Universität Bielefeld **Sommersemester 2007**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung
Ausgewählte Kapitel der Stochastik
Blatt 10

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X aus Aufgabe 1, Blatt 7.
(Hinweis: Bei Ihrer Lösung muss deutlich werden, wie Sie den Wert berechnet haben.)

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Zufallsvariable X, die die Augenzahl beim Werfen eines regulären

(i) Tetraeders, (ii) Oktaeders (iii) Dodekaeders (iv) Ikosaeders

angibt.

b) Zwei faire Würfel sind unterschiedlich beschriftet: der eine trägt die Augenzahlen 1, 1, 2, 5, 5, 6 und der andere die Zahlen 1, 3, 3, 4, 4, 5. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert für die Augenzahl bei beiden Würfeln gleich ist. Bei welchem Würfel ist die Varianz der Augenzahl größer? Wenn Ihnen mit einem der beiden Würfel das folgende Glücksspiel angeboten wird: Sie werfen den Würfel und bekommen die Augenzahl in Euro ausgezahlt - für welchen Würfel entscheiden Sie sich? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Wie müsste ein Würfel, der denselben Erwartungswert hat wie die Würfel in (b), mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet sein, damit die Varianz minimal wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

a) Seien X und Y Zufallsvariablen, deren Varianzen existieren. Beweisen Sie:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$
- Sind X und Y unabhängig, so gilt $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

b) Leiten Sie die Formel für den Erwartungswert und die Varianz einer zu den Parametern n und p binomialverteilten Zufallsvariablen her.

(Hinweis: Sie müssen hier bei beiden Teilaufgaben ,,das Rad nicht neu erfinden", sondern nur die Beweise aus der Vorlesung gut verstehen und so aufbereiten, dass Sie jeden Beweisschritt erklären können.)

Aufgabe 4
Wir betrachten den n-fachen Münzwurf mit einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p auf ,Kopf' fällt. Sei X die Zufallsvariable, die angibt, wie oft ,Kopf' gefallen ist.

a) Geben Sie die Verteilung von X an und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X für $n = 100$ und bei verschiedenen Münzen mit $p = 0,1; 0,2; 0,3; ...; 0,9$. Für welche Erfolgswahrscheinlichkeit p ist die Varianz am größten, d.h. *streut* die Verteilung von X am stärksten?

b) Begründen Sie allgemein, dass bei festem n die Varianz von X für $p = 0,5$ am größten ist. *(Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f(p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$!)*

Abgabe: Freitag, 22.6.2007, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren im Kopierraum V3-128