Universität Bielefeld **Sommersemester 2007**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Ausgewählte Kapitel der Stochastik

Blatt 4

Aufgabe 1

a) Wir werfen zweimal eine faire Münze. A bezeichne das Ereignis, dass im ersten Wurf Kopf fällt, und B das Ereignis, dass mindestens einmal Kopf geworfen wird. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Wahrscheinlichkeitsfunktion p an. Beschreiben Sie die Ereignisse A und B formal. Angenommen wir wissen, dass mindestens einmal Kopf geworfen worden ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann im ersten Wurf Kopf gefallen. Mit anderen Worten: Wie groß ist $\mathrm{P(A|B)}$?

b) Wir werfen einen fairen Würfel. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eine 3 zu würfeln, gegeben, dass das Würfelergebnis kleiner als 4 ist?
Hinweis: Führen Sie zunächst die relevanten Ereignisse ein!

Aufgabe 2

Wir wollen von der Stadt X in die Stadt Z fahren. Für diese Fahrt können wir einen Weg über die Stadt Y nehmen. Die Wahrscheinlichkeit, auf dem Weg von X nach Y in einen Unfall verwickelt zu werden ist 0,02. Die Wahrscheinlichkeit, in einen Unfall zwischen Y und Z zu geraten, unter der Bedingung, dass man zwischen X und Y keinen Unfall hatte, beträgt 0,03.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit, wird man auf dem Weg von X nach Z in einen Unfall verwickelt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man Z unfallfrei?

Hinweis: Führen Sie zunächst die relevanten Ereignisse ein und formalisieren Sie die in dem Text gegebenen Daten!

Aufgabe 3 (*)

Man beweise:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt: $2^n < n!$

Aufgabe 4 (*)

Man zeige:
Durch n Geraden in allgemeiner Lage (d.h. jede neu hinzugefügte Gerade schneidet die vorhandenen je genau einmal und es gibt genauso viele neue Schnittpunkte wie schon vorhandene Geraden) wird die Ebene in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Gebiete zerlegt, $n \geq 0$.
Hinweis: Jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der vorhandenen Gebiete in zwei Teile.

Die mit einem (*) gekennzeichneten Aufgaben sind Übungen zur vollständigen Induktion. Sie sollten zunächst versuchen, die Induktionsbeweise eigenständig durchzuführen. Sollte Ihnen dies nicht gelingen, so finden Sie auf der zweiten Seite dieses Übungsblattes Hinweise und Lösungen. Es ist dann Ihre Aufgabe, die Beweise zu verstehen und im Tutorium zu besprechen.

Abgabe: Freitag, 11.5.2007, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren im Kopierraum V3-128

Zu Aufgabe 3

a) und b): Man imitiere den Beweis von: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 4$: Offensichtlich ist $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$\begin{array}{rrcll} & 2^n & < & n! & & \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ \Rightarrow & 2^n \cdot 2 & < & n! \cdot 2 & \leq\ n! \cdot (n+1) & (\text{da } 2 \leq n+1) \\ \Rightarrow & 2^{n+1} & < & (n+1)! & & \end{array}$$

Zu Aufgabe 4

Man überlege sich zunächst, dass die $(n+1)$-te Gerade genau $n+1$ Gebiete in zwei Teile teilt. Es bezeichne G_n die Anzahl der Gebiete, in die die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage zerlegt wird. Zeige nun durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Indusktionsanfang: $n = 0$: Offensichtlich ist $G_0 = 1 = \frac{1}{2}(0^2 + 0 + 2)$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$\begin{array}{rcll} G_{n+1} & = & G_n + n + 1 & \text{(Vorüberlegung)} \\ & = & \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) + n + 1 & \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ & = & \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 4) & \\ & = & \frac{1}{2}\left((n+1)^2 + (n+1) + 2\right). & \end{array}$$