

# Das Typ–Problem

Anton Feldmann

Vortrag zum Seminar: **Analysis probability on graphs**

Dozent: Professor Dr. Alexander Grigor’yan

14.11.2007

Das Typ–Problem beschäftigt sich mit der Aussage, ob ein Weg (Definition 3) auf einem Graphen (Definition 1) entweder *rekurrent* oder *transient* ist.

Die hier erwähnten Graphen sind *verbunden* und unendlich groß in ihrer Ausdehnung, aber von *beschränktem Grad*, d.h. die Dimension des Graphen ist  $< \infty$ .

## 1 Einleitung

**Definition 1** (Graph:). Ein Graph ist ein Tupel  $\Gamma := (V, E)$  mit  $V$  der Menge der Ecken (vertices) und  $E$  der Menge der Kanten (edges).

Zudem besitzt jeder Graph eine Abbildung  $\Psi : E \rightarrow V^2$  die auf seiner Kantenmenge definiert ist.

Falls  $x \sim y$  mit  $x, y \in V$  Nachbarn. Wir nennen  $\sim$  die Verbindung zwischen  $x$  und  $y$ . Ein Graph heißt *verbunden*, wenn alle Knoten mit ihren Nachbarn verbunden sind.

**Definition 2** (gewichteter Graph). Ein Graph  $\Gamma$  heißt gewichtet oder bewertet, wenn alle Kanten aus  $E$  mit Werten versehen sind. Wir beschreiben das Gewicht mit  $\mu_{xy}$  wenn  $x, y \in V$  und  $x$  und  $y$  durch eine Kante verbunden ist. Die Bewertung eines Graphen wird durch eine quadratische Bewertungs-/Gewichtsmatrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $m = |V|$  beschrieben. Wir schreiben das Tripel  $(V, E, \Phi)$  oder das Tupel  $(\Gamma, \Phi)$  mit  $\Gamma$  Graph und  $\Phi$  die zugehörige Gewichtsmatrix.

*Bemerkung 1.* Die Dimension eines Graphs  $\mathbb{Z}^d$  ist gegeben durch die Dimension von  $\mathbb{Z}$ .

**Definition 3** (zufälliger Weg). Sei  $t$  ein Punkt, der sich zufällig über den Graph bewegt. Den Weg den dabei  $t$  beschreibt, wird in eine Matrix  $P_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\mu(x)}$  wobei  $\mu(x) = \sum_{\bar{x}y} \mu_{xy}$  vermerkt.  $P$  heißt *zufälliger Weg*.

*Beispiel 1.* Hat  $t$  auf jeder Ecke des Graphen  $\mathbb{Z}^d$  mit maximal  $2d$  Möglichkeiten eine Kante zum weiteren Verlauf des Wegs auf dem Netzwerk aus zu wählen. D.h., dass die Wahrscheinlichkeit sich für einen Weg zu entscheiden bei  $P_{xy} = \frac{1}{2d}$  mit  $x \sim y$ , mit  $d = \dim \mathbb{Z}^d$ .

**Definition 4** (rekurrent/transient). Sei  $p_{esc}$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt  $t$ , der den zufälligen Weg beschreibt, nicht zum Ursprung zurückkehrt. Ein zufälliger Weg heißt *rekurrent*, genau dann, wenn  $p_{esc} = 0$  ist und ein zufälliger Weg heißt *transient* falls  $p_{esc} > 0$ .

*Bemerkung 2.* Polya’s Theorem gibt eine Aussage über das Typen Problem.

**Polya’s Theorem**<sup>1</sup>: Ein zufälliger Weg auf einem  $\mathbb{Z}^d$  Graphen ist rekurrent für  $d = 1, 2$  und transient für  $d > 2$ .

Dieses Theorem wird in einem anderen Vortrag bewiesen.

---

<sup>1</sup>Nachzulesen in [Random06].

## 2 Das Typ– Problem

Sei  $(\Gamma, \Phi)$  ein unendlicher Graph mit zufälligen Weg  $\mathbf{P}$ . Sei  $O = (0, 0, \dots, 0)$  ein Referenzpunkt. Das Typ–Problem ist das Problem zu bestimmen, ob ein zufälliger Weg für ein gegebenen Graphen rekurrent oder transient ist.

**Behauptung 1.** *Die Antwort auf der Frage, ob ein Graph rekurrent oder transient ist nicht abhängig von der Wahl des Referenzpunktes.*

*Beweis.* Sei  $(\Gamma, \Phi)$  ein unendlicher Graph. Sei  $r \in \mathbb{R}$  der Abstand zur nächsten Nachbarn mit  $r = \max_i x_i \in \Gamma$  wobei  $x_i$  Menge der Nachbarn von  $x$ . Ferner sei  $\Gamma_r$  der Graph  $x$  mit seinen Nachbarn mit Abstand  $r$ . Sei  $P$  ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$ . Angenommen,  $P$  ist rekurrent, dann gilt  $p_{esc} = 0$ , d.h.  $r$  kann so gefunden werden, das  $P$  in  $\Gamma_r$  verläuft und  $P$  zum Referenzpunkt  $O$  zurückert.

Angenommen  $Q$  sein ein weiterer rekurrenter zufälliger Weg mit  $Q \neq P$ . Dann kann ein  $s \in \mathbb{R}$  gefunden werden, so dass  $Q$  in  $\Gamma_s$  verläuft. D.h., der Rekurrente zufällige Weg ist unabhängig von der Wahl des Referenzpunktes. Analog für den zufälligen Weg  $P$  transient. Dann existiert kein  $r \in \mathbb{R}$  mit den obigen Eigenschaften so, dass  $P \subset \Gamma_r$ .  $\square$

## 3 Vergleich zweier Graphen

**Definition 5.** Seien  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}$  zwei Gewichtsmatrizen von  $\Gamma$ , dann gilt  $(\Gamma, \tilde{\Phi}) < (\Gamma, \Phi)$  genau dann wenn  $\tilde{\Phi}_{xy} < \Phi_{xy} \forall x, y \in V$

Es möge  $(\Gamma, \tilde{\Phi}) < (\Gamma, \Phi)$  gelten.

*Bemerkung 3.* Dann gilt, ist ein zufälliger Weg auf  $(\Gamma, \Phi)$  transient, so ist dieser zufälliger Weg auf  $(\Gamma, \tilde{\Phi})$  transient. Ist ein zufälliger Weg auf  $(\Gamma, \Phi)$  rekurrent, so ist dieser zufälliger Weg auf  $(\Gamma, \tilde{\Phi})$  rekurrent.

**Satz 1.** *Seien  $(\Gamma, \Phi)$  und  $(\Gamma, \tilde{\Phi})$  zwei gewichtete Graphen und seien  $u, v \in \mathbb{R}$  konstant mit  $0 < u < v < \infty$ , so dass*

$$u\Phi_{xy} < \tilde{\Phi}_{xy} < v\Phi_{xy} \forall x, y.$$

*Dann ist der zufällige Weg auf  $(\Gamma, \tilde{\Phi})$  vom selben Typ wie der zufällige Weg auf  $(\Gamma, \Phi)$*

*Beweis.* Sei  $U_{xy} = u\Phi_{xy}$  und  $V_{xy} = v\Phi_{xy}$ . Dann folgt  $(\Gamma, U) < (\Gamma, \tilde{\Phi}) < (\Gamma, V)$ . Aber der zufällige Weg für  $(\Gamma, U)$  und  $(\Gamma, V)$  sind die gleichen Wege wie die zufälligen Wege auf  $(\Gamma, \Phi)$ . Dann ist nach der Bemerkung 3 der Typ des zufälligen Wegs auf  $(\Gamma, \tilde{\Phi})$  vom selben Typ wie der Typ des zufälligen Wegs auf  $(\Gamma, \Phi)$ .  $\square$

**Hilfssatz 1.** *Sei  $(\Gamma, \Phi)$  ein Graph. Sei  $0 < u < \Phi_{xy} < v < \infty \forall xy \in E$  aus  $\Gamma$  und Konstanten  $u, v \in \mathbb{R}$ . Dann ist der zufällige Weg auf  $(\Gamma, \Phi)$  vom gleichen Typ wie der zufällige Weg auf  $\Gamma$ .*

*Beweis.* Folgt aus Satz1.  $\square$

## 4 Der k–fuzz eines Graphen

**Definition 6.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Der k–fuzz eines Graphen  $\Gamma$  ist der Graph  $\Gamma_k$  aus  $\Gamma$ , wenn es durch hinzuziehen einer Kante  $xy$  möglich ist, in  $k$  Schritten von  $x$  nach  $y$  zu gehen.

*Beispiel 2.* Der 2–fuzz eines Graphen  $\mathbb{Z}^d$  wird gezeigt in der Abbildung 1. Ein 2–fuzz ist z.B. die Kante  $(0, 0)$  zu  $(2, 0)$ .

**Satz 2.** *Ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$  und ein zufälliger Weg auf dem k–fuzz  $\Gamma_k$  von  $\Gamma$  haben den gleichen Typ.*

*Beweis.* Sei  $P$  ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$ . Definiere  $\tilde{P} = (P + P^2 + \dots + P^k)/k$ . Betrachte  $\tilde{P}$  als  $P$ , wobei  $\tilde{P}$  betrachtet die ersten  $k$  zufälligen Schritte, dann die nächsten  $k$  zufälligen Schritte, u.s.w.. Dann folgt,  $P$  ist  $O$  genau dann, wenn  $\tilde{P}$  in  $O$  ist. Daraus folgt:  $\tilde{P}$  ist rekurrent, g.d.w.  $P$  rekurrent ist.

Nehmen wir nun an, dass  $P$  transient ist. Wähle eine endliche Menge  $S$  aus  $\Gamma$ , so dass

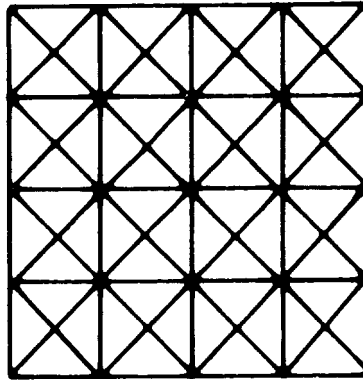


Abbildung 1: Gitter

$O$  nicht von einem Punkt ausserhalb von  $S$  in  $k$ -Schritten erreicht werden kann. Wenn nun  $\tilde{P}$ , ab einem Zeitpunkt  $z$ , ausserhalb von  $S$  ist, kann  $P$  nicht  $O$  zum gleichen Zeitpunkt sein und  $P$  ist somit transient.

Also sind  $P$  und  $\tilde{P}$  vom gleichen Typ.

Abschließend ist zu zeigen, dass  $\tilde{P}$  den gleichen Type wie ein zufälliger Weg auf  $\Gamma_k$  hat. Da  $P$  umkehrbar:  $wP = w$  mit  $w_x$  ist die Anzahl der Kanten die aus dem Knoten  $x$  heraus kommen. Aus der Konstruktion von  $\tilde{P}$  folgt, dass  $\tilde{P}$  umkehrbar ist und  $w\tilde{P} = w$ .  $\tilde{P}$  ist ein zufälliger Weg auf  $(\Gamma, \Phi)$  mit  $\Phi_{xy} = w_x \tilde{P}_{xy}$ . Ist  $\tilde{P}_{xy} > 0$ , dann gibt es einen Weg  $x, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, y$  in  $\Gamma$  von  $x$  nach  $y$  mit einer Länge von  $m < k$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{xy} &> \frac{1}{k} \left(\frac{1}{|E|}\right)^m > \frac{1}{k} \left(\frac{1}{|E|}\right)^k \\ \Rightarrow 0 &< \frac{1}{k} \left(\frac{1}{|E|}\right)^k < \tilde{P}_{xy} < 1 \\ \Rightarrow 0 &< \frac{1}{k} \left(\frac{1}{|E|}\right)^k < \tilde{\Phi}_{xy} < E \end{aligned}$$

Dann folgt, aus Satz 1  $\tilde{P}$  ist ein zufälliger Weg auf  $\Gamma_k$  mit dem gleichen Typ auf  $\Gamma$ .  $\square$

**Definition 7** (Einbettung).  $\Gamma$  heißt eingebettet in einen Graph  $\tilde{\Gamma}$ , wenn der Punkt  $x \in \Gamma$  zu einem Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{\Gamma}$  zugeordnet werden kann, so dass die Kanten  $xy \in \Gamma$  durch die Kante  $\tilde{x}\tilde{y} \in \tilde{\Gamma}$  beschrieben werden kann.

**Satz 3.** Falls ein Weg auf  $\Gamma$  transient ist, und falls  $\tilde{\Gamma}$  eingebettet werden kann in einen  $k$ -fuzz  $\Gamma_k$  von  $\Gamma$ , dann ist der zufällige Weg auf  $\tilde{\Gamma}$  auch transient.

*Beweis.* Angenommen, der zufällige Weg auf  $\Gamma$  ist transient und  $\Gamma$  kann eingebettet werden in ein  $k$ -fuzz  $\tilde{\Gamma}_k$  von  $\tilde{\Gamma}$ , wobei  $\tilde{\Gamma}$  ein weiterer Graph. Dann sind die Typen der zufälligen Wege auf den Graphen  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  gleich.

Kann  $\Gamma$  eingebettet werden in  $\tilde{\Gamma}_k$ , dem  $k$ -fuzz von  $\tilde{\Gamma}$  und  $\tilde{\Gamma}$  in  $\Gamma_k$ , dem  $k$ -fuzz von  $\Gamma$ , dann ist der zufällige Weg auf  $\Gamma$  nur dann transient, wenn der zufällige Weg auf  $\tilde{\Gamma}$  transient ist.  $\square$

*Bemerkung 4.* Ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  sind vom gleichen Typ, wenn jeder Graph als  $k$ -fuzz eines anderen Graphen einbettet werden kann.

*Beweis.* Folgt aus Satz 3.  $\square$

## 5 Vergleich von allgemeinen Graphen mit Gittern

**Definition 8** (Gitter). Ein Gitter im  $\mathbb{Z}^d$  ist ein Graph mit äquidistanten Unterteilungen der Knoten.

Es ist nur natürlich zu versuchen, dass nun der Graph  $\Gamma$  mit Gitter  $\mathbb{Z}^d$  identifiziert wird.

**Definition 9.** Ein dargestellter Graph  $\Gamma$  in dem euklidischen Raum heißt auf vernünftiger Weise dargestellt, wenn die Knoten in den  $\mathbb{R}^d$  eingebettet werden können, so dass für einige  $r < \infty, s > 0$  gilt:

1. die Länge jeder Kante ist  $< r$  und
2. die Distanz zwischen zwei beliebigen Punkten ist  $> s$ .

**Satz 4.** Wenn ein Graph im  $\mathbb{R}^d$  in einer vernünftiger Weise dargestellt werden kann, dann kann er in einem  $k$ -fuzz des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  eingebettet werden.

*Beweis.* Wir nehmen an  $d=2$ . Dann kann  $\Gamma$  auf vernünftiger Weise im  $\mathbb{R}^d$  dargestellt werden. Dann bleibt zu zeigen, dass  $\Gamma$  in einem  $k$ -fuzz von  $\mathbb{Z}^d$  eingebettet werden kann. Um die Behauptung zu beweisen, wird nicht der  $\mathbb{Z}^2$  sondern der  $\mathbb{L}^2$  betrachtet. Der  $\mathbb{L}^2$  ist in Abbildung 2 zu sehen. Der  $\mathbb{L}^2$  ist graphentheoretisch identisch zur Struktur

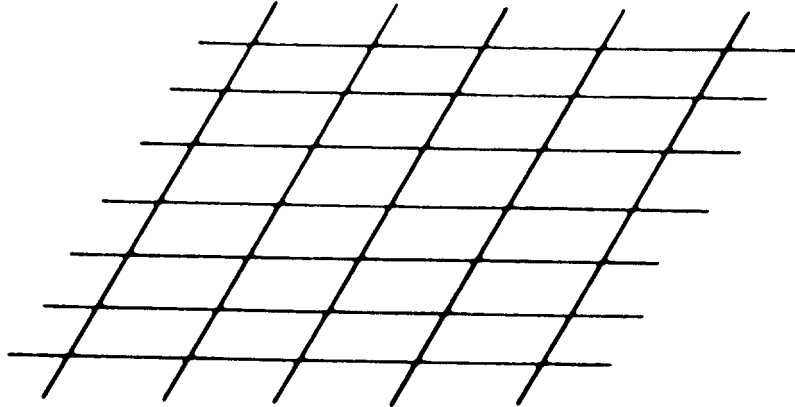


Abbildung 2: Gitter  $\mathbb{L}^2$

des Raumes  $\mathbb{Z}^2$ . Beim Versuche  $\Gamma$  und  $\mathbb{L}$  zu vergleichen, wird die Flexibilität von  $\mathbb{L}^2$  benutzt, um Punkte von  $\Gamma$  in  $\mathbb{L}$  zu identifizieren. Dabei wird durch die Flexibilität von  $\mathbb{L}^2$  benutzt, dass sich die Punkte nicht überschneiden.

Sei  $\mathbb{L}^2$  ein reguläres zweidimensionales Gitter mit einer Kantenlänge von  $\frac{s}{2}$ . In jedem Quadrat von  $\mathbb{L}^2$  ist mindestens ein Punkt von  $\Gamma$  zu finden. Lege jeden Punkt  $x \in \Gamma$  in die südöstliche Ecke  $\tilde{x}$  des Punktes  $x$ , wie es in Abbildung 3. Jeder der aneinander

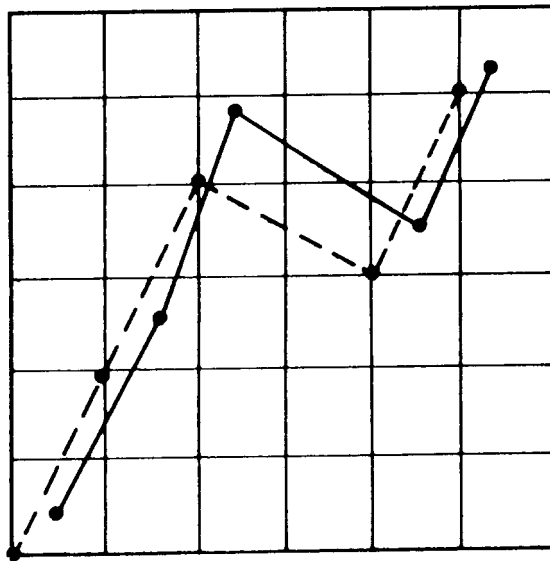


Abbildung 3: Einbetten von  $\Gamma$  in  $\mathbb{L}^2$

<sup>2</sup> $\mathbb{L}$  ist die Menge der Linien zu sehen in Abbildung 5

liegende Punkte  $x, y \in \Gamma$  mit Kantenlänge  $r$  wurde auf ein korrespondierendes Paar von Punkten  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{L}^2$  mit einem euklidischen Abstand  $|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |x - y| + |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| \leq r + 2s = R$ . Wähle  $k$  so, dass je zwei Punkte in  $\mathbb{L}^2$ , deren euklidischer Abstand  $< r + 2s$  ist, in  $k$  Schritten, in  $\mathbb{L}^2$ , verbunden werden können. Dann sind  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  benachbarte Punkte in  $\mathbb{L}^2$ . Hängt  $k$  nicht von den Punkten  $x$  und  $y$  ab, so ist  $\Gamma$  eine Einbettung im  $k$ -fuzz von  $\mathbb{L}^2$ . Wähle  $\frac{2R}{s} = 4\frac{R}{s} < k$  für  $k$ .  $\square$

**Hilfssatz 2.** Falls  $\Gamma$  auf vernünftiger Weise im  $\mathbb{R}^1$  oder  $\mathbb{R}^2$  dargestellt werden kann, dann sind die zufälligen Weg rekurrent.

*Beweis.* Angenommen  $\Gamma$  kann auf vernünftige Weise im  $\mathbb{R}^2$  dargestellt werden. Dann kann  $\Gamma$  in einen  $k$ -fuzz  $\mathbb{Z}_k^2$  von  $\mathbb{Z}^2$  eingebettet werden. Falls nun ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$  transient ist, dann ist gleiche wahr für  $\mathbb{Z}_k^2$  und für  $\mathbb{Z}^2$ . Aber aus Polya's Theorem folgt, dass ein zufälliger Weg auf  $\mathbb{Z}^2$  rekurrent ist. Dann ist ein zufälliger Weg auf  $\Gamma$  rekurrent.  $\square$

Dieser Hilfssatz impliziert, dass ein zufälliger Weg auf einem ausreichendem symmetrischen Graphen im  $\mathbb{R}^2$  rekurrent ist.

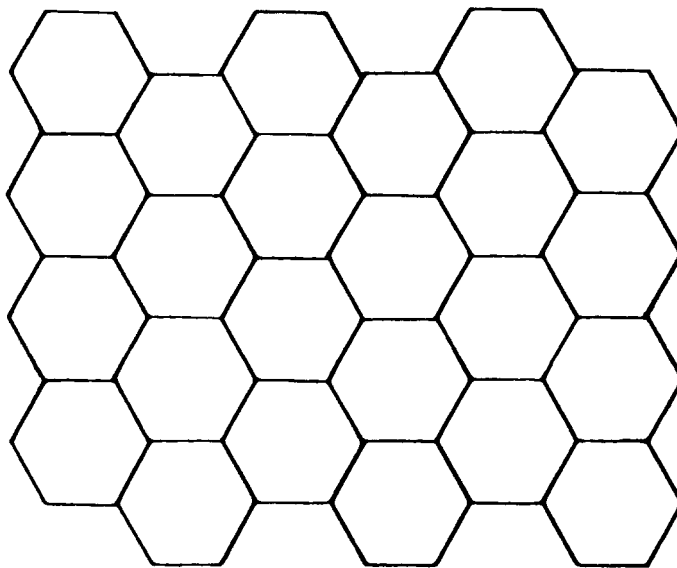


Abbildung 4: Oktagon Graph

## 6 Ein zufälliger Weg in dritter Dimension ist transient

Wir beweisen diese Aussage mit den uns nun zur Verfügung stehenden Methoden. Wir zeigen, dass ein zufälliger Weg auf einem dreidimensionalen Gitter transient ist.

Sei  $\Gamma$  ein Teil des  $\mathbb{Z}^3$ , das in unserem ersten Quadranten liegt. Der Graph  $\Gamma^{(4)}$  wird in Abbildung 5. Unser Fluß, wir so wählen, dass dieser sich immer von dem Referenzpunkt 0 wegbewegt. Der Fluß bewegt sich durch jeden Punkt der nicht auf den Axen liegt. Es gibt 2 verschiedene Arten der Bewegung:

1. horizontal oder
2. vertikal.

Die Summe der Korrespondierenden Werte  $\mu_{xy}$  soll gleich sein für alle Punkte und die gleich Distanz von 0 haben. Diese Voraussetzung, soll den Fluss bestimmen. Der Fluss des Punktes  $(x, y)$  mit  $x + y = n$  ist in Abbildung 6 gezeigt. Im Allgemeinen ist der Fluss aus einem Punkt  $(x, y)$  mit  $x + y = n$

$$\frac{x+1}{(n+2)(n+1)} + \frac{y+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

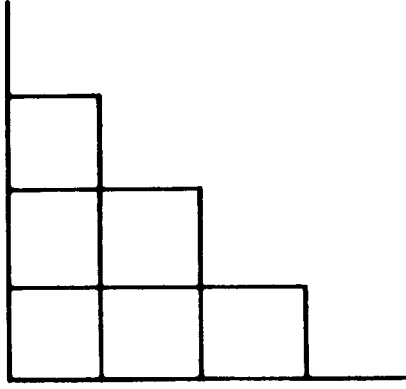


Abbildung 5:  $\Gamma^{(4)}$

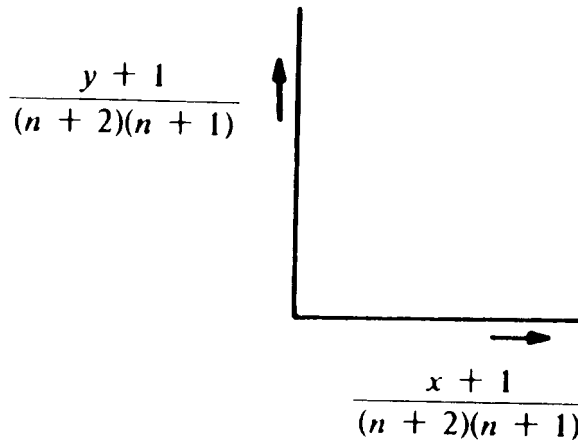


Abbildung 6: Fluss

und der Fluss in einem Punkt ist gegeben durch

$$\frac{x}{n(n+1)} + \frac{y}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

Dann ist der Netzfluss an  $(x, y) = 0$ . Der Fluss von 0 ist  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Dies ist für einen zweidimensionalen Graphen. Für einen dreidimensionalen Graphen, ist der Fluss definiert als: Von  $(z, y, x)$  geht der Fluss aus mit  $x + y + z = n$  zu sehen in Abbildung 7. Der endgültige Fluss aus  $(x, y, z)$  ist dann

$$\frac{2(x+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \frac{2(y+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \frac{2(z+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad (3)$$

Der Fluss nach  $(x, y, z)$  kommt von den Punkten  $(x-1, y, z)$ ,  $(x, y-1, z)$  und  $(x, y, z-1)$  dann ist der entgültige Fluss nach  $(x, y, z)$ :

$$\frac{2x}{n(n+2)(n+1)} + \frac{2y}{n(n+2)(n+1)} + \frac{2z}{n(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad (4)$$

Dann ist der Netzfluss 0. der Fluss weg von 0 ist  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ .

Der Fluss, der aus den Kanten kommt ist für die  $n$ -ten Ebenen  $< \frac{2}{(n+1)^2}$ . Es gibt  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  Punkte mit einer Entfernung  $n$  von 0, dann kommen  $\frac{3}{2}(n+1)(n+2) < 3(n+1)^2$  Kanten aus diesen Ecken der  $n$ -ten Ebene.

Dann ist der zufällige Weg transient.

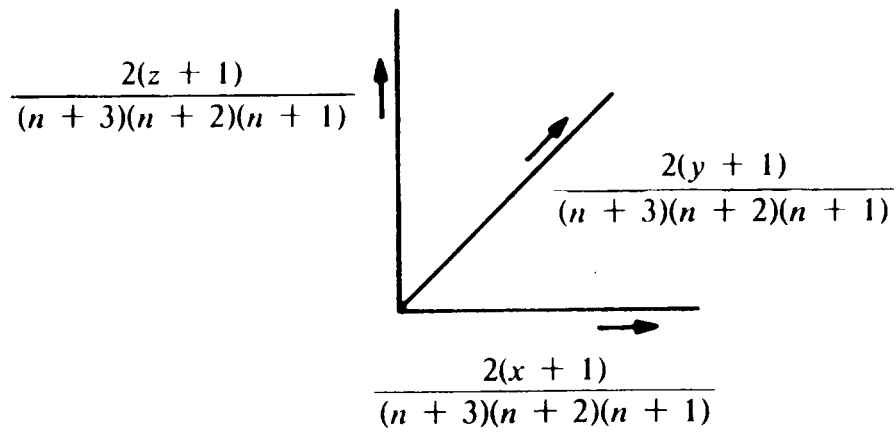


Abbildung 7: Fluss auf einem dreidimensionalen Gitter

## Literatur

[Random06]

**Doyel P.G., Snell J.L.**, “Random walks and electric networks”, <http://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf> (2006)

[Wiki]

“Graphentheorie”, <http://de.wikipedia.org/wiki/Graphentheorie>