

Themen für Proseminar "Analysis" SS 2022

Alexander Grigoryan

CONTENTS

1. Fundamentalsatz der Algebra - verschiedene Beweise	2
2. Approximationssatz von Weierstraß. Beweise und Anwendungen	3
3. Satz von Stone-Weierstraß und Anwendungen	4
4. Das Sperrersche Lemma und Anwendungen (Fixpunktsatz von Brouwer, Lebesgue'sche Überdeckungsdimension)	5
5. Fixpunktsatz von Schauder und Anwendungen	7
6. Hyperkomplexe Zahlen: Quaternionen und Oktonionen	8
7. Zerlegung von Rechtecken in verschiedene Quadrate	9
8. Fibonacci-Zahlen und verschiedene Anwendungen	10
9. Differenzgleichungen (Rekursionsgleichungen)	11
10. Isoperimetrische Ungleichungen	12
11. Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension	13
12. Satz von Baire (bairescher Kategoriensatz) und Anwendungen	14
13. Nichtstandard-Analysis	15
14. Fraktionale Infinitesimalrechnung (fraktionale Ableitungen und Integration) und Anwendungen	16
15. Satz von Sard	17
16. Orthogonale Polynome (Chebyshev-, Legendre-, Hermite-, Laguerre-Polynome)	18
17. Spezielle Funktionen (Beta- und Gamma-Funktionen, Bessel-Funktionen) und Anwendungen	19
18. Fourierreihen und Anwendungen zu Differentialgleichungen	20
19. Distributionen und Differentialrechnung von Distributionen	21
20. Fréchet und Gâteaux Ableitungen: Rechenregel und Anwendungen in Variationsrechnung.	23
21. Satz von Picard-Lindelöf	25
<i>Literatur*</i>	26

* Die Literaturliste ist nicht vollständig, man muss in der Bibliothek und Internet weiter recherchieren.

1. Fundamentalsatz der Algebra - verschiedene Beweise

Literatur: [59], [39]

Der Fundamentalsatz von Algebra besagt folgendes: jedes Polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

von Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle; d.h. $\exists z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = 0$.

Dieser Satz hat viele Anwendungen in ganzer Mathematik. Zum Beispiel, mit Hilfe von dem Fundamentalsatz der Algebra beweist man, dass jede Matrix einen komplexen Eigenwert hat. Noch eine Folgerung von dem Fundamentalsatz der Algebra: das Polynom $P(z)$ zerfällt in ein Produkt aus Linearfaktoren:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

mit komplexen z_1, \dots, z_n (wobei z_k alle Nullstellen von P sind).

Es gibt eine Menge von verschiedenen Beweisen des Fundamentalsatzes der Algebra, zum Beispiel, mit Hilfe von:

- Verwendung von dem *Extremwertsatz* auf die Funktion $z \mapsto |P(z)|$, indem man zeigt, dass das Minimum von dieser Funktion gleich 0 ist;
- Verwendung von der Theorie von *symmetrischen Polynomen*;
- Verwendung von dem Begriff von *Windungszahl* aus Topologie;
- Verwendung von der Theorie von *analytischen Funktionen* von komplexen Variablen;

und viele andere.

Die Aufgabe ist hier einige von solchen Beweisen darzustellen und Anwendungen zu erwähnen.

2. Approximationssatz von Weierstraß. Beweise und Anwendungen

Literatur: [19], [46], [47].

Der Approximationssatz von Weierstraß besagt folgendes: für jede stetige reellwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gibt es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen die gegen f gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, d.h.

$$P_n \rightrightarrows f \text{ auf } [a, b] \text{ für } n \rightarrow \infty$$

oder, äquivalent,

$$\sup_{[a,b]} |P_n - f| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die Aufgabe ist hier einige Beweise von diesem Satz und Anwendungen darzustellen. Es gibt die folgenden Beweise:

- mit Hilfe von *Bernstein-Polynomen*;
- mit Hilfe von dem *Gesetz der großen Zahlen* (Wahrscheinlichkeitstheorie);
- mit Hilfe von *Taylorreihe* für $(1+x)^{1/2}$;
- und viele andere.

3. Satz von Stone-Weierstraß und Anwendungen

Literatur: [46], [47], [19]

Der Satz von Stone-Weierstraß ist eine Verallgemeinerung von dem Approximationssatz von Weierstraß. Sei K ein kompakter metrischer Raum. Die Menge $C(K)$ von allen stetigen Funktionen auf K ist nicht nur ein Vektorraum sondern auch eine *Algebra* da das Produkt zweier stetigen Funktionen wieder stetig ist. Sei U eine *Unteralgebra* von $C(K)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) U trennt die Punkte von K , d.h. für alle $x, y \in K$, $x \neq y$ gibt es eine Funktion $u \in U$ mit $u(x) \neq u(y)$.
- (2) U verschwindet in keinem Punkt, d.h. für jedes $x \in K$ gibt es eine Funktion $u \in U$ mit $u(x) \neq 0$.

Der Satz von Stone-Weierstraß besagt, dass unter diesen Voraussetzungen die Unter-*algebra* U dicht in $C(K)$ bezüglich der sup-Norm liegt. D.h. für jede Funktion $f \in C(K)$ gibt es eine Folge $\{u_n\}$ von Funktionen aus U mit

$$u_n \rightrightarrows f \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

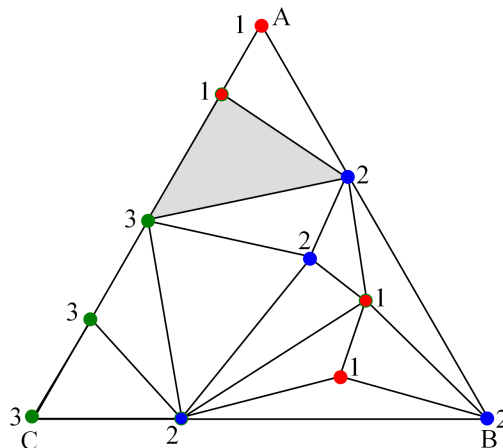
Der Approximationssatz von Weierstraß folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß wenn $K = [a, b]$ und U die Menge von allen Polynomen ist.

Die Aufgabe ist den Satz von Stone-Weierstraß mit Beweis und Anwendungen darzustellen.

4. Das Spernersche Lemma und Anwendungen (Fixpunktsatz von Brouwer, Lebesgue'sche Überdeckungsdimension)

Literatur: [19, Ch.11], [22]

Sei T eine Triangulierung eines Dreiecks ABC , z.B. wie auf dem Bild:



Eine Spernersche Färbung

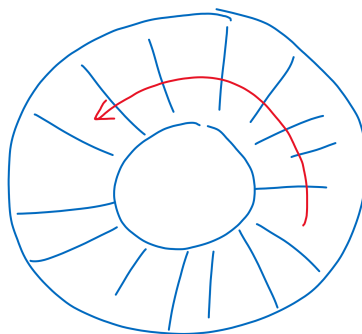
Nehmen wir an, dass alle Knoten von T in einer der drei Farben 1, 2, 3 nach den folgenden Regeln gefärbt sind:

- (1) Die Ecken A, B, C haben jeweils die Farben 1, 2, 3
- (2) Alle Knoten auf der Seite AB haben die Farben 1 oder 2, auf der Seite AC – 1 oder 3, auf der Seite BC – 2 oder 3.
- (3) Die Knoten im Inneren des Dreiecks haben beliebige Farben.

Solche Färbung heißt die *Spernersche Färbung*. Das Lemma von Sperner besagt folgendes: unter der obigen Voraussetzungen gibt es mindestens ein Dreieck von T , deren Eckpunkte alle unterschiedlich gefärbt sind (wie das schraffierte Dreieck auf dem Bild). Darüber hinaus ist die Anzahl von solchen Dreiecken immer ungerade.

Es gibt auch die höherdimensionale Verallgemeinerung des Lemmas wo man von einer Triangulierung eines Simplex spricht.

Eine von wichtigsten Anwendungen von dem Lemma von Sperner ist der *Fixpunktsatz von Brouwer*, der besagt, dass eine stetige Selbstabbildung einer abgeschlossenen Kugel K in \mathbb{R}^n immer einen Fixpunkt besitzt. Gleiches gilt für jede kompakte konvexe Teilmenge K von \mathbb{R}^n . Für nicht-konvexe Mengen gilt den Fixpunktsatz nicht: zum Beispiel, in einem Kreisring gibt es eine Selbstabbildung ohne Fixpunkt: eine Rotation.



Eine Rotation des Kreisringes hat keinen Fixpunkt

Die Aufgabe ist einen Beweis von dem Spernerschen Lemma darzustellen als auch einige Anwendungen, z.B.

- Fixpunktsatz von Brouwer;
- Lebesgue'sche Überdeckungsdimension.

Man darf alle Aussagen und Beweise in Dimension 2 darstellen (d.h. in \mathbb{R}^2).

5. Fixpunktsatz von Schauder und Anwendungen

Literatur: [25], [19, Ch.11].

Für eine Selbstabbildung $f : X \rightarrow X$ einer Menge X definiert man einen *Fixpunkt* als einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Aus Analysis I-II kennt man den Fixpunktsatz von Banach: eine Kontraktionsabbildung in einem vollständigen metrischen Raum hat immer einen Fixpunkt. In Thema 4 wurde der Fixpunktsatz von Brouwer erwähnt.

Der *Fixpunktsatz von Schauder* ist eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Brouwer für ∞ -dimensionale Räume. Sei V ein topologischer Vektorraum (möglicherweise ∞ -dimensional). Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge von V . Dann hat jede stetige Selbstabbildung von K einen Fixpunkt.

Man bemerke, dass eine abgeschlossene Kugel in ∞ -dimensionalen Räumen nicht kompakt ist, obwohl konvex, und der Fixpunktsatz in dieser Situation nicht gilt. Zum Beispiel, für die Einheitskugel $K = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ im ∞ -dimensionalen Hilbertraum H gibt es eine stetige Selbstabbildung ohne Fixpunkt. In der Tat, sei $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ eine orthonormale Basis in H . Definieren wir eine stetige lineare Abbildung $A : H \rightarrow H$ mit $Ae_k = e_{k+1}$ und setzen

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|}{2}e_1 + Ax.$$

Dann ist $f|_K$ eine stetige Selbstabbildung der Kugel K ohne Fixpunkt.

Der Fixpunktsatz von Schauder hat eine Menge von Anwendungen in Analysis. Eine Modifizierung davon heißt *Fixpunktsatz von Leray-Schauder*, die in der Theorie von Differentialgleichungen verwendet wird.

Die Aufgabe ist den Fixpunktsatz von Schauder mit Beweis darzustellen und Anwendungen zu erwähnen.

6. Hyperkomplexe Zahlen: Quaternionen und Oktonionen

Literatur: [13], [35]

Die komplexen Zahlen lassen sich als Vektoren/Punkte in \mathbb{R}^2 betrachten. Die Addition von komplexen Zahlen stimmt mit Addition im Vektorraum \mathbb{R}^2 , aber die Multiplikation von komplexen Zahlen ist ganz besonders: für Vektoren (a, b) und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert man ihres Produkt als komplexen Zahlen wie folgt:

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Die Multiplikation ist kommutativ, assoziativ, und besitzt die Einheit $(1, 0)$. Aber die Haupteigenschaft von dieser Multiplikation ist dass sie eine inverse Operation besitzt, die eine Division heißt. D.h für komplexe Zahlen z und w mit $w \neq 0$ gilt es eine Zahl $\frac{z}{w}$ so dass

$$w \frac{z}{w} = z.$$

Die Menge \mathbb{R}^2 mit dieser Multiplikation bezeichnet man mit \mathbb{C} .

Man fragt ob eine solche Multiplikation in \mathbb{R}^n mit $n > 2$ möglich ist. Die Antwort ist wie folgt.

- (1) Es gibt eine Multiplikation mit Division in \mathbb{R}^4 , und diese Multiplikation ist assoziativ aber nicht kommutativ. Die Menge \mathbb{R}^4 mit dieser Multiplikation bezeichnet man mit \mathbb{Q} , und die Elemente von \mathbb{Q} heißen *Quaternionen* (manchmal benutzt man für \mathbb{Q} die Notation \mathbb{H} , für *Hamilton-Zahlen*).
- (2) Es gibt eine Multiplikation mit Division in \mathbb{R}^8 , und diese Multiplikation ist weder assoziativ noch kommutativ. Die Menge \mathbb{R}^8 mit dieser Multiplikation bezeichnet man mit \mathbb{O} , und die Elemente von \mathbb{O} heißen *Oktonionen*.
- (3) In \mathbb{R}^n mit $n \notin \{1, 2, 4, 8\}$ gibt es keine Multiplikation mit Division.

Jede Quaternion $z \in \mathbb{Q}$ lassen Sie sich wie folgt darstellen:

$$z = a + bi + cj + dk$$

wobei $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ und $k = (0, 0, 0, 1)$ die imaginären Einheiten sind. Es gibt die folgenden Regeln von Multiplikation:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned}$$

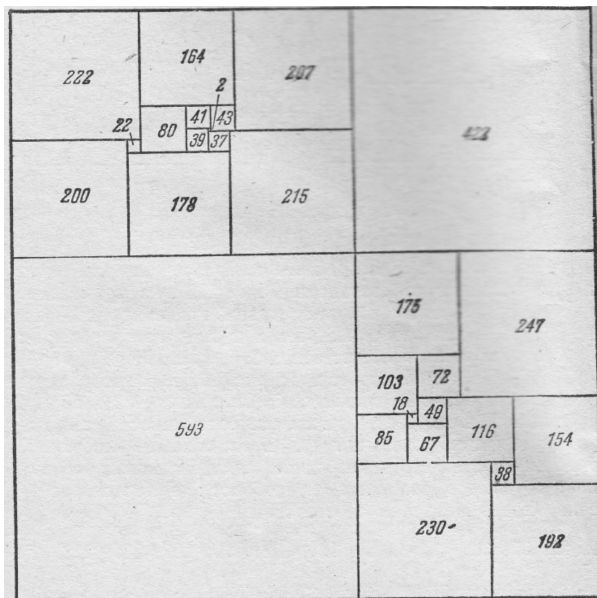
Die Teilen $a + bi$ von Quaternionen sind nicht anderes als komplexe Zahlen.

Die Aufgabe ist die Konstruktion von \mathbb{Q} und \mathbb{O} darzustellen, insbesondere mit Beweis von Existenz von Division, als auch eine Anwendung anzugeben. Z.B. die Quaternionen haben eine schöne Anwendung zur Beschreibung von Rotationen in \mathbb{R}^3 : jede Rotation in \mathbb{R}^3 entspricht zur imaginären Quaternion $bi + cj + dk$.

7. Zerlegung von Rechtecken in verschiedene Quadrate

Literatur: [49], [10], [16]

Es ist sehr einfach ein Rechteck R mit ganzzahligen Seiten in kleinere Quadrate $\{K_i\}$ zu zerlegen, aber es ist hoch nichttrivial wenn alle K_i verschiedene Größe haben sollen. Da ist eine Zerlegung von einem Quadrat in 28 verschiedene Quadrate:



Der Hauptsatz von dieser Theorie besagt folgendes: ein Rechteck R lässt sich in verschiedene Quadrate genau dann zerlegen wenn die Seiten von R kommensurabel sind. Es gibt interessante Beziehungen von dieser Theorie mit den Fibonacci- Zahlen als auch zu Kirchhoffschen Regeln für elektrische Netzwerke.

Die Aufgabe ist den Hauptsatz darzustellen, Beispiele von Zerlegungen zu zeigen, und einige Anwendungen anzugeben.

8. Fibonacci-Zahlen und verschiedene Anwendungen

Literatur: [6], [44], [56], [57].

Definieren wir eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ per Induktion wie folgt: $u_1 = u_2 = 1$ und

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Die Elemente der Folge $\{u_n\}$ heißen Fibonacci-Zahlen. Diese sind 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 usw. Die Fibonacci-Folge $\{u_n\}$ hat eine Menge von interessanten Eigenschaften, z.B. wie folgt.

- (1) Für jedes $n \geq 1$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Es folgt, dass

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \Phi^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

wobei $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- (2) Für jedes $x \in (-\Phi^{-1}, \Phi^{-1})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

- (3) Es gilt die Identität

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

- (4) Für jede natürliche Zahl a gibt es eine eindeutige Folge $\{\alpha_n\}_{n \geq 2}$ von Zahlen 0 und 1 so dass

$$a = \sum_{n \geq 2} \alpha_n u_n.$$

Darüber hinaus gilt $\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$ für alle $n \geq 1$. Zum Beispiel, $19 = 13 + 5 + 1 = u_2 + u_5 + u_7$ so that die Folge $\{\alpha_n\}$ ist $\{1, 0, 0, 1, 0, 1\}$.

- (5) Bezeichnen wir mit (a, b) den größten gemeinsamen Teiler von ganzen Zahlen a und b . Dann gilt die Identität

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)}.$$

- (6) Alle ungerade Teiler von u_{2n+1} haben die Form $4l + 1$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

- (7) Sei p eine Primzahl. Hat p der Form $5l \pm 1$ für $l \in \mathbb{N}$ so ist u_{p-1} durch p teilbar.

Hat p der Form $5l \pm 2$ so ist u_{p+1} durch p teilbar.

- (8) Es gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

wobei der Kettenbruch genau $n - 1$ Zeichen $+$ hat.

Die Fibonacci-Zahlen haben auch Anwendungen in Geometrie und in Suchtheorie. Die Aufgabe ist hier die verschiedenen Eigenschaften von Fibonacci-Zahlen und einige Anwendungen darzustellen.

9. Differenzgleichungen (Rekursionsgleichungen)

Literatur: [5], [8], [15], [42]

Eine lineare Rekursionsgleichung ist eine Gleichung für unbekannte Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Form

$$u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m} = b_n \quad (1)$$

die für alle $n > m$ erfüllt werden soll. Hier m ist eine gegebene natürliche Zahl, die die Ordnung der Gleichung heißt, $\{a_k\}_{k=1}^m$ und $\{b_n\}_{n>m}$ sind die gegebenen Folgen von reellen oder komplexen Zahlen, und die Folge $\{u_n\}$ ist zu bestimmen. Zum Beispiel, die Fibonacci-Folge erfüllt die Gleichung der Ordnung 2

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0.$$

Die homogene Gleichung

$$u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m} = 0 \quad (2)$$

lässt sich wie folgt lösen. Betrachten wir zuerst das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m.$$

Jede Nullstelle λ von P bestimmt eine Lösung von (2) wie folgt: $u_n = \lambda^n$. Gibt es m verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von P so erhalten wir die folgenden Lösungen von (2)

$$u_n = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_m \lambda_m^n \quad (3)$$

wobei C_1, \dots, C_m beliebige komplexe Koeffizienten sind. Man zeigt, dass in diesem Fall alle komplexe Lösungen von (2) in der Form (3) darstellbar sind. Wenn alle λ_k reell sind, so mit reellen Koeffizienten C_k erhalten wir alle reelle Lösungen von (2). Für allgemeine komplexe Nullstellen λ_k gibt es eine Methode wie man alle reelle Lösungen erhält.

Im Fall wenn die Anzahl von verschiedenen Nullstellen von P weniger als m ist (d.h. wenn die Nullstellen die Vielfachheit > 1 haben) gibt es eine kompliziertere Darstellung von allgemeiner Lösung von (2).

Es gibt eine Methode wie man die Gleichung (1) löst im Fall wenn $b_n = Q(n)$ wobei Q ein Quasipolynom ist.

Die Aufgabe ist die Lösungsmethoden von (1) und (2) mit Beispielen darzustellen.

10. Isoperimetrische Ungleichungen

Literatur: [11], [54]

Sei Ω eine beschränkte offene Menge in \mathbb{R}^2 . Angenommen, dass der Rand $\partial\Omega$ eine glatte Kurve ist, bezeichnen wir mit L die Länge von dieser Kurve und mit F den Flächeninhalt von Ω . Es ist bekannt, dass immer

$$L^2 \geq 4\pi F. \quad (4)$$

Zum Beispiel, ist Ω eine Kreisscheibe von Radius R , dann gelten $L = 2\pi R$, $F = \pi R^2$ und somit $L^2 = 4\pi F$, d.h. der Fall von Gleichheit in (4). In anderen Worten, die Kreisscheibe hat die kleinste Länge des Randes unter allen Gebieten mit dem gleichen Flächeninhalt.

Die ähnlichen Ungleichungen gelten in \mathbb{R}^n . Zum Beispiel, sei Ω eine beschränkte offene Menge in \mathbb{R}^3 mit Volumen V . Ist der Rand $\partial\Omega$ eine glatte Fläche mit dem Flächeninhalt F so gilt die Ungleichung

$$F^{3/2} \geq 6\sqrt{\pi}V, \quad (5)$$

wobei die Gleichung für eine Kugel gilt.

Die Aufgabe ist den Beweis von der isoperimetrischen Ungleichung (4) (und möglicherweise auch von (5)) darzustellen.

11. Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension

Literatur: [20], [41].

Hausdorff-Maß wird auf einem metrischen (M, d) Raum definiert. Für jede Menge $A \subset M$ and für positiven Zahlen α, δ setzen wir

$$H_{\alpha, \delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_k)^\alpha : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \supset A \text{ und } \text{diam} B_k < \delta \right\}$$

wobei $\text{diam}(B)$ der Durchmesser von B ist. Jetzt definieren wir das *äußere Hausdorff-Maß von Dimension α* mit

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha, \delta}(A).$$

Man beweist, dass H_α ein Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{B}(M)$ von von Borel-Teilmengen von M ist.

Man kann auch beweisen, dass H_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit dem Lebesgue-Maß der Dimension n bis zur multiplikativen Konstante übereinstimmt.

Die Werte $H_\alpha(A)$ liegen immer in $[0, \infty]$ und, für eine fixierte A , sind monoton fallend in α . Man definiert die *Hausdorff-Dimension* $\dim_H(A)$ von A mit

$$\dim_H(A) := \inf \{ \alpha : H_\alpha(A) = 0 \} = \sup \{ \alpha : H_\alpha(A) = \infty \}.$$

Zum Beispiel, für nicht-leere offene Menge A in \mathbb{R}^n gilt

$$\dim_H(A) = n.$$

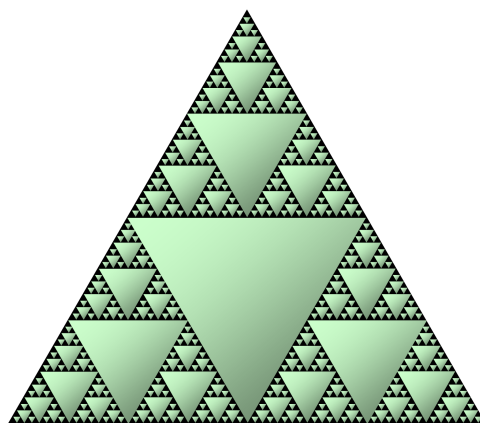
Für die Cantor-Menge

$$C = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \setminus \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \setminus \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \setminus \dots$$

gilt

$$\dim(C) = \log_3 2 = 0,63093\dots$$

Es gibt auch höherdimensionale Analoga von Cantor-Menge die als *Fraktale* bezeichnet werden, zum Beispiel, wie auf dem Bild



Sierpinski-Dreieck

Die Aufgabe ist die Theorie von Hausdorff-Maß und -Dimension darzustellen und zwar mit Anwendungen zu den Fraktalen.

12. Satz von Baire (bairescher Kategoriensatz) und Anwendungen

Literatur: [45], [48], [50], [58].

Der Satz von Baire heißt auch bairescher Kategoriensatz. Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt *mager*, falls M gleich eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ ist, wobei jede Menge M_n nirgends dicht in X ist (d.h. der Abschluss \overline{M}_n keine nicht-leere offene Menge enthält).

Der Satz von Baire besagt folgendes. Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Ist M eine magere Teilmenge von X so liegt das Komplement $X \setminus M$ dicht in X , insbesondere ist $X \setminus M$ nicht leer.

Der Satz von Baire wird benutzt um die Existenz von Objekten mit bestimmten Eigenschaften zu beweisen. Eine von schönsten Anwendungen ist die folgende Aussage: die Menge von allen stetigen auf $[a, b]$ Funktionen die nirgends differenzierbar sind, liegt dicht in $C[a, b]$.

Man kennt stetige Funktionen die in einige Punkte nicht differenzierbar sind, z.B. $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Aber es ist sehr schwierig eine Funktion $f \in C[a, b]$ vorzustellen, die in *keinem* Punkt differenzierbar ist. Erste Beispiele von solchen Funktionen wurden von Weierstraß entdeckt. Zum Beispiel, die folgende Funktion ist stetig aber nirgends differenzierbar:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(13^n \pi x).$$

Der Satz von Baire lässt uns die Existenz von solchen Funktionen viel einfacher zu beweisen.

Weitere Anwendungen von dem Satz von Baire:

- (1) Existenz von Basis in Banachräumen;
- (2) Das Prinzip von gleichmäßiger Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus);
- (3) Satz von der inversen Abbildung: für jede stetige lineare bijektive Abbildung zwischen Banachräumen ist die inverse Abbildung auch stetig.

Die Aufgabe ist den Satz von Baire mit Beweis und Anwendungen darzustellen.

13. Nichtstandard-Analysis

Literatur: [19], [27], [36], [32].

Aus Analysis I kennt man die ε - δ Definition von Limes als auch den Begriff von stetiger Funktion: eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig an einer Stelle x falls

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Insbesondere gilt für kleine Werte von dem Argumentinkrement Δx

$$f(x + \Delta x) \approx f(x).$$

Ähnliche Beobachtung gilt auch für den Begriff von Ableitung: für ein Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

und für kleine Werte von Δx gilt

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (6)$$

Nichtstandardanalysis ist ein Bereich der Mathematik, wo man die Bedeutung von \approx präzise macht, aber nicht wie in Numerische Mathematik.

Man erweitern den Körper \mathbb{R} zum Körper ${}^*\mathbb{R}$ von hyperreellen Zahlen wo zu jeder reellen Zahl x eine "Wolke" zugeordnet ist die aus hyperreellen Zahlen der Form $x + \Delta x$ besteht, wobei Δx so genannte *infinitesimale* Zahl ist. Für die infinitesimale Zahl Δx gilt

$$q < \Delta x < p$$

für alle reelle Zahlen $q < 0 < p$. Für hyperreelle Zahlen x, y definiert man die Relation \approx mit

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y \text{ ist infinitesimal.}$$

Es gibt ein Verfahren indem man jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (und andere Objekte die von reellen Zahlen abhängig sind) als eine Funktion $f : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen kann. Dann bedeuten die Stetigkeit von f genau dass $f(x + \Delta x) \approx f(x)$ für alle infinitesimale Δx . Auch die Ableitung lässt sich rigoros mit Hilfe von (6) definieren.

Die Aufgabe ist die Theorie von Nichtstandardanalysis so weit wie möglich darzustellen und die üblichen Begriffe von Analysis I in der Sprache von Nichtstandardanalysis zu erklären. Ein großer Anteil von Nichtstandardanalysis besteht aus Mathematischer Logik – man sollte nicht zu tief in Details dieses Teils gehen.

14. Fraktionale Infinitesimalrechnung (fraktionale Ableitungen und Integration) und Anwendungen

Literatur: [28], [43]

Es geht um dem Begriff von der Ableitung $D^\alpha f$ wobei α eine reelle Zahl die nicht unbedingt natürlich ist, z.B. was ist $D^{1/2}f$? Im Fall $\alpha \in (0, 1)$ eine von möglichen Definitionen ist wie folgt:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist, und wenn $\alpha \in (n-1, n)$ dann

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

Eine wichtige Eigenschaft von fraktionalen Ableitung ist die Identität

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}. \tag{7}$$

Es gibt auch den Begriff von fraktionalen Integration:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

auch mit Eigenschaft

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}. \tag{8}$$

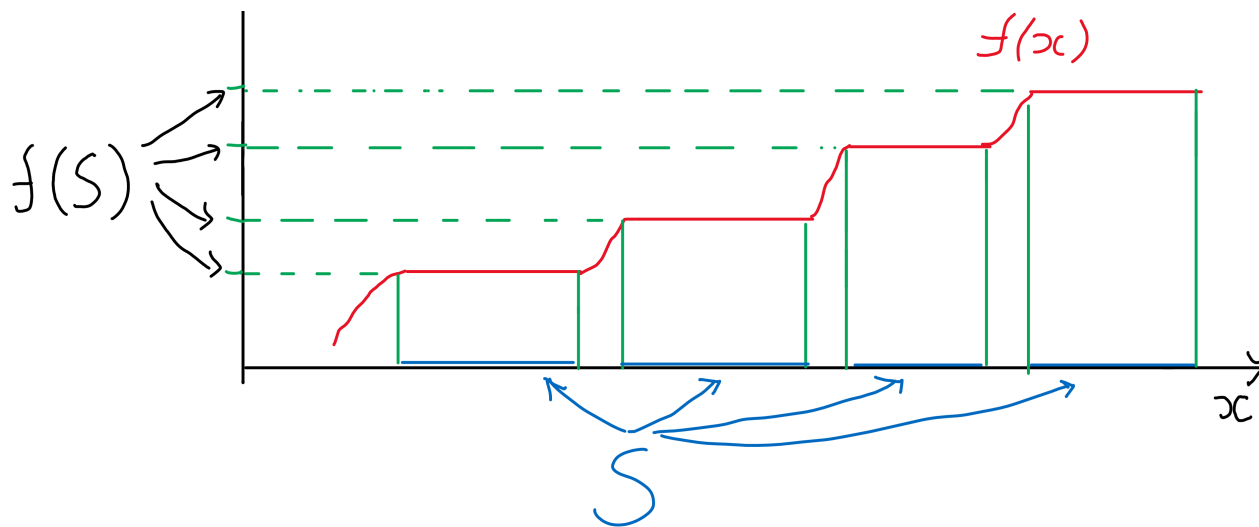
Die Aufgabe ist verschiedene Definitionen von fraktionalen Ableitungen und Integralen darzustellen und die Identitäten (7), (8) zu beweisen.

15. Satz von Sard

Literatur: [9], [26], [30, Kap.3, Satz 1.3]

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *kritisch* für f falls $f'(x) = 0$, d.h. alle partielle Ableitungen $\partial f / \partial x_k$ verschwinden an der Stelle x . Bezeichnen wir mit S die Menge von allen kritischen Punkten von f .

Satz von Sard besagt, dass die Bildmenge $f(S)$ eine Nullmenge in \mathbb{R} ist, d.h. das Lebesgue-Maß von $f(S)$ gleich 0 ist. Die kritische Menge S kann beliebig gross sein, zum Beispiel, für $f = \text{const}$ gilt $S = \mathbb{R}^n$, aber das Bild $f(S)$ ist immer eine "kleine" Menge (im Fall $f = \text{const}$ besteht $f(S)$ aus einem Punkt). Der Grund dafür ist, dass f' auf S verschwindet so dass die Bildmenge $f(S)$ ist gezwungen "klein" zu sein.



Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Menge $f(S)$ von vier Punkten

Betrachten wir jetzt eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *kritisch* für f falls $\text{rang } f'(x) < k$ wobei f' die Jacobi Matrix ist und rang den Rang einer Matrix bezeichnet.

Satz von Sard lautet in diesem Fall ähnlich: die Bildmenge $f(S)$ der Menge S von kritischen Punkten von f ist eine Nullmenge in \mathbb{R}^k .

Eine von wichtigsten Anwendungen des Satzes von Sard ist wie folgt. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und betrachten wir für alle $t \in \mathbb{R}$ die Niveaumengen

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}.$$

Dann ist M_t für fast alle $t \in \mathbb{R}$ eine glatte Hyperfläche ([30, Kap.1, Satz 3.2]). Es gibt auch einen Beweis von dem Fixpunktsatz von Brouwer mit Hilfe von dem Satz von Sard ([30, Kap.3, Satz 1.4]).

Die Aufgabe ist den Satz von Sard mit Beweis und Anwendungen darzustellen.

16. Orthogonale Polynome (Chebyshev-, Legendre-, Hermite-, Laguerre-Polynome)

Literatur: [1, Kapitel 22], [12], [33], [53]

Gegeben sei eine positive stetige Funktion $\rho(x)$ auf einem Intervall (a, b) die auf (a, b) integrierbar ist, betrachten wir den Hilbertraum

$$L_\rho^2 := L^2((a, b), \rho dx)$$

mit dem Maß ρdx . Das Skalarprodukt in diesem Hilbertraum ist wie folgt gegeben:

$$(f, g)_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

Die Funktion ρ heißt die Dichtefunktion. Alle Monome

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

liegen in L_ρ^2 , und mit Hilfe von Gram-Schmidt Verfahren erhält man eine Folge von Polynomen

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \tag{9}$$

die orthogonal in L_ρ^2 sind und $\deg P_n = n$. Die Folge $\{P_n\}$ ist eindeutig bis zur multiplikativen Konstante definiert und liefert eine orthogonale Basis in L_ρ^2 .

Für Dichtefunktion $\rho \equiv 1$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ erhält man die *Legendre-Polynome*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

z.B.

$$L_0 = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \dots$$

Mit der Dichtefunktion

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

bekommt man die *Tschebyschow-Polynome*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

mit der Dichtefunktion

$$\rho(x) = e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

bekommt man die Hermite-Polynome

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

usw.

Die orthogonalen Polynome $\{P_n\}$ haben viele interessante Eigenschaften, insbesondere alle Nullstellen von P_n sind immer reell und einfach, und sie liegen immer zwischen den Nullstellen von P_{n+1} . Die orthogonalen Polynome lösen bestimmte Differentialgleichungen und erfüllen bestimmte Rekurrenzrelationen.

Die Aufgabe ist die Theorie von orthogonalen Polynomen mit Beispielen und Beweisen darzustellen.

17. Spezielle Funktionen (Beta- und Gamma-Funktionen, Bessel-Funktionen) und Anwendungen

Literatur: [1], [3], [4], [7]

Die Gamma-Funktion wird wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dieses Integral konvergiert für reelle $x > 0$ so dass $\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ definiert ist. Für $x = n \in \mathbb{N}$ zeigt man, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$. Somit lässt sich $\Gamma(x)$ als eine Verallgemeinerung der Fakultät betrachten.

Die Gamma-Funktion erfüllt verschiedene interessante Identitäten, z.B.

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{10}$$

$$\Gamma(x) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Z.B., es folgt aus (10) dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Die Beta-Funktion wird wie folgt definiert:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

für alle $x, y > 0$. Es gibt die folgende Beziehung zwischen Γ - und B -Funktionen:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x) \Gamma(y)}.$$

Die Bessel-Funktionen sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

auf $(0, \infty)$, wobei ν ein gegebener Parameter ist. Abhängig von Anfangsbedingungen der Lösung, man unterscheidet die Bessel-Funktionen erster Gattung J_ν und zweiter Gattung Y_ν . Es gelten die folgenden asymptotischen Formel für die großen Werten von x

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Die Aufgabe ist die Definitionen von diesen Funktionen and ihre Haupteigenschaften darzustellen.

18. Fourierreihen und Anwendungen zu Differentialgleichungen

Literatur: [33], [37], [38, Ch. VIII], [40], [51], [52], [60], [61]

Fourier-Reihe ist eine Funktionenreihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

wobei a_k and b_k reelle Koeffizienten sind und $x \in \mathbb{R}$. Es wurde in der Vorlesung bewiesen dass die Folge

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (11)$$

eine Orthogonalbasis in $L^2[0, 2\pi]$ ist. Somit gilt für jede Funktion $f \in L^2[0, 2\pi]$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (12)$$

wobei die Reihe in L^2 -Norm konvergiert und

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x) \sin nx \, dx.$$

Man kann fragen ob die Folge (12) auch punktweise konvergiert so dass sie für numerische Berechnung der Werte von $f(x)$ geeignet ist. Es gibt viele Ergebnisse in diese Richtung.

Die Aufgabe ist die Theorie von *punktweiser* Konvergenz der Fourier-Reihe (12) mit Beweisen und Beispielen darzustellen.

Zum Beispiel, folgendes ist bekannt. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist hier immer 2π -periodisch.

- (1) Ist f stetig differenzierbar so gilt in (12) die gleichmäßige Konvergenz.
- (2) Sei f lokal integrierbar. Angenommen, dass f rechtsseitig und linksseitig an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so konvergiert the Fourier-Reihe von f an x gegen $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$. Wenn zusätzlich f an x stetig ist, so konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$.
- (3) Sei f stetig. Die Reihe (12) muß nicht gegen $f(x)$ punktweise konvergieren, aber die Folge von Cesàro-Mittel von (12) immer gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert (Satz von Fejér).
- (4) Die Fourier-Reihe (12) heißt *absolut konvergent* falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

In diesem Fall konvergiert die Fourier-Reihen gleichmäßig gegen f nach dem M -Test von Weierstraß. Sind die Fourier-Reihen von f and g absolut konvergent, so sind die Fourier-Reihen von fg und f/g auch absolut konvergent (Satz von Wiener¹).

Es gibt auch mehrere Ergebnisse über die Konvergenz fast überall.

¹Es gibt einen Beweis von dem Satz von Wiener mit Hilfe von Banachalgebren aus dem nächsten Abschnitt

19. Distributionen und Differentialrechnung von Distributionen

Literatur: [24], [31], [34], [38, Ch. IV], [40], [47], [55].

Der Begriff von *Distribution* ist eine weitere Entwicklung der Idee von schwachen Ableitungen.

Eine *Distribution* in \mathbb{R}^n (auch genannt *verallgemeinerte Funktion*) ist ein lineares stetiges Funktional auf dem topologischen Vektorraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ als Menge ist identisch zum Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ von allen ∞ -fach differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern. Man definiert eine besondere Topologie in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so dass die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so aussieht: eine Folge $\{\varphi_k\}$ von Funktionen aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es gibt eine beschränkte Menge K so dass alle Träger $\text{supp } \varphi_k$ in K liegen;
- (2) Für jedes Multiindex α gilt $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ für $k \rightarrow \infty$ (wobei \rightrightarrows die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet).

Man bezeichnet die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. Der Dualraum von dem Raum $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wird mit \mathcal{D}' bezeichnet. Somit sind Distributionen die Elemente von \mathcal{D}' .

Für $u \in \mathcal{D}'$ und $\varphi \in \mathcal{D}$ wird der Wert $u(\varphi)$ auch mit (u, φ) bezeichnet.

Jede Funktion $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ bestimmt eine Distribution (auch mit f bezeichnet) wie folgt:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Solche Distributionen heißt regulär. Aber es gibt *singuläre* Distributionen die von keiner Funktion bestimmt werden, zum Beispiel die δ -Funktion von Dirac:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Darüber hinaus bestimmt jedes signiertes Radon Maß σ eine Distribution mit

$$(\sigma, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\sigma.$$

Eine von Vorteilen von Distributionen ist dass jede Distribution $u \in \mathcal{D}'$ immer alle Ableitung $D^\alpha u$ in \mathcal{D}' hat! In der Tat, definiert man die *Distributionsableitung* $D^\alpha u$ für jedes Multiindex α mit

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}$$

und bemerkt, dass die rechte Seite wirklich ein stetiges lineares Funktional von $\varphi \in \mathcal{D}$ ist.

Somit auch alle Funktionen $f \in L_{loc}^1$ und alle signierte Radon Maße haben immer alle Distributionsableitungen. Zum Beispiel, für die Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

gilt $\theta' = \delta$. Für jede monoton steigende Funktion f auf \mathbb{R} ist die Distributionsableitung f' immer ein Maß.

Für Funktionen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ stimmen alle klassische Ableitungen $D^\alpha f$ der Ordnung $|\alpha| \leq m$ mit den Distributionsableitungen $D^\alpha f$ überein.

Man definiert den Träger $\text{supp } u$ von $u \in \mathcal{D}'$ wie folgt: $\text{supp } u$ ist das Komplement der größten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ gibt es den Begriff von *Faltung* (auch genannt Konvolution): das ist die Funktion

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \psi(y) dy,$$

die auch in \mathcal{D} liegt. Mit Hilfe von Dualität erweitert man die Faltung auf Distributionen: die Faltung $u * v$ ist für beliebige Distributionen u und v als eine Distribution definiert wird, vorausgesetzt, dass eine von u, v einen kompakten Träger hat. Es gilt die Identität

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v). \quad (13)$$

Die Faltung wird benutzt um lineare Differentialgleichungen wie folgt zu lösen. Betrachten wir einen linearen Differentialoperator der Ordnung m

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

wobei a_α Konstanten sind, und die Differentialgleichung

$$Lu = f \quad (14)$$

wobei f eine gegebene Funktion bzw Distribution ist und u unbekannt ist. Nehmen wir an, dass eine Lösung von

$$Lv = \delta$$

bekannt ist, wobei δ die δ -Funktion von Dirac ist. Die Lösung v heißt die *Fundamentallösung* des Operators L . In diesem Fall erhält man eine Lösung von (14) mit

$$u = v * f,$$

für jede Distribution f mit einem kompakten Träger, was aus (13) folgt.

Die Aufgabe ist die Theorie von Distributionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen darzustellen.

20. Fréchet und Gâteaux Ableitungen: Rechenregel und Anwendungen in Variationsrechnung.

Literatur: [17], [14], [23], [38, Ch. X]

Die Begriffe von Fréchet und Gâteaux Ableitungen verallgemeinern die Begriffe der totalen bzw partiellen Ableitung in \mathbb{R}^n . Seien V und U zwei normierte Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \rightarrow U$ ist an einer Stelle $x \in V$ Fréchet-differenzierbar wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $A : V \rightarrow U$ gibt mit

$$F(x+h) - F(x) = Ah + o(h) \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

wobei $o(h)$ eine U -wertige Funktion von $h \in V$ mit

$$\frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

bezeichnet. Die Abbildung A heißt die Fréchet-Ableitung von F in x und wird mit $F'(x)$ bezeichnet.

Im Fall von $U = \mathbb{R}^m$ und $V = \mathbb{R}^n$ stimmt $F'(x)$ mit der Jacobi-Matrix von F in x .

Die Abbildung $F : V \rightarrow U$ heißt Gâteaux-differenzierbar in die Richtung $v \in V$ wenn der folgende Grenzwert existiert

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t}.$$

Der Grenzwert $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ heißt die Gâteaux-Ableitung von F in die Richtung v in x .

Im Fall $V = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}$ und $v = e_k$ stimmt $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_k}$.

Man sagt, dass F in x Gâteaux-differenzierbar ist wenn $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ für alle $v \in V$ existiert. Ist F Fréchet-differenzierbar so ist F auch Gâteaux-differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) = F'(x)v.$$

Viele Rechenregeln und Eigenschaften der Ableitungen aus Analysis I und II gelten auch für die Fréchet und Gâteaux Ableitungen. Zum Beispiel, hat eine Funktion $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Maximum- oder Minimumstelle x , so gilt $F'(x) = 0$ bzw $\frac{\partial F}{\partial v}(x) = 0$, vorausgesetzt dass F in x entsprechend differenzierbar ist.

Als Beispiel betrachten wir im Raum $V = C^1[a, b]$ das Funktional

$$F(x) = \int_a^b \mathcal{L}(t, x(t), x'(t)) dt,$$

wobei $\mathcal{L}(t, x, y)$ eine stetige Funktion dreier Variablen und $x(t) \in C^1[a, b]$. Die Funktion \mathcal{L} heißt die Lagrange-Funktion von F .

Ist \mathcal{L} stetig differenzierbar, so zeigt man, dass $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux (und Fréchet) differenzierbar ist und für jedes $v \in C^1[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v}(x) &= \int_a^b (\partial_x \mathcal{L}(t, x, x') v(t) + \partial_y \mathcal{L}(t, x, x') v'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\partial_x \mathcal{L}(t, x, x') - \frac{d}{dt} \partial_y \mathcal{L}(t, x, x') \right) v(t) dt + [\mathcal{L}(t, x, x') v(t)]_a^b. \end{aligned} \quad (15)$$

Diese Identität kann benutzt werden um die Extremumstellen des Funktionals F zu bestimmen.

Betrachten wir das *Variationsproblem*: eine Funktion $x \in V$ mit den Randbedingungen

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

zu bestimmen die das Minimum bzw Maximum von F liefert. Dann muss $\frac{\partial F}{\partial v}$ gleich Null für alle v mit

$$v(a) = v(b) = 0$$

sein, was nach (15) ergibt

$$\int_a^b \left(\partial_x \mathcal{L}(t, x, x') - \frac{d}{dt} \partial_y \mathcal{L}(t, x, x') \right) v(t) dt = 0$$

und somit

$$\partial_x \mathcal{L}(t, x, x') - \frac{d}{dt} \partial_y \mathcal{L}(t, x, x') = 0. \quad (16)$$

Die Gleichung (16) heißt die Euler-Lagrange-Gleichung für das Variationsproblem. Das ist eine Differentialgleichung mit unbekannter Funktion $x(t)$. Das Lösen von (16) ergibt kritische Funktionen $x(t)$ wo das Funktional F die Extremumstellen haben kann.

Die Aufgabe ist die Theorie von Fréchet und Gâteaux Ableitungen mit Anwendungen zur Variationsrechnung, insbesondere zur Euler-Lagrange-Gleichung, darzustellen und Beispiele anzugeben.

21. Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [2], [18], [21], [29]

Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Elemente von \mathbb{R}^{n+1} werden mit (t, x) bezeichnet wobei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x' = f(t, x) \quad (17)$$

die man auch als Normalsystem bezeichnet. Hier $x(t)$ ist eine unbekannte Funktion und x' ist ihre Ableitung. Betrachten wir das Anfangswertproblem für (17):

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (18)$$

wobei (t_0, x_0) ein gegebener Punkt in Ω ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Die Funktion $x(t)$ heißt eine Lösung von (18) wenn x auf I differenzierbar ist, für alle $t \in I$ gilt

$$(t, x(t)) \in \Omega \quad \text{und} \quad x'(t) = f(t, x(t)),$$

und

$$t_0 \in I \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Satz von Picard-Lindelöf. Sei die Funktion $f(t, x)$ in Ω stetig und lokal Lipschitzstetig in x . Dann gilt folgendes.

(a) Das Anfangswertproblem (18) hat eine Lösung für jedes $(t_0, x_0) \in \Omega$.

(b) Sind $x(t)$ und $y(t)$ zwei Lösungen von (18), dann gilt $x(t) = y(t)$ im gemeinsamen Definitionsbereich von x und y .

Im Fall wenn $f(t, x)$ nur stetig ist, gilt die Aussage (a) auch nach dem Satz von Peano, aber die Aussage (b) kann in diesem Fall nicht gelten.

Sei jetzt die Funktion $f(t, x)$ linear in x , d.h.

$$f(t, x) = A(t)x + B(t),$$

wobei $A(t)$ eine $n \times n$ Matrix-wertige Funktion auf einem Intervall I ist, und $B(t)$ eine Vektor-wertige Funktion auf I mit Werten in \mathbb{R}^n .

Satz von Picard-Lindelöf für lineares System. Sind $A(t)$ und $B(t)$ stetig auf I , so hat das Anfangswertproblem (18) eine einzige Lösung $x(t)$ auf dem Intervall I .

Der Unterschied zwischen diesen zwei Sätzen ist dass im allgemeinen Fall die Lösung $x(t)$ in einer kleinen Umgebung von t_0 existiert, während im linearen Fall die Lösung auf dem ganzen Intervall I existiert.

Die Aufgabe ist die Beweise von den beiden Sätzen mit den Methoden der Funktionsanalyse zu präsentieren und die Folgerungen für die skalaren Differentialgleichungen höherer Ordnungen

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

zu geben. Beispiele und weitere Entwicklung der Theorie sind auch gewünscht (z.B. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung bezüglich Parameter).

*Literatur**

- [1] **Abramowitz M. Stegun I. A.**, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York, Dover, 1965.
- [2] **Amann H.**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter Lehrbücher, 1995.
- [3] **Andrews, George E.; Askey, Richard; Roy, Ranjan**, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, 1999.
- [4] **Attar, Refaat El**, *Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Lulu Press, Morrisville NC 27560, 2006.
- [5] **Batchelder, Paul M.**, *An introduction to linear difference equations*, Dover Publications, 1967.
- [6] **Becker M.**, Fibonacci-Zahlen,
<https://www.ijon.de/mathe/fibonacci/index.html>
- [7] **Bell W.W.**, *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. van Nostrand Comp.Ltd., 1968.
- [8] **Berg L.**, *Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen*, Darmstadt: Steinkopff, 1980.
- [9] **Bröcker Th.**, *Analysis II*, Spektrum Lehrbuch, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
- [10] **Brooks R.L., Smith C.A.B. et al**, The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, **7** (1940) 312-340.
- [11] **Chavel I.**, *Isoperimetric inequalities: differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics 145, Cambridge University Press, 2001.
- [12] **Chihara, Theodore Seio**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [13] **Conway, John Horton, Smith, Derek A.**, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, A. K. Peters, Ltd., 2003.
- [14] **Courant R., Hilbert D.**, *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, Interscience Publishers, 1953.
- [15] **Cull, Paul; Flahive, Mary; Robson, Robbie**, *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*, Springer, 2005.
- [16] **Dehn M.**, Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, *Math. Annalen*, **57** (1903) 314-332.
- [17] **Dieudonné J.**, *Foundations of modern analysis*, Boston, MA: Academic Press, 1969.
- [18] **Endl, K., Luh W.**, *Analysis III*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1974.
- [19] Evers
- [20] **Falconer K. J.**, *Fractal geometry*, John Wiley and Sons, 1990.
- [21] **Forster, O.**, *Analysis 2*, Vieweg Studium, 1984.
- [22] **Franz, Wolfgang**, *Topologie I*, 1960.
- [23] **Gelfand I.M., Fomin S. V.**, *Calculus of Variations*, USA: Dover, 2000.
- [24] **Gelfand, I.M., Shilov, G.E.**, *Generalized functions*, Academic Press, 1966.
- [25] **Gilbarg D., Trudinger N.**, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2001.
- [26] **Guillemin, V., Pollack A.**, *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [27] **Hermoso J.G.**, Nonstandard Analysis and the Hyperreals,
https://mathforum.org/dr.math/faq/analysis_hyperreals.html
- [28] **Herrmann R.**, *Fraktionale Infinitesimalrechnung. Eine Einführung für Physiker*, BoD, Norderstedt 2008,
- [29] **Heuser H.**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag, 2004.
- [30] **Hirsch M. W.**, *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [31] **Hörmander L.**, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer, 1983.
- [32] **Hurd A.E., Loeb P.A.**, *An introduction to Non-standard real Analysis*, Academic Press, 1985.
- [33] **Jackson, Dunham**, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, New York: Dover, 2004.
- [34] **Jones D.S.**, *The theory of generalized functions*, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [35] **Kantor I.L., Solodovnikov A.S.**, *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*, Springer, 1989.
- [36] **Keisler H.J.**, Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach,
<https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-509.pdf>
<https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-09-04-19.pdf>
- [37] **Kirillov A.A., Gvishiani A.D.**, *Theorems and problems in functional analysis*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [38] **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.**, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Dover Books on Mathematics, 1999.

- [39] **Kurosh A.**, *Higher Algebra*, 1984.
<https://www.math.uni-bielefeld.de/grigor/kurosh-higher-algebra.pdf>
- [40] **Lighthill M. J.**, *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 2003.
- [41] **Mandelbrot B.B.**, *Die fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser,
- [42] **Miller, Kenneth S.**, *Linear difference equations*, W.A. Benjamin, 1968.
- [43] **Oldham K. B., Spanier J.**, *The Fractional Calculus; Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in Science and Engineering V, Academic Press,
- [44] **Peters T.**, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt,
<https://www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf>
- [45] **Reed M., Simon B.**, *Methods of modern mathematical physics. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- [46] **Rudin W.**, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.
- [47] **Rudin W.**, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [48] **Schechter, Eric**, *Handbook of Analysis and its Foundations*, Academic Press,
- [49] **Sprag P.**, Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate, *J. für reine und angewandte Mathematik*, **182** (1940) 60-64.
- [50] **Steen L.A., Seebach J. A., Jr.**, *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag, New York, 1978,
- [51] **Stein E. M., Shakarchi R.**, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [52] **Stromberg, K. R.**, *Introduction to classical analysis*, Wadsworth International Group, 1981.
- [53] **Szegö G.**, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, 1939.
- [54] **Treibergs A.**, Inequalities that imply the isoperimetric inequality,
<https://www.math.utah.edu/treiberg/isoperim/isop.pdf>
- [55] **Vladimirov V. S.**, *Methods of the theory of generalized functions*, Analytical Methods and Special Functions 6, Taylor & Francis, London, 2002.
- [56] **Vorobiev Nicolai N.**, *Fibonacci numbers*, Birkhäuser, 2002.
- [57] **Werner B.**, Fibonacci-Zahlen, goldener Schnitt, Kettenbrüche und Anwendungen,
<https://www.math.uni-hamburg.de/home/werner/GruMiFiboSoSe06.pdf>
- [58] **Werner, Dirk**, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 2005.
- [59] **Wikipedia**,
<https://Wikipedia.org>
- [60] **Zorich V.A.**, *Analysis II*, Springer-Verlag,
- [61] **Zygmund, A.**, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 2002.