

## Übungen zur Vorlesung Ausgewählte Kapitel der Stochastik

### Blatt 11

#### Aufgabe 1

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen.

- $X$  ist binomialverteilt zu den Parametern  $n = 1000$  und  $p = \frac{1}{7}$ .
- $Y$  ist geometrisch verteilt zum Parameter  $p = \frac{1}{6}$
- $Z$  ist Poisson-verteilt zum Parameter  $\lambda = \frac{\pi}{2} + 1$ .

#### Aufgabe 2

Eine Zufallsvariable  $X$  hat den Erwartungswert 3 und die Varianz 0. Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  aus? Begründen Sie Ihre Aussage!

#### Aufgabe 3

In der Vorlesung haben Sie das Paradoxon der zwei Umschläge kennengelernt. Wie in der Vorlesung bezeichne  $X$  den Betrag, den der Spielleiter in den einen Umschlag legt (entsprechend befindet sich im zweiten Umschlag der Betrag  $2X$ ). Ein Umschlag ist ausgewählt und geöffnet worden. In diesem Umschlag befinden sich  $Y = 100$  Euro. Der Betrag in dem zweiten Umschlag sei  $Y'$ . Unter der Bedingung, dass  $Y = 100$ , gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Tausch der Umschläge der Betrag erhöht, die folgende in der Vorlesung bewiesene Gleichheit:

$$P(Y' = 2Y \mid Y = 100) = \frac{P(X = 100)}{P(X = 100) + P(X = 50)}, \quad (\star)$$

d.h. diese Wahrscheinlichkeit hängt von der Verteilung von  $X$  ab.

- Gegeben sei eine beliebige Zahl  $0 \leq p \leq 1$ . Geben Sie eine Verteilung von  $X$  an, so dass die Wahrscheinlichkeit in  $(\star)$  gleich  $p$  ist.
- In dem gewählten Umschlag befindet sich jetzt der Betrag  $y > 0$ . Zeigen Sie, indem Sie die Überlegungen aus der Vorlesung verallgemeinern, dass gilt

$$P(Y' = 2Y \mid Y = y) = \frac{P(X = y)}{P(X = y) + P(X = \frac{y}{2})}.$$

#### Aufgabe 4

Die Zufallsvariable  $X$  ist geometrisch verteilt zum Parameter  $0 < p < 1$ . Beweisen Sie, dass für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$P(X = m + k \mid X > m) = P(X = k)$$

Diese Eigenschaft wird auch die *Gedächtnislosigkeit* der geometrischen Verteilung genannt. Warum?

**Abgabe: Freitag, 29.6.2007, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren im Kopierraum V3-128**