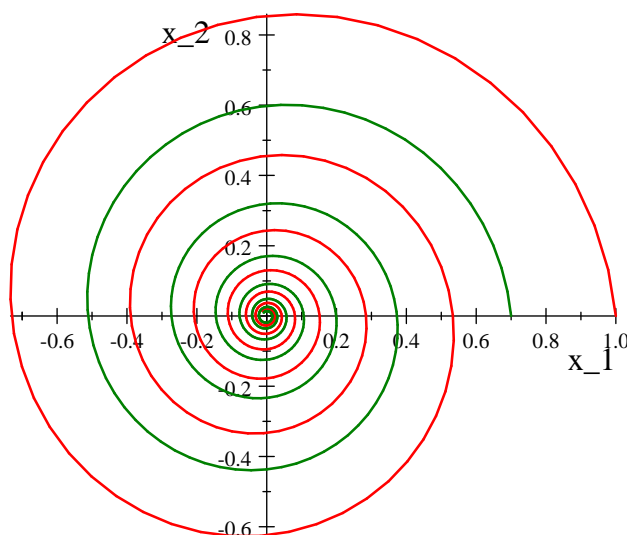


Figure 51: Die Spirale

Ist  $\alpha = 0$  (d.h.  $\lambda_1 = i\beta$  und  $\lambda_2 = -i\beta$ ), so ist die allgemeine Lösung durch  $r(t) = C$  gegeben, was die konzentrischen Kreislinien ergibt. In diesem Fall heißt die Ruhelage das *Zentrum* (vgl. Fig. 52). Das Zentrum ist Ljapunow-stabil aber nicht asymptotisch stabil.

Jetzt betrachten wir den Fall, wenn  $A^b$  keine Diagonalmatrix ist, d.h.  $A^b$  ein Jordanblock ist:

$$A^b = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist  $\lambda$  unbedingt reell, weil sonst die Matrix  $A$  auch den Eigenwert  $\bar{\lambda}$  besitzen muss. Nach Satz 2.27 ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} b_1 + C_2 e^{\lambda t} (t b_1 + b_2)$$

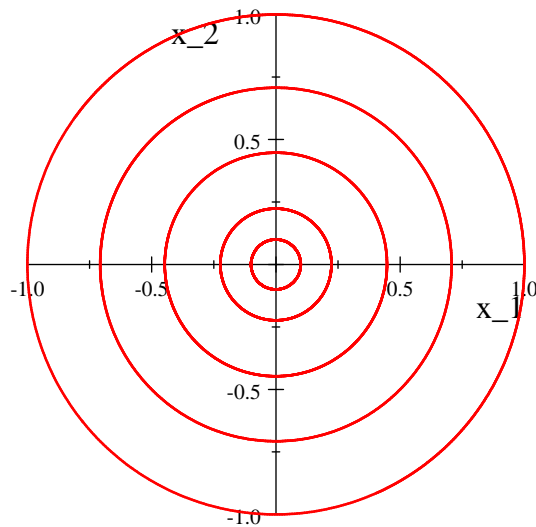


Figure 52: Das Zentrum

In der Basis  $b$  hat  $x(t)$  die folgende Komponenten:

$$x(t) = (e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t), e^{\lambda t} C_2). \quad (4.6)$$

Ist  $\lambda < 0$  so ist die Ruhelage asymptotisch stabil nach Satz 4.1 (oder kann direkt gezeigt werden). Im Fall  $\lambda \geq 0$  ist die Ruhelage instabil, weil für  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 1$  erhalten wir

$$\|x(t)\|_1 = e^{\lambda t} (1 + t),$$

so dass  $\|x(t)\|_1$  unbeschränkt ist, während jede stabile Lösung muss beschränkt sein.

Zeichnen wir jetzt das Phasendiagramm. Im Fall  $\lambda \neq 0$  erhalten wir aus (4.6) die folgenden Gleichungen für die Komponenten  $x_1$  und  $x_2$  von  $x$ :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{C_1}{C_2} + t \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{C_2},$$

woraus folgt

$$x_1 = Cx_2 + \frac{x_2 \ln |x_2|}{\lambda}$$

mit  $C = \frac{C_1}{C_2} - \ln |C_2|$ . In diesem Fall heißt die Ruhelage auch der Knoten (vgl. Fig. 53).

Sie ist asymptotisch stabil fall  $\lambda < 0$  und instabil fall  $\lambda > 0$ .

Im Fall  $\lambda = 0$  erhalten wir ein ausgeartetes Phasendiagramm – eine Menge von parallelen Geraden.

Hier ist die Zusammenfassung von Typen der Ruhelagen in  $\mathbb{R}^2$ :

- ein *Knoten* ( $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ );
- ein *Sattel* ( $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ );
- eine *Spirale* ( $\text{Im } \lambda \neq 0$  und  $\text{Re } \lambda \neq 0$ );

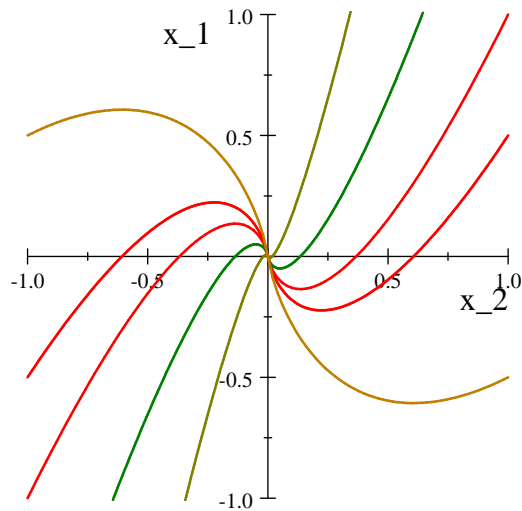


Figure 53: Der Knoten

- ein *Zentrum* ( $\text{Im } \lambda \neq 0$  und  $\text{Re } \lambda = 0$ );
- ausgeartete Ruhelage, wenn das Phasendiagramm aus parallelen Geraden oder Punkten besteht.

Wir betonen, dass im Fall  $\max \text{Re } \lambda = 0$  die beiden Stabilität und Instabilität geschehen können abhängig von der Jordan-Normalform von  $A$ .

### 4.3 Ljapunow-Sätze

Betrachten wir eine allgemeine autonome DGL  $x' = f(x)$  wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $x_0$  eine Ruhelage, d.h.  $f(x_0) = 0$ . Wir untersuchen die Stabilität von  $x_0$ .

**Satz 4.2** (1-er Ljapunow-Satz) *Sei  $f \in C^2(\Omega)$  und setzen wir  $A = f_x(x_0)$  (d.h.  $A$  ist die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x_0$ ). Bezeichnen*

$$\alpha = \max \{ \text{Re } \lambda : \lambda \text{ ein Eigenwert von } A \}$$

- (a) *Ist  $\alpha < 0$  so ist  $x_0$  asymptotisch stabil.*  
 (b) *Ist  $\alpha > 0$  so ist  $x_0$  instabil.*

Den Teil (b) beweisen wir nicht, da der Beweis zu lang ist, aber man darf trotzdem den Teil (b) für den Aufgaben benutzen.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} \\ y' = \sin 3x + \ln(1 - 4y) \end{cases} \quad (4.7)$$

Der Punkt  $(0, 0)$  ist offensichtlich eine Ruhelage. Für die Funktion

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} \\ \sin 3x + \ln(1 - 4y) \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$A = f_x(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man alle Komponenten von  $f(x,y)$  nach Taylor-Formel entwickeln wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2\sqrt{1+y} - 2e^{x+y} = 2\left(1 + \frac{y}{2} + o(x)\right) - 2(1 + (x+y) + o(|x| + |y|)) \\ &= -2x - y + o(|x| + |y|) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= \sin 3x + \ln(1-4y) = 3x + o(x) - 4y + o(y) \\ &= 3x - 4y + o(|x| + |y|), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|)$$

mit gleicher Matrix  $A$ .

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 11,$$

und die Eigenwerte sind  $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$ . Deshalb  $\alpha := \max \operatorname{Re} \lambda < 0$  und somit ist 0 für das System 4.7 asymptotisch stabil.

Kommen wir zurück zum Satz 4.2 und betrachten wir das lineare System  $X' = AX$ , die eine Linearisierung von  $x' = f(x)$  in  $x_0$  heißt<sup>21</sup>. Die Stabilität von Ruhelage 0 für die linearisierte DGL  $X' = AX$  steht in Zusammenhang (aber ist nicht identisch) mit der Stabilität von  $x_0$  für die DGL  $x' = f(x)$ . Die Voraussetzung  $\alpha < 0$  ergibt nach Satz 4.2 die asymptotische Stabilität von  $x_0$  für  $x' = f(x)$ , sowohl auch nach Satz 4.1 die asymptotische Stabilität von 0 für  $X' = AX$ . Ist  $\alpha > 0$ , so sind  $x_0$  instabil für  $x' = f(x)$  und 0 instabil für  $X' = AX$ . Aber im Fall  $\alpha = 0$  sind die Typen von Stabilität für  $x' = f(x)$  und  $X' = AX$  nicht unbedingt gleich.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases}. \quad (4.8)$$

Die Lösung der Gleichungen

$$\begin{cases} y + xy = 0 \\ x + xy = 0 \end{cases}$$

ergibt zwei Ruhelagen  $(0,0)$  und  $(-1,-1)$ . Um die linearisierte Gleichung in  $(-1,-1)$  zu bestimmen, bezeichnen wir  $X = x + 1$  und  $Y = y + 1$ , so dass

$$\begin{cases} X' = (Y-1)X = -X + XY = -X + o(\|(X,Y)\|) \\ Y' = -(X-1)Y = Y - XY = Y + o(\|(X,Y)\|), \end{cases} \quad (4.9)$$

<sup>21</sup>Die Funktion  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$  erfüllt die DGL

$$\tilde{x}' = f(\tilde{x} + x_0) = A\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|).$$

Dann erhält man die linearisierte Gleichung indem man den Term  $o(\|\tilde{x}\|)$  ignoriert.

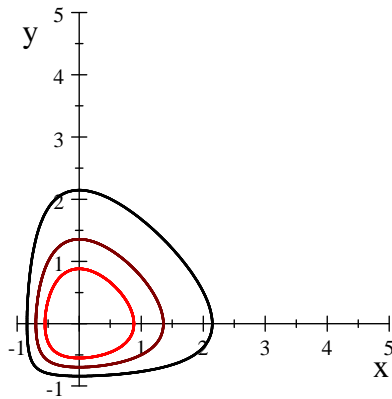


Figure 54: Die Trajektorien des System (4.8) in der Nähe von  $(0, 0)$

und die Linearisierung ist

$$\begin{cases} X' = -X \\ Y' = Y. \end{cases}$$

Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Eigenwerte sind  $-1$  und  $+1$ . Da  $\alpha = 1 > 0$ , ist die Ruhelage  $(-1, -1)$  instabil für (4.8).

In der Nähe von  $(0, 0)$  schreibt man das System (4.8) in der Form

$$\begin{cases} x' = y + o(\|(x, y)\|) \\ y' = -x + o(\|(x, y)\|), \end{cases}$$

woraus das linearisierte System folgt

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Eigenwerte sind  $\pm i$ . Da  $\alpha = 0$ , ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil (aber nicht asymptotisch stabil) für die Linearisierung. Im Fall  $\alpha = 0$  können wir über die Stabilität von  $(0, 0)$  für (4.8) nicht beschliessen.

Da die Lösung von (4.8) kann explizit durch

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C$$

gegeben werden (vgl. (4.3)), es folgt, dass die Trajektorien in der Nähe von  $(0, 0)$  geschlossene Kurven sind (vgl. Fig. 54). Somit ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.8) Ljapunow-stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Der Satz 4.2 wird mit Hilfe von dem zweiten Satz von Ljapunow bewiesen.

**Satz 4.3** (2-ter Ljapunow-Satz) Sei  $x_0$  eine Ruhelage von  $x' = f(x)$  wobei  $f \in C^1(\Omega)$ . Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\Omega$  mit  $x_0 \in U$ , und  $V$  eine stetig differenzierbare skalare Funktion auf  $U$  mit  $V(x) > 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x_0\}$  und  $V(x_0) = 0$ .

(a) Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq 0, \quad (4.10)$$

so ist die Ruhelage  $x_0$  Ljapunow-stabil.

(b) Sei  $W(x)$  eine stetige skalare Funktion auf  $U$  mit  $W(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ . Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq -W(x), \quad (4.11)$$

so ist die Ruhelage  $x_0$  asymptotisch stabil.

(c) Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \geq W(x), \quad (4.12)$$

wobei  $W$  ist wie im (b), so ist die Ruhelage  $x_0$  instabil.

Eine Funktion  $V$ , wie in (a), (b), oder (c), heißt die *Ljapunow-Funktion*.

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  und für eine differenzierbare Funktion  $V$  auf (einer Teilmenge von)  $\mathbb{R}^n$  ist die Richtungsableitung  $\partial_u V$  von  $V$  in der Richtung  $u$  wie folgt definiert:

$$\partial_u V(x) = V_x(x)u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) u_k.$$

Insbesondere für  $u = f(x)$  erhalten wir

$$\partial_{f(x)}V(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x). \quad (4.13)$$

Wir betonen, dass der Vektor  $f(x)$  in der Ableitung  $\partial_{f(x)}V(x)$  auch von  $x$  abhängt. Die Ableitung  $\partial_f V$  heißt die *orbitale Ableitung* von  $V$  bezüglich der DGL  $x' = f(x)$ . Die geometrische Bedeutung der orbitalen Ableitung wird aus dem Beweis klar sein.

## 4.4 Beispiele

Hier zeigen wir einige Beispiele von Ljapunow-Funktionen.

**Beispiel.** Betrachten wir ein lineares Normalsystem  $x' = Ax$  wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um die Stabilität der Ruhelage 0 zu untersuchen, betrachten wir die Funktion

$$V(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

die offensichtlich stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}^n$  ist,  $V(0) = 0$  und  $V(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Setzen wir  $f(x) = Ax$  und  $A = (A_{kj})$  und bemerken, dass

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n A_{kj}x_j.$$



Da  $\frac{\partial V}{\partial x_k} = 2x_k$ , es folgt aus (4.13), dass

$$\partial_f V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k = 2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k.$$

Die Matrix  $A$  heißt *negativ semidefinit*, falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also, ist  $A$  negativ semidefinit so gilt  $\partial_f V \leq 0$ , und nach Satz 4.3(a) ist die Ruhelage 0 Ljapunow-stabil.

Die Matrix  $A$  heißt *negativ definit*, falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Ist  $A$  negativ definit, dann haben wir

$$\partial_f V = -W \text{ mit } W = -2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k,$$

und nach Satz 4.3(b) ist 0 asymptotisch stabil. Analog, ist die matrix  $A$  *positiv definit* so ist 0 instabil nach Satz 4.3(c).

Z.B., sei  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wobei  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ . Gilt  $\lambda_k \leq 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ semidefinit und somit ist 0 Ljapunow-stabil. Gilt  $\lambda_k < 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ definit und somit ist 0 asymptotisch stabil. Gilt  $\lambda_k > 0$  für alle  $k$ , so ist  $A$  positiv definit und somit ist 0 instabil. Eigentlich, 0 ist instabil schon im Fall, wenn  $\lambda_k > 0$  für ein  $k$ , wie aus dem Satz 4.1 folgt.

**Beispiel.** Betrachten wir eine skalare DGL 2-ter Ordnung ODE

$$x'' + kx' = F(x),$$

die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens von Masse 1 unter einer konservativen Kraft  $F(x)$  beschreibt, und zwar mit der Reibungskoeffizient  $k \geq 0$ . Das entsprechende Normalsystem ist

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky + F(x). \end{cases} \quad (4.14)$$

Ist  $F$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert, dann der Phasenraum des Systems (4.14) gleich  $\mathbb{R}^2$  ist, und ein Punkt  $(x, y)$  im Phasenraum ein Paar Koordinate-Geschwindigkeit ist.

Angenommen  $F(0) = 0$ , so dass  $(0, 0)$  eine Ruhelage ist. Wir versuchen herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Ruhelage  $(0, 0)$  stabil ist. In diesem Fall kann die gesamte Energie als die Ljapunow Funktion benutzt werden, so setzen wir

$$V(x, y) = U(x) + \frac{y^2}{2},$$

wobei

$$U(x) = - \int F(x) dx$$

die potentielle Energie ist und  $\frac{y^2}{2}$  die kinetische Energie. Setzen wir weiter voraus, dass

$$F(x) < 0 \text{ für } x > 0, \quad F(x) > 0 \text{ für } x < 0, \quad (4.15)$$

und wählen die folgende Version der Potentialfunktion

$$U(x) = - \int_0^x F(s) ds,$$

so dass  $U(0) = 0$  und  $U(x) > 0$  für  $x \neq 0$ . Dann verschwindet die Funktion  $V(x, y)$  in  $(0, 0)$  und ist positiv außerhalb  $(0, 0)$ .

Für die Vektorfunktion

$$f(x, y) = (y, -ky + F(x)),$$

die die rechte Seite von (4.14) darstellt, berechnen wir die orbitale Ableitung  $\partial_f V$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= V_x y + V_y (-ky + F(x)) \\ &= U'(x) y + y(-ky + F(x)) \\ &= -F(x) y - ky^2 + yF(x) \\ &= -ky^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $V$  eine Ljapunow Funktion, und nach Satz 4.3 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil.

Physikalisch bedeutet die Bedingung (4.15), dass die Kraft immer in die Richtung von 0 wirkt und somit wird das Teilchen gezwungen, immer wieder zur 0 zu bewegen, was die Stabilität ergibt.

Betrachten wir, z.B., die folgenden Funktionen  $F$ , die (4.15) erfüllen:

$$F(x) = -x \quad \text{und} \quad F(x) = -x^3.$$

Die entsprechenden Ljapunow-Funktionen sind jeweils

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad \text{und} \quad V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir ein System

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = -x^3, \end{cases} \quad (4.16)$$

mit der Ruhelage  $(0, 0)$ . Die Funktion  $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  ist echt positive in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aber ihre orbitale Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= x(y - x) - yx^3 \\ &= xy - x^2 - yx^3 \end{aligned}$$

nimmt in der Nähe von  $(0, 0)$  sowohl positive als auch negative Werte an. Deshalb kann diese Funktion als Ljapunow-Funktion nicht benutzt werden.

Die Funktion

$$V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

ist echt positiv in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , und die orbitale Ableitung dieser Funktion bezüglich der DGL (4.16) ist

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= x^3(y - x) - yx^3 \\ &= -x^4 \leq 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3(a) ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil.

Mit Hilfe von einer anderen Ljapunow-Funktion kann man zeigen, dass die Ruhelage  $(0, 0)$  tatsächlich asymptotisch stabil ist. Für die Funktion

$$V(x, y) = (x - y)^2 + y^2$$

haben wir

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= 2(x - y)(y - x) - (-2(x - y) + 2y)x^3 \\ &= -2(x - y)^2 - (4y - 2x)x^3 \\ &= -2(x - y)^2 - (4y - 4x + 2x)x^3 \\ &= -2((x - y)^2 + 2(y - x)x^3 + x^4) \\ &= -2\left((x - y + x^3)^2 + x^4 - x^6\right) = -2W, \end{aligned}$$

wobei

$$W(x, y) := (x - y + x^3)^2 + x^4 - x^6 > 0$$

für alle  $-1 < x < 1$  und  $y \in \mathbb{R}$  außer  $(x, y) = (0, 0)$ . Nach Satz 4.3 ist  $(0, 0)$  asymptotisch stabil für (4.16), was zu beweisen war. Auf dem Bild 55 wird eine Trajektorie des Systems (4.16) in der Nähe von  $(0, 0)$  gezeichnet.

Betrachten wir auch das linearisierte System von (4.16) in der Nähe von  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} X' = -X + Y \\ Y' = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Die Matrix ist  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dieses Systems hat die Eigenwerte 0 und  $-1$ . Nach Satz 4.1 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.17) nicht asymptotisch stabil. Trotzdem ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, da  $A$  diagonalisierbar ist (vgl. Abschnitt 4.2).

Das linearisierte System (4.17) lässt sich explizit lösen wie folgt:

$$\begin{cases} X(t) = C_2 e^{-t} + C_1 \\ Y(t) = C_1 \end{cases},$$

woraus folgt, dass die Phasenkurven die horizontalen Geraden sind.

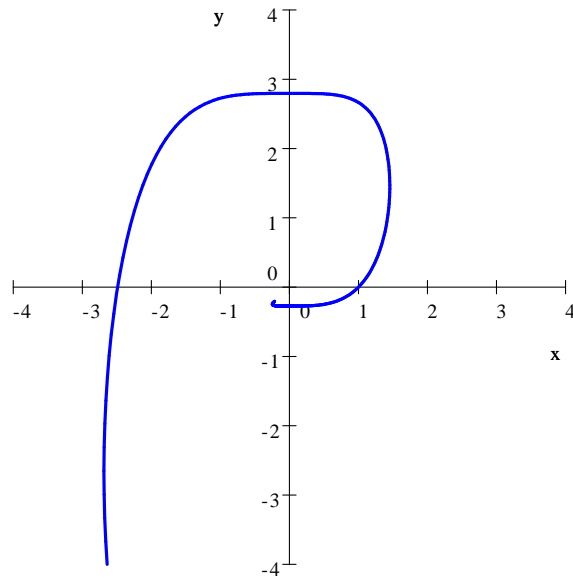


Figure 55: Eine Trajektorie des Systems (4.16)

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das System (4.8), also

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases}$$

und die Ruhelage  $(0, 0)$ . Wie wir es schon gesehen haben, erfüllen die Phasenkurven des System die Gleichung

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C.$$

Deshalb ist es sinnvoll die folgende Funktion

$$V(x, y) = x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1|$$

in der Nähe von  $(0, 0)$  zu betrachten. Da

$$x > \ln|x + 1|$$

für alle  $x > -1$ ,  $x \neq 0$ , ist die Funktion  $V$  echt positiv für alle  $x > -1$ ,  $y > -1$  außer  $(x, y) = (0, 0)$ . Die orbitale Ableitung ist

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)(y + xy) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)(-x - xy) \\ &= xy - xy = 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3(a) ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, wie wir es auf dem Bild 54 schon gesehen haben.

## 4.5 Beweise von Sätze 4.1, 4.3 und 4.2

**Beweis von Satz 4.1.** Angenommen  $\alpha < 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist. Nach Corollary 2.28 ist die allgemeine komplexwertige Lösung des Systems  $x' = Ax$  durch die Identität

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} P_k(t) \quad (4.18)$$

gegeben, wobei  $C_k$  beliebige komplexe Konstanten sind,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alle Eigenwerte von  $A$  sind mit den algebraischen Vielfachheiten, und  $P_k(t)$  vektorwertige Polynome, also

$$P_k(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_N t^N \quad (4.19)$$

mit einem  $N = 0, 1, \dots$  und mit Vektoren  $u_0, \dots, u_N \in \mathbb{R}^n$ .

Es folgt aus (4.18), dass für alle  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=1}^n |C_k e^{\lambda_k t}| \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{(\operatorname{Re} \lambda_k) t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{\alpha t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\|. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Norm des Polynoms (4.19) lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|P_k(t)\| &\leq \|u_0\| + \|u_1\| t + \dots + \|u_N\| t^N \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| (1 + t + \dots + t^N) \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| (N+1) (1 + t^N) \end{aligned} \quad (4.21)$$

weil  $t^j \leq 1 + t^N$  für alle  $j = 0, \dots, N$ . Daraus folgt, dass die folgende Abschätzung

$$\|P_k(t)\| \leq c (1 + t^N)$$

für alle  $k = 1, \dots, n$  und  $t \geq 0$  gilt, vorausgesetzt, dass  $c$  und  $N$  genügend groß sind.

Andererseits (4.18) ergibt

$$x(0) = \sum_{k=1}^n C_k P_k(0),$$

so dass die Koeffizienten  $C_k$  die Koordinaten des Anfangsvektors  $x(0)$  in der Basis  $\{P_k(0)\}_{k=1}^n$  sind. Daraus folgt, dass in dieser Basis

$$\max_k |C_k| = \|x(0)\|_\infty \leq c' \|x(0)\|, \quad (4.22)$$

mit einer Konstante  $c'$ , wo wir benutzt haben, dass alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind. Es folgt aus (4.20), (4.21) und (4.22), dass die folgende Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{\alpha t} (1 + t^N) \quad (4.23)$$

gilt für alle  $t \geq 0$  mit einer Konstante  $C$ .

Gilt  $\alpha < 0$ , so ist die Funktion  $e^{\alpha t} (1 + t^N)$  auf  $[0, +\infty)$  beschränkt, und wir erhalten, dass für alle  $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq K \|x(0)\|,$$

wobei

$$K = C \sup_{t \geq 0} e^{\alpha t} (1 + t^N) < \infty,$$

woraus die Ljapunow-Stabilität von 0 folgt.

Außerdem, da

$$e^{\alpha t} (1 + t^N) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

erhalten wir aus (4.23) dass auch  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so dass 0 asymptotisch stabil ist.

Angenommen  $\alpha \geq 0$ , beweisen wir, dass 0 nicht asymptotisch stabil ist. Es reicht eine reellwertige Lösung  $x(t)$  zu bestimmen mit  $\|x(t)\| \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$ . In der Tat ist die Funktion  $cx(t)$  für jede reelle Konstante  $c$  eine Lösung des Systems mit dem Anfangswert  $cx(0)$ , der beliebig klein sein kann, weil  $c$  beliebige ist, während  $cx(t) \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$ , so dass die asymptotische Stabilität nicht gilt.

Um eine solche Lösung zu bestimmen, wählen wir einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  aus, der aufgrund der Voraussetzung  $\alpha \geq 0$  existiert. Sei  $v$  ein Eigenvektor mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Betrachten wir die Lösung

$$x(t) = e^{\lambda t} v \tag{4.24}$$

und schätzen sie ab wie folgt:

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|v\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \|v\| \geq \|v\|. \tag{4.25}$$

Somit konvergiert  $x(t)$  gegen 0 nicht für  $t \rightarrow \infty$ . Ist  $x(t)$  eine reellwertige Lösung, so beendet das den Beweis. Ist  $x(t)$  eine komplexwertige Lösung, so sind die beiden Funktionen  $\operatorname{Re} x(t)$  und  $\operatorname{Im} x(t)$  reellwertige Lösungen, und mindestens eine davon konvergiert gegen 0 nicht.

Angenommen  $\alpha > 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage instabil ist. Es reicht zu zeigen, dass es eine reellwertige Lösung  $x(t)$  gibt mit unbeschränkter Norm  $\|x(t)\|$ . Wählen wir einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  aus und betrachten wieder die Lösung (4.24). Es folgt aus (4.25), dass  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ . Dann ist einer von den Lösungen  $\operatorname{Re} x(t)$  und  $\operatorname{Im} x(t)$  unbeschränkt, woraus die Behauptung folgt. ■

**Beweis von Satz 4.3.** (a) Die Hauptidee von Beweis ist wie folgt. Die Lösung  $x(t)$  hat den Anfangswert  $x(0)$  in der Nähe von  $x_0$ , insbesondere kann man voraussetzen, dass  $x(0) \in U$ . Dann gilt auch  $x(t) \in U$  für  $t \in [0, T)$  mit einem  $T > 0$ , und wir erhalten nach Kettenregel für alle  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = V_x(x) x'(t) = V_x(x) f(x) = \partial_{f(x)} V(x). \tag{4.26}$$

Insbesondere erklärt die Identität (4.26), warum  $\partial_{f(x)} V(x)$  die orbitale Ableitung heißt: da sie gleich die Ableitung von  $V$  entlang die Phasenkurve ist. Nach (4.26) und die Voraussetzung (4.10) erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0.$$

Daraus folgt, dass die Funktion  $V$  monoton fallend entlang die Lösung  $x(t)$  ist, insbesondere gilt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)).$$

Wegen  $V(x(0)) \approx 0$  gilt auch  $V(x(t)) \approx 0$  und somit muss der Punkt  $x(t)$  in der Nähe von  $x_0$  immer bleiben.

Um diese Idee zu verwirklichen, verkleinern wir zunächst die Menge  $U$ , so dass  $U$  beschränkt ist und  $V(x)$  auf dem Abschluss  $\bar{U}$  definiert ist. Bezeichnen wir

$$B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein so dass  $\bar{B}_\varepsilon \subset U$ . Für solche  $\varepsilon$  definieren wir

$$m(\varepsilon) := \inf_{x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon} V(x).$$

Da  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  kompakt ist und  $V$  stetig und echt positiv auf  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  ist, erhalten wir, dass auch  $m(\varepsilon) > 0$  (da nach dem Satz von Minimum die Funktion  $V$  ihre untere Grenze auf  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  annimmt).

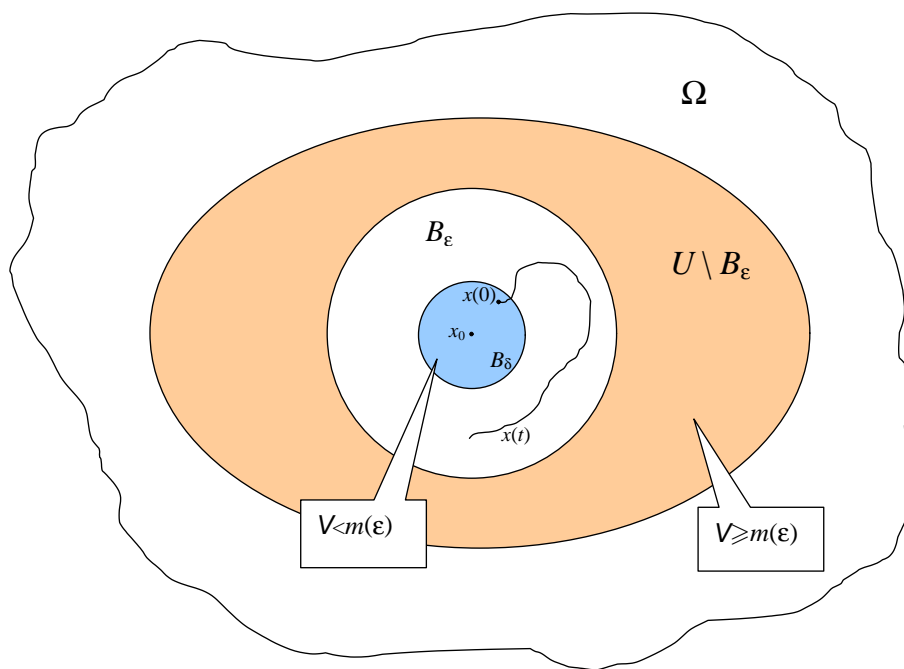


Figure 56: Beweis von Satz 4.3(a)

Nach Definition von  $m(\varepsilon)$  haben wir

$$V(x) \geq m(\varepsilon) \quad \text{für alle } x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon. \quad (4.27)$$

Da  $V(x_0) = 0$  und  $m(\varepsilon) > 0$ , existiert  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so klein, dass

$$V(x) < m(\varepsilon) \quad \text{für alle } x \in B_\delta. \quad (4.28)$$

Sei  $x(t)$  eine maximale Lösung der DGL  $x' = f(x)$  im Bereich  $\mathbb{R} \times U$  mit  $x(0) \in B_\delta$ . Wir beweisen, dass  $x(t)$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ , woraus die Ljapunow-Stabilität von 0 folgen wird (Fig. 56).

Da  $x(0) \in B_\delta$ , erhalten wir nach (4.28), dass

$$V(x(0)) < m(\varepsilon).$$

Da die Funktion  $V(x(t))$  monoton fallend ist, erhalten wir auch

$$V(x(t)) < m(\varepsilon) \quad \text{für alle } t > 0,$$

sofern  $x(t)$  definiert ist<sup>22</sup>. Es folgt aus (4.27) dass  $x(t) \in B_\varepsilon$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $x(t)$  für alle  $t > 0$  definiert ist. Angenommen das Gegenteil gilt, also  $x(t)$  nur für  $t < T$  definiert ist, wobei  $T < \infty$ . Nach Satz 3.7 verlässt der Graph der Lösung  $x(t)$  jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times U$  für  $t \rightarrow T-$ , während der Graph tatsächlich in der kompakten Menge  $[0, T] \times \overline{B_\varepsilon}$  enthalten ist. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(b) Es folgt aus (4.11) und (4.26), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)).$$

Es reicht zu zeigen, dass

$$V(x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

da das die Konvergenz  $x(t) \rightarrow x_0$  ergibt (erinnern wir uns daran, dass  $x_0$  die einzige Nullstelle von  $V$  ist). Da  $V(x(t))$  monoton fallend ist, existiert der Grenzwert

$$c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)).$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass  $c > 0$ . Nach der Stetigkeit von  $V$  existiert  $r > 0$  mit

$$V(x) < c \quad \text{für alle } x \in B_r.$$

Da  $V(x(t)) \geq c$  für alle  $t > 0$ , es folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0.$$

Da  $x(t) \in \overline{U} \setminus B_r$ , es folgt, dass  $W(x(t)) \geq m$  für alle  $t > 0$  und somit

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)) \leq -m.$$

Integration in  $t$  ergibt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - mt,$$

woraus folgt, dass  $V(x(t)) < 0$  für hinreichend große  $t$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass die Ruhelage  $x_0$  stabil ist, also, für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

---

<sup>22</sup>Da  $x(t)$  als eine Lösung bezüglich des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times U$  der DGL definiert ist, ist der Punkt  $x(t)$  immer in  $U$  enthalten, sofern  $x(t)$  definiert ist.



Wählen wir  $\varepsilon$  so dass  $\overline{B_\varepsilon} \subset U$ . Sei  $x(0)$  ein Punkt in  $B_\delta \setminus \{x_0\}$ . Dann  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t > 0$ ; insbesondere haben wir  $x(t) \in U$  für alle  $t > 0$ . Es folgt aus der Voraussetzung (4.12), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq W(x(t)) \geq 0 \quad (4.29)$$

so dass die Funktion  $V(x(t))$  monoton wachsend ist und somit

$$V(x(t)) \geq V(x(0)) =: c > 0$$

für alle  $t \geq 0$ . Es existiert  $r > 0$  so dass  $V(x) < c$  für alle  $x \in B_r$ .

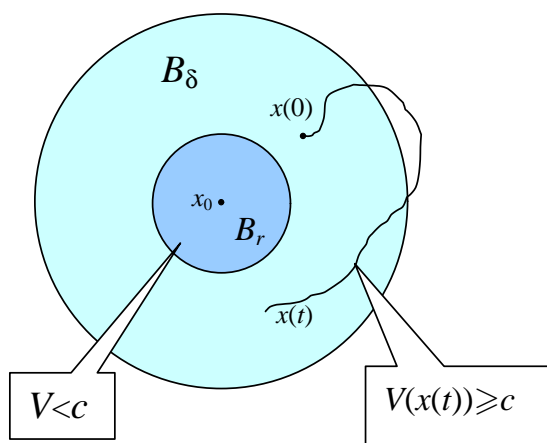


Figure 57: Beweis von Satz 4.3(c)

Daraus folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0,$$

und erhalten  $W(x(t)) \geq m$ , was zusammen mit (4.29) ergibt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq m \text{ für alle } t > 0.$$

Es folgt nach Integration, dass  $V(x(t)) \geq mt \rightarrow +\infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ , was im Widerspruch zur Beschränktheit von  $V$  auf  $\overline{U}$  ist (Fig. 57). ■

**Beweis von Satz 4.2.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_0 = 0$ , so dass  $f(0) = 0$ . Nach der Differenzierbarkeit von  $f(x)$  in 0 haben wir

$$f(x) = Ax + h(x), \quad (4.30)$$

wobei  $A = f_x(0)$  und

$$h(x) = o(\|x\|) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Wir beweisen zunächst, dass unter der Voraussetzung  $f \in C^2(\Omega)$  gilt

$$h(x) = O(\|x\|^2) \text{ für } x \rightarrow 0,$$

d.h.

$$\|h(x)\| \leq C \|x\|^2 \quad (4.31)$$

mit einer Konstante  $C$ , vorausgesetzt  $\|x\|$  hinreichend klein ist. Nach Taylor-Formel erhalten wir für jedes  $k = 1, \dots, n$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_k(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Die erste Term auf der rechten Seite ist die  $k$ -te Komponente von  $Ax$ , und der Rest ist die  $k$ -te Komponente von  $h(x)$ , also

$$h_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2),$$

woraus folgt

$$|h_k(x)| \leq B \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| + o(\|x\|^2) = B \|x\|_1^2 + o(\|x\|^2),$$

wobei  $B = \max_{i,j,k} |\partial_{ij} f_k(0)|$ . Die Abschätzung von  $\|x\|_1$  durch  $\text{const} \|x\|$  ergibt (4.31).

Beweisen wir, dass die folgende Funktion

$$V(x) = \int_0^\infty \|e^{sA} x\|_2^2 ds \quad (4.32)$$

die Ljapunow-Funktion ist. Zunächst überprüfen wir, dass  $V(x) < \infty$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ , also das Integral in (4.32) konvergiert. Im Beweis von Satz 4.1 haben wir die folgende Ungleichung bewiesen:

$$\|e^{tA} x\| \leq C e^{\alpha t} (t^N + 1) \|x\| \quad (4.33)$$

(vgl. (4.23)), wobei  $C, N$  positive Konstanten sind und

$$\alpha = \max \{ \text{Re } \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

Da nach der Voraussetzung gilt  $\alpha < 0$ , ergibt (4.33), dass die Funktion  $s \mapsto \|e^{sA} x\|$  exponentiell fallend für  $s \rightarrow +\infty$  ist, woraus die Konvergenz des Integrals (4.32) folgt.

Jetzt zeigen wir, dass  $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  (tatsächlich  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ). Stellen wir den Vektor  $x$  in der Standardbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$  wie folgt dar:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Da

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = x \cdot x$$

und

$$e^{sA} x = \sum x_i e^{sA} v_i,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\|e^{sA}x\|_2^2 &= e^{sA}x \cdot e^{sA}x = \left(\sum_i x_i (e^{sA}v_i)\right) \cdot \left(\sum_j x_j (e^{sA}v_j)\right) \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j (e^{sA}v_i \cdot e^{sA}v_j).\end{aligned}$$

Integration in  $s$  ergibt

$$V(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j,$$

wobei

$$b_{ij} = \int_0^\infty (e^{sA}v_i \cdot e^{sA}v_j) ds$$

Konstanten sind. Deshalb ist  $V(x)$  eine quadratische Funktion von  $x_1, \dots, x_n$ , woraus folgt, dass  $V$   $\infty$ -fach differenzierbar ist.

**Bemerkung.** Normalerweise benutzen wir eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Im Gegensatz benutzen wir in der Definition (4.32) von  $V(x)$  ausdrücklich die 2-Norm, um die Differenzierbarkeit von  $V(x)$  zu sichern.

Die Funktion  $V(x)$  ist offensichtlich nicht-negativ und  $V(x) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = 0$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\partial_{f(x)}V(x) \leq 0$ . Nach (4.30) haben wir

$$\partial_{f(x)}V(x) = \partial_{Ax}V(x) + \partial_{h(x)}V(x). \quad (4.34)$$

Das die Funktion  $y(t) = e^{tA}x$  nach Satz 2.22 die DGL  $y' = Ay$  löst, haben wir nach (4.26) für alle  $t \geq 0$

$$\partial_{Ay}V(y) = \frac{d}{dt}V(y(t)),$$

woraus folgt für  $t = 0$

$$\partial_{Ax}V(x) = \frac{d}{dt}V(e^{tA}x)\Big|_{t=0}. \quad (4.35)$$

Andererseits nach Definition (4.32) von  $V$  erhalten wir

$$V(e^{tA}x) = \int_0^\infty \|e^{sA}(e^{tA}x)\|_2^2 ds = \int_0^\infty \|e^{(s+t)A}x\|_2^2 ds = \int_t^\infty \|e^{\tau A}x\|_2^2 d\tau,$$

wo wir die Substitution  $\tau = s + t$  benutzt haben. Ableiten dieser Identität in  $t$  ergibt

$$\frac{d}{dt}V(e^{tA}x) = -\|e^{tA}x\|_2^2.$$

Nach dem Einsetzen in (4.35) erhalten wir

$$\partial_{Ax}V(x) = -\|x\|_2^2. \quad (4.36)$$

Die zweite Term (4.34) kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\partial_{h(x)}V(x) = V_x(x) \cdot h(x) \leq \|V_x(x)\|_2 \|h(x)\|_2. \quad (4.37)$$

Es folgt aus (4.34), (4.36), (4.37) und (4.31), dass

$$\begin{aligned}\partial_{f(x)}V(x) &= \partial_{Ax}V(x) + \partial_{h(x)}V(x) \\ &\leq -\|x\|_2^2 + \|V_x(x)\|_2 \|h(x)\|_2 \\ &\quad -\|x\|_2^2 + C \|V_x(x)\|_2 \|x\|_2^2,\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass  $\|x\|_2$  hinreichend klein ist.

Da die Funktion  $V(x)$  ein Minimum in 0 annimmt, erhalten wir  $V_x(0) = 0$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\|V_x(x)\|_2 \leq \varepsilon,$$

vorausgesetzt  $\|x\|$  hinreichend klein ist. Setzen wir  $\varepsilon = \frac{1}{2}C$  und erhalten die folgende Ungleichung

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq -\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = -\frac{1}{2}\|x\|_2^2,$$

die in einer kleinen Umgebung  $U$  von 0 gilt. Nach Satz 4.3 mit  $W(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$  erhalten wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist. ■

## 4.6 Periodische Lösungen

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $T$ -periodisch, für ein  $T > 0$ , wenn

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Der Wert  $T$  heißt eine Periode von  $f$ . Ist  $f$  auch von anderen Variablen abhängig, z.B.  $f = f(t, x)$ , dann heißt  $f$   $T$ -periodisch in  $t$ , wenn die Funktion  $t \mapsto f(t, x)$   $T$ -periodisch für jedes  $x$  ist.

In diesem Abschnitt betrachten wir periodische Lösungen von DGLen.

**Lemma 4.4** *Sei  $f(t, x)$  eine Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R} \times \Omega$  und mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Angenommen,  $f$  ist  $T$ -periodisch in  $t$ . Sei  $x(t)$  eine Lösung der DGL  $x' = f(t, x)$  auf dem Intervall  $[0, T]$  mit  $x(0) = x(T)$ . Dann ist die Funktion  $x(t)$  fortsetzbar auf  $(-\infty, \infty)$  als eine  $T$ -periodische Lösung.*

**Beweis.** Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  definieren wir  $x(t)$  wie folgt:  $x(t) = x(\tau)$  wobei  $\tau$  der einzige Wert auch  $[0, T)$  ist, so dass  $T$  durch  $t - \tau$  teilbar ist. Äquivalent, für jedes  $t$  existiert einzige ganze Zahl  $k$  mit  $t + kT \in [0, T)$ . Dann setzen wir  $x(t) = x(t + kT)$ .

Wegen  $x(0) = x(T)$  ist die fortgesetzte Funktion  $x(t)$  stetig in  $\mathbb{R}$ . Auf  $[0, T]$  ist  $x(t)$  differenzierbar als eine Lösung von DGL. Dann ist  $x(t)$  offensichtlich differenzierbar auch für alle Werten von  $t$ , die kein Vielfaches von  $T$  sind. Zeigen wir, dass  $x(t)$  differenzierbar auch für  $t = kT$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ist. Wegen der  $T$ -Periodizität reicht es zu zeigen, dass  $x$  differenzierbar in  $t = 0$  ist. Die Funktion  $x$  hat auf  $[0, T]$  die rechte Ableitung  $x'_R(t)$  in  $t = 0$  und die linke Ableitung  $x'_L(t)$  in  $t = T$ , und zwar

$$x'_R(0) = f(0, x(0)) \quad \text{und} \quad x'_L(T) = f(T, x(T)).$$

Nach  $T$ -Periodizität von  $f(t, x)$  und  $x(t)$  erhalten wir  $x'_L(T) = x'_L(0)$  und

$$f(T, x(T)) = f(0, x(0)),$$

woraus folgt

$$x'_L(0) = f(0, x(0)) = x'_R(0)$$

und somit  $x(t)$  in  $t = 0$  differenzierbar ist. Die Gleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in [0, T]$  ergibt dann dieselbe Gleichung für alle  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Satz 4.5** (Periodische Lösungen lineares Systems) *Betrachten wir das Normalsystem*

$$x' = Ax + f(t), \quad (4.38)$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige  $T$ -periodische Funktion ist. Angenommen, alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  erfüllen die Bedingung

$$\lambda \neq \frac{2\pi i}{T}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.39)$$

Dann hat das System genau eine  $T$ -periodische Lösung.

Ist die Bedingung (4.39) erfüllt, so heißt die Periode  $T$  *nicht-resonant* für die Gleichung (4.38).

**Beweis.** Sei  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung von (4.38) auf  $(-\infty, \infty)$  mit  $x_0(0) = 0$ . Dann ist die allgemeine Lösung durch die folgende Identität gegeben:

$$x(t) = e^{tA}v + x_0(t)$$

mit beliebigem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ . In der Tat, wir haben  $x(0) = v$ . Nach Lemma 4.4 ist die Lösung  $x(t)$   $T$ -periodisch genau dann, wenn  $x(0) = x(T)$ , was äquivalent zu

$$v = e^{TA}v + x_0(T)$$

ist, d.h.

$$(e^{TA} - \text{id})v = -x_0(T). \quad (4.40)$$

Das ist ein lineares algebraisches System bezüglich  $v$ , das genau dann lösbar ist, wenn (4.38) eine  $T$ -periodische Lösung hat. Andererseits ist (4.40) eindeutig lösbar, vorausgesetzt

$$\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0.$$

Die Eigenwerte von  $e^{TA} - \text{id}$  sind gleich  $e^{T\lambda} - 1$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist. Die Bedingung (4.39) ergibt, dass  $T\lambda \neq 2\pi ki$  und somit  $e^{T\lambda} \neq 1$ . Deshalb verschwinden die Eigenwerte von  $e^{TA} - \text{id}$  nicht, und somit  $\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0$ . Die Gleichung (4.40) hat genau eine Lösung  $v$ , die die  $T$ -periodische Lösung von (4.38) bestimmt. ■

**Beispiel.** Wir zeigen in diesem Beispiel, dass die Voraussetzung (4.39) wesentlich ist. Betrachten wir die DGL

$$x'' + px' + qx = F(t) \quad (4.41)$$

wobei  $p, q \in \mathbb{R}$  und  $F(t)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Diese Gleichung ist äquivalent zum System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -py - qx + F(t) \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -p - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachten wir die Werte  $\lambda = \frac{2\pi k}{T}i = ki$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Ist  $\lambda = ki$  ein Eigenwert, so gilt  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , woraus folgt

$$p = 0 \text{ und } q = -\lambda^2 = k^2. \quad (4.42)$$

Somit haben wir folgendes bewiesen: ist  $p \neq 0$  oder  $q \neq k^2$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , dann hat die Gleichung (4.41) genau eine  $2\pi$ -periodische Lösung.

Im Fall (4.42) ist die DGL (4.41) äquivalent zu

$$x'' + k^2x = F(t). \quad (4.43)$$

Zeigen wir, dass diese Gleichung mit  $F(t) = \cos kt$  keine periodische Lösung hat. In der Tat, da  $ik$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, hat die DGL

$$x'' + k^2x = e^{ikt}$$

eine spezielle Lösung der Form  $x(t) = ate^{ikt}$  mit  $a = \frac{1}{P'(ik)} = \frac{1}{2ik}$  (angenommen  $k \neq 0$ ). Daraus folgt, dass (4.43) eine spezielle Lösung

$$x(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2ik} t e^{ikt} \right) = \frac{1}{2k} t \sin t,$$

hat. Somit ist die allgemeine Lösung von (4.43)

$$x(t) = \frac{t}{2k} \sin kt + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Da diese Lösung unbeschränkt ist, ist sie nie periodisch.

Im Fall  $k = 0$  hat die Gleichung  $x'' = 1$  die allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

die auch nie periodisch ist.

Betrachten wir ein numerisches Beispiel

$$x'' + 3x = 2 \sin t$$

mit  $2\pi$ -periodischer Störfunktion  $F(t) = 2 \sin t$ . Da 3 keine Quadratzahl ist, das ist nichtresonanter Fall, so dass es genau eine  $2\pi$ -periodische Lösung gibt. Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = \sin t + C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t,$$

und die  $2\pi$ -periodische Lösung ist  $x(t) = \sin t$ .

**Satz 4.6** (Periodische Lösungen für kleine Störungen von linearen Systemen) *Under den Bedingungen von Satz 4.5, sei  $g(t, x, s)$  eine Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S$  und mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $S$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}^m$  ist. Angenommen,  $g$  ist  $T$ -periodisch in  $t$ ,  $g \in C^k(x, s)$  mit  $k \geq 1$  und  $g(t, x, 0) \equiv 0$ . Betrachten wir das Normalsystem*

$$x' = Ax + f(t) + g(t, x, s). \quad (4.44)$$

*Dann hat das System (4.44) für alle  $s$  mit hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$ . Darüber hinaus gilt  $x \in C^k(s)$ .*

**Bemerkung.** Für  $s = 0$  nimmt die Gleichung (4.44) die Form

$$x' = Ax + f(t) \quad (4.45)$$

an. Insbesondere ist  $x(t, 0)$  die  $T$ -periodische Lösung von (4.45), die auch nach Satz 4.5 existiert. Die DGL (4.44) kann als eine Störung von (4.38) betrachtet werden.

**Beweis.** Bezeichnen wir mit  $x(t, s, v)$  die maximale Lösung von (4.44) mit der Anfangsbedingung  $x|_{t=0} = v$ , für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $s \in S$ . Nach Satz 4.5 existiert ein eindeutiger Wert  $v_0 \in \Omega$ , derart, dass  $x(t, 0, v_0)$   $T$ -periodisch ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $v_0 = 0$ , so dass  $x(t, 0, 0)$  eine  $T$ -periodische Lösung ist.

Nach Satz 3.11 ist der Definitionsbereich der Lösung  $x(t, s, v)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Da die Lösung  $x(t, 0, 0)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert ist, ist die Lösung  $x(t, s, v)$  mindestens für alle  $t \in [0, T]$  definiert ist, vorausgesetzt  $\|s\|$  und  $\|v\|$  hinreichend klein sind. Wir möchten den Anfangswert  $v$  abhängig von  $s$  wählen, derart, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x(T, s, v) = v. \quad (4.46)$$

Ist  $v = v(s)$  eine Lösung von (4.46), so ist die Funktion  $x(t, s, v(s))$   $T$ -periodisch nach Lemma 4.4<sup>23</sup>.

Wir brauchen jetzt zu beweisen, dass die Gleichung (4.46) für hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine Lösung  $v$  hat. Dafür benutzen wir der Satz von der impliziten Funktion.

**Satz von der impliziten Funktion.** *Sei  $F(u, v)$  eine  $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktion, die auf einer offenen Umgebung von  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  definiert ist (mit  $u \in \mathbb{R}^m$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ ). Sei  $F \in C^k(u, v)$  mit  $k \geq 1$ ,  $F(0, 0) = 0$  und  $\det \partial_v F(0, 0) \neq 0$ . Dann hat die Gleichung  $F(u, v) = 0$  für hinreichend klein  $\|u\|$  genau eine Lösung  $v = v(u)$ , und es gilt  $v \in C^k(u)$ .*

Wir benutzen diesen Satz für die Funktion

$$F(s, v) = x(T, s, v) - v,$$

so dass die Gleichung (4.46) äquivalent zu  $F(s, v) = 0$  ist. Nach Satz 3.14 gilt  $x \in C^k(s, v)$ , so dass auch  $F \in C^k(s, v)$ . Bei  $s = 0$ ,  $v = 0$  ist die Gleichung (4.46) erfüllt, so dass  $F(0, 0) = 0$ . Berechnen wir  $\partial_v F = \partial_v x - \text{id}$  bei  $s = 0$ ,  $v = 0$ . Für  $s = 0$  ist  $x(t, 0, v)$  die Lösung von (4.45) mit Anfangsbedingung  $x|_{t=0} = v$ . Wie im Beweis von Satz 4.5 haben wir

$$x(T, 0, v) = e^{TA}v + x_0(T),$$

---

<sup>23</sup>Da die Lösung  $t \mapsto x(t, s, v)$  schon maximal ist, man braucht diese Lösung nicht fortzusetzen.

woraus folgt  $\partial_v x(T, 0, v) = e^{TA}$  und somit

$$\partial_v F(0, 0) = e^{TA} - \text{id}.$$

Im Beweis von Satz 4.5 haben wir schon gezeigt, dass  $\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0$ , vorausgesetzt, dass  $T$  nicht-resonant für  $A$  ist. Somit hat die Gleichung  $F(s, v) = 0$  genau eine Lösung  $v = v(s)$  für hinreichend klein  $\|s\|$ . Dann löst  $v(s)$  auch die Gleichung (4.46), und wir erhalten die  $T$ -periodische Lösung  $t \mapsto x(t, s, v(s))$ . Wegen  $v(s) \in C^k(s)$  ist die Lösung  $x(t, s, v(s))$  auch von der Klasse  $C^k(s)$ . ■

**Korollar 4.7** *Under den Bedingungen von Satz 4.6 es gilt für die  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.44) die folgende asymptotische Entwicklung*

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + \dots + x_k(t)s^k + o(s^k) \quad \text{für } s \rightarrow 0, \quad (4.47)$$

wobei alle Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind.

**Beweis.** Die Entwicklung (4.47) gilt nach Taylorformel, da  $x(t, s) \in C^k(s)$ . Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind. Wir haben

$$x(t+T, s) - x(t, s) = \sum_{j=0}^k (x_j(t+T) - x_j(t))s^j + o(s^k).$$

Da die linke Seite identisch Null ist, erhalten wir nach Eindeutigkeit von Taylorentwicklung, dass  $x_j(t+T) - x_j(t) \equiv 0$ , d.h.  $x_j$   $T$ -periodisch ist. ■

Gegeben sei eine skalare DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = F(t) + G(t, x, s) \quad (4.48)$$

mit Parameter  $s \in \mathbb{R}^m$ , man erhält das äquivalente Normalsystem

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t) + g(t, \mathbf{x}, s)$$

mit  $\mathbf{x} = (x, x', \dots, x^{(n-1)})^T$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ F(t) \end{pmatrix}, \quad g(t, \mathbf{x}, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ G(t, \mathbf{x}_1, s) \end{pmatrix}$$

Sei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (4.48), also

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

**Behauptung.** *Die folgende Identität gilt:*

$$\det(A - \lambda \text{id}) = (-1)^n P(\lambda),$$

d.h.  $(-1)^n P(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom von  $A$ .



**Beweis.** Induktionsanfang: für  $n = 1$  gilt  $A = (-a_1)$  und  $\det(A - \lambda) = -(\lambda + a_1) = -P(\lambda)$ . Für den Induktionsschritt von  $n - 1$  nach  $n$  entwickeln wir die Determinante nach der ersten Spalte und benutzen die Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \text{id}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -\lambda - a_1 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -\lambda - a_1 \end{pmatrix} + (-1)^n a_n \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^{n-1} \lambda (\lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + (-1)^n a_n \\ &= (-1)^n P(\lambda). \end{aligned}$$

■

Nach Satz 4.6 erhalten wir folgendes.

**Korollar 4.8** *Angenommen, die Funktionen  $F(t)$  und  $G(t, x, s)$  sind stetig und  $T$ -periodisch in  $t$ ,  $G \in C^k(x, s)$  mit  $k \geq 1$  und  $G(t, x, 0) \equiv 0$ . Ist  $T$  nicht-resonant für das Polynom  $P(\lambda)$  (d.h. die Nullstellen von  $P(\lambda)$  erfüllen die Bedingung (4.39)), so existiert für alle  $s$  mit hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.48). Diese Lösung hat eine Taylorentwicklung*

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + \dots + x_k(t)s^k + o(s^k) \quad \text{für } s \rightarrow 0, \quad (4.49)$$

wobei alle Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL mit Parameter

$$x'' + 3x = 2 \sin t + sx^2. \quad (4.50)$$

Die Funktion  $f(t) = 2 \sin t$  ist  $2\pi$ -periodisch, und die Funktion  $g(t, x, s) = sx^2$  gehört zu alle  $C^k(x, s)$  und ist trivial  $2\pi$ -periodisch in  $t$ . Das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + 3$  hat die Nullstellen  $\lambda = \pm i\sqrt{3}$ . Offensichtlich ist  $2\pi$  nicht-resonant, und nach Korollar 4.8 erhalten wir für kleine  $s$  die Existenz von einer  $T$ -periodischen Lösung  $x(t, s)$  mit der Entwicklung (4.49).

Bestimmen wir die Koeffizienten  $x_j(t)$  bis zum  $j = 2$ . Dafür setzen wir die Entwicklung

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + o(s^2)$$

in die Gleichung (4.50) ein und somit erhalten

$$\begin{aligned} (x_0'' + 3x_0) + (x_1'' + 3x_1)s + (x_2'' + 3x_2)s^2 + o(s^2) &= 2 \sin t + s(x_0^2 + 2x_0x_1s + o(s)) \\ &= 2 \sin t + x_0^2s + 2x_0x_1s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Das Vergleich von Koeffizienten bei  $s^j$  ergibt, dass  $x_j(t)$  die folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}x_0'' + 3x_0 &= 2 \sin t \\x_1'' + 3x_1 &= x_0^2 \\x_2'' + 3x_2 &= 2x_0x_1.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung hat die einzige  $2\pi$ -periodische Lösung  $x_0(t) = \sin t$ . Die zweite Gleichung nimmt die Form

$$x_1'' + 3x_1 = \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

an, woraus wir die folgende  $2\pi$ -periodische Lösung bestimmen:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6}.$$

Die  $2\pi$ -periodische Lösung der dritten Gleichung

$$x_2'' + 3x_2 = \sin t \left( \cos 2t + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t$$

ist

$$x_2 = -\frac{1}{12} \sin t - \frac{1}{12} \sin 3t.$$

(Fig. 58)

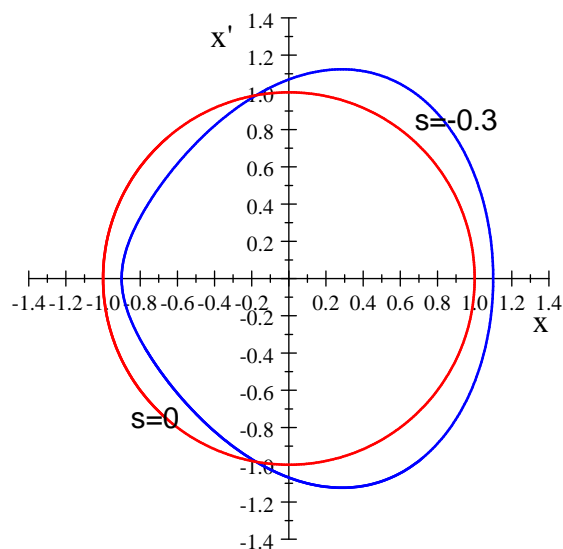


Figure 58: Die  $2\pi$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.50) im Phasenraum  $(x, x')$ : für  $s = 0$  (rot) und  $s = -0.3$  (blau)

Betrachten wir jetzt ein Normalsystem

$$x' = F(x) + sf(t), \tag{4.51}$$

wobei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion der Klasse  $C^{k+1}$  mit  $k \geq 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige  $T$ -periodische Funktion, und  $s \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $x_0$  eine Ruhelage von  $x' = F(x)$ , d.h. eine Nullstelle von  $F$ . Für  $s = 0$  hat das System (4.51) die konstante Lösung  $x(t) \equiv x_0$ , die trivial periodisch. Wir besprechen die Frage, ob das System (4.51) eine  $T$ -periodische Lösung hat auch für  $s \neq 0$ , mindestens für die kleinen Werten von  $s$ . Dafür betrachten wir eine neue unbekannte Funktion  $z$  wie folgt:

$$z = \frac{x - x_0}{s} \Leftrightarrow x = x_0 + sz.$$

Die Ableitung in  $t$  ergibt

$$z' = \frac{1}{s}(F(x) + sf(t)) = \frac{1}{s}F(x_0 + sz) + f(t).$$

Nach Lemma 3.15 (Hadamard-Lemma) haben wir die Identität

$$F(u) - F(v) = \varphi(u, v)(u - v) \quad (4.52)$$

für alle  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\varphi$  eine stetige Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist und

$$\varphi(u, u) = F'(u).$$

Es folgt aus dem Beweis von Lemma 3.15, dass  $F \in C^{k+1}$  ergibt  $\varphi \in C^k(u, v)$ . Es folgt aus (4.52), dass

$$F(x_0 + sz) - F(x_0) = \varphi(x_0 + sz, x_0)sz.$$

Wegen  $F(x_0) = 0$  erhalten wir

$$\frac{1}{s}F(x_0 + sz) = \varphi(x_0 + sz, x_0)z = Az + g(z, s),$$

wobei

$$A := F'(x_0) \quad \text{und} \quad g(z, s) := \varphi(x_0 + sz, x_0)z - Az.$$

Es folgt daraus, dass

$$g(z, 0) = \varphi(x_0, x_0)z - Az = F'(x_0)z - F'(x_0)z = 0.$$

Somit erfüllt  $z$  die Gleichung

$$z' = Az + f(t) + g(z, s),$$

wobei  $f(t)$   $T$ -periodisch ist,  $g(z, s) \in C^k(z, s)$ ,  $g(z, 0) = 0$  und  $g$  trivial  $T$ -periodisch in  $t$ . Nach Satz 4.6, für hinreichend kleine Werte von  $s$  existiert genau eine  $T$ -periodische Lösung  $z(t, s)$ , und zwar  $z \in C^k(s)$ . Für die DGL (4.51) erhalten wir folgendes.

**Korollar 4.9** *Unter den o.g. Bedingungen setzen wir noch voraus, dass  $T$  nicht-resonant für die Matrix  $A = F'(x_0)$  ist. Dann, für hinreichend klein  $s$ , hat die DGL (4.51) genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$ , die stetig in  $(t, s)$  ist und  $x(t, 0) = x_0$ . Darüber hinaus gilt  $x(t, s) \in C^k(s)$ .*

**Bemerkung.** Wie im Satz 4.2 setzen wir

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ein Eigenwert von } A \}.$$

Ist die Bedingung  $\alpha < 0$  von Satz 4.2(a) erfüllt, dann ist jedes  $T$  nicht-resonant für  $A$ . In der Tat, für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha < 0$ , während im Resonanzfall gilt  $\lambda = \frac{2\pi i}{T}k$  und somit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Deshalb ergibt die Bedingung  $\alpha < 0$  sowohl die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $x_0$  der DGL  $x' = F(x)$  als auch die Existenz der periodischen Lösung von (4.51) für hinreichend klein  $s$ .

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL mit Parameter

$$x'' + 5x - x^2 - 4 = 2s \sin t. \quad (4.53)$$

Das entsprechende Normalsystem ist

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - 5x + 4 + 2s \sin t \end{cases}$$

Für  $s = 0$  hat das System zwei Ruhelagen  $(x_1, 0)$  und  $(x_2, 0)$  wobei  $x_1, x_2$  die Nullstellen von  $x^2 - 5x + 4 = 0$  sind, d.h.  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 4$ . Betrachten wir das System in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$ . Es ist bequemer direkt mit der Gleichung (4.53) zu arbeiten, indem wir die unbekannte Funktion wechseln wie folgt:

$$z = \frac{x - 1}{s} \Leftrightarrow x = 1 + sz.$$

Dann erhalten wir aus (4.53), dass

$$sz'' + 5(1 + sz) - (1 + sz)^2 - 4 = 2s \sin t$$

und nach Vereinfachen

$$z'' + 3z = 2 \sin t + sz^2.$$

Das ist genau die DGL (4.50), und wir wissen schon, dass die  $2\pi$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  für klein  $s$  existiert und die folgende Taylorentwicklung in  $s$  besitzt:

$$z(t, s) = \sin t + \left( \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6} \right) s - \frac{1}{12} (\sin t + \sin 3t) s^2 + o(s^2)$$

für  $s \rightarrow 0$ . Daraus erhalten wir die  $2\pi$ -periodische Lösung von (4.53) in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$ :

$$x(t, s) = 1 + (\sin t) s + \left( \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6} \right) s^2 - \frac{1}{12} (\sin t + \sin 3t) s^3 + o(s^3)$$

(Fig. 59). Für  $s \rightarrow 0$  konvergiert die geschlossene Phasenkurve der periodischen Lösung  $x(t, s)$  gegen die Ruhelage  $(1, 0)$ .

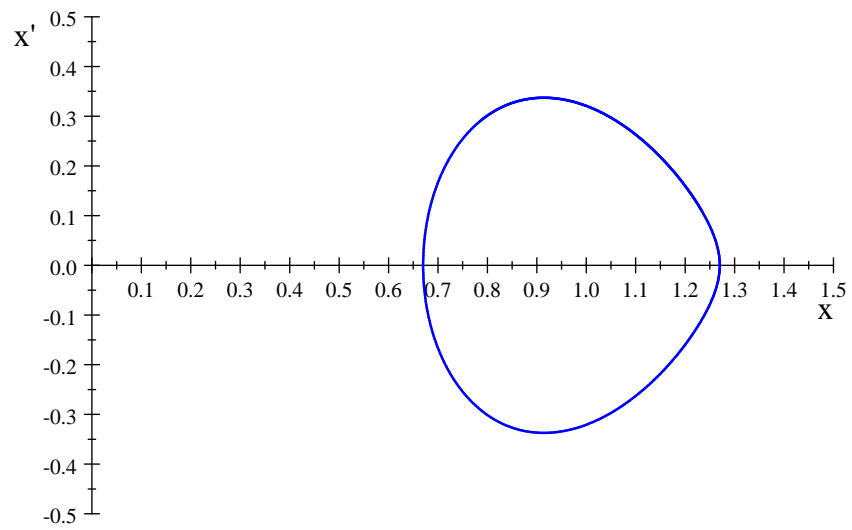


Figure 59: Die  $2\pi$ -periodische Lösung von (4.53) im Phasenraum  $(x, x')$  in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$