**Universität Bielefeld** **Sommersemester 2007**
**G. Elsner**

## Übungsklausur zur Vorlesung

# Ausgewählte Kapitel der Stochastik

**Aufgabe 1**

a) Ein vierseitiger Spielwürfel (Tetrateder) und ein gewöhnlicher fairer Würfel werden nacheinander geworfen. Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des Zufallsexperimentes $(\Omega, p)$ an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$A$: Der Würfel zeigt bei beiden Würfen dieselbe Augenzahl.

$B$: Der Würfel zeigt bei beiden Würfen verschiedene Augenzahlen und ihre Summe ist 8.

$C$: Die Augensumme ist 5.

b) Modifizieren Sie das Zufallsexperiment wie folgt: Fällt beim ersten Wurf eine 1, so werfen Sie beim zweiten Wurf erneut den Tetraederwürfel, anderenfalls werfen Sie beim zweiten Wurf mit dem fairen sechsseitigen Würfel.
Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des modifizierten Zufallsexperimentes $(\Omega', p')$ an und bestimmen Sie erneut die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A, B$ und $C$.

**Aufgabe 2**

$A$ und $B$ seien Ereignisse. Beweisen Sie die folgende Gleichheit mit Hilfe einer vollständigen Fallunterscheidung:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap \left((A \cap B)^C\right)$$

**Aufgabe 3**

Wie viele Worte der Länge 4 (zur Erklärung: Ein *Wort der Länge 4* ist eine Anordnung von vier Buchstaben unabhügig davon, ob diese Anordnung eine sprachliche Bedeutung hat) kann man aus den Buchstaben des Wortes `M A T H E` bilden, wenn

a) jeder Buchstabe höchstens einmal auftreten darf,

b) Buchstaben wiederholt werden dürfen,

c) Vokale nicht direkt nebeneinander stehen dürfen?

**Aufgabe 4**

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 10 Leichtathleten ein Team für eine 4 × 100 m - Staffel zusammenzustellen?

b) Beim Lotto „4 aus 35" werden aus einer Lostrommel (Urne) nacheinander vier der von 1 bis 35 nummerierten Kugeln als Gewinnzahlen und anschließend eine als Zusatzzahl gezogen. Auf einem Lottozettel müssen 4 Zahlen durch Ankreuzen erraten werden. Die gezogenen Kugeln werden nicht in die Trommel zurückgelegt und die Reihenfolge der gezogenen Zahlen bleibt unberücksichtigt. Wie viele Möglichkeiten der Ziehung gibt es? Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse I („4 Richtige")? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse II („3 Richtige mit Zusatzzahl") und Gewinnklasse III („3 Richtige ohne Zusatzzahl").

c) Ein Möbelhaus bietet als Sonderangebot ein 10er Paket Kerzen an, das man sich selbst aus verschiedenfarbigen Kerzen beliebig zusammenstellen kann. Man kann zwischen 4 Farben wählen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

**Aufgabe 5**

Ein Automobilhersteller bezieht für seine Produktion ein Bauteil von drei verschiedenen Zuliefererfirmen $A$, $B$ und $C$. Firma $A$ liefert 20 % , Firma $B$ 35 % und Firma $C$ 45 % der für die Produktion notwendigen Menge dieses Bauteils. Alle Bauteile werden im Lager zunächst zwischengelagert. Ferner ist bekannt, dass die von Firma $A$ gelieferten Bauteile zu 7 % defekt sind, die von Firma $B$ zu 4 % und die von Firma $C$ zu 2 %.

a) Ein Bauteil im Lager wird zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es defekt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solches defektes Teil von Firma $A$ (von $B$, von $C$)?

**Aufgabe 6**
Aus einem gut gemischten Rommeespiel (52 Karten, ohne Joker) wird eine Karte gezogen. Welche der folgenden Ereignisse sind voneinander unabhängig?

$A$: Es wurde eine Herzkarte gezogen. $B$: Es wurde eine Dame gezogen.

$C$: Es wurde kein Bild (= Bube, Dame oder König) gezogen.

**Aufgabe 7**
Eine Firma stellt Glühbirnen her. Es ist bekannt, dass das Unternehmen ca. 5 % Ausschuss produziert, d.h., ca. 5 % der produzierten Glühbirnen sind defekt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle zieht die Firma eine Stichprobe, indem sie an fünf aufeinander folgenden Tagen (zu einem zufälligen Zeitpunkt) jeweils eine Glühbirne der Produktion entnimmt. Sei $X$ die zufällige Anzahl der defekten Glühbirnen in der gezogenen Stichprobe. Die Art und Weise, wie die Stichprobe entnommen wird, rechtfertigt die Annahme, dass $X$ binomialverteilt ist. Berechnen

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   - sich keine defekte Glühbirne in der Stichprobe befindet;
   - sich mindestens zwei defekte Glühbirnen in der Stichprobe befinden.

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl defekter Glühbirnen in der Stichprobe. Wie groß ist die Varianz?

**Aufgabe 8**
Durch

| x \ y | -5 | -4 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| -10 | 0,01 | 0,025 | 0,02 | 0,015 | 0,03 |
| 1 | 0,07 | 0,175 | 0,14 | 0,105 | 0,21 |
| 10 | 0,02 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,06 |

sei die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $X$ und $Y$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_X$ von $X$ und $p_Y$ von $Y$ und ergänzen Sie die Werte von $p_X$ bzw. $p_Y$ als letzte Spalte bzw. letzte Zeile in obiger Tabelle.

b) Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ unabhängig sind oder nicht. Falls Sie zu dem Ergebnis kommen, dass die Zufallsvariablen abhängig sind: Wie müsste die gemeinsame Verteilung modifiziert werden, damit $X$ und $Y$ unabhängig sind?

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $X$; $Y$; $X + Y$; $X \cdot Y$ und $X^2$.

**Aufgabe 9**
„Wahr" oder „falsch"? Bitte kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch sind.

| | | **wahr** | **falsch** |
|---|---|---|---|
| (1) | Sind zwei Ereignisse $A$ und $B$ disjunkt, so sind sie auch unabhängig. | ○ | ○ |
| (2) | Für eine Verteilungsfunktion $F$ gilt stets $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$ | ○ | ○ |
| (3) | Gilt für ein Ereignis $A$, dass $\mathrm{P}(A) = 0$, so gilt für alle Ereignisse $B$, dass $A$ und $B$ unabhängig sind. | ○ | ○ |
| (4) | Für unabhängige Ereignisse $A$ und $B$ gilt: $\mathrm{P}(A\|B) = \mathrm{P}(B\|A)$ | ○ | ○ |
| (5) | Nimmt eine Zufallsvariable $X$ nur positive Werte an, so gilt $\mathbb{E}(X) \geq 0$ | ○ | ○ |

**Aufgabe 10**
Sei $X$ eine Zufallsvariable, die die Werte 1, 2, 3, 4, ... annehmen kann. Beweisen Sie:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n)$$

*(Hinweis: Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq n)$ für $n$ = 1,2,3,... als Summe von Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X = k)$ so in die erste, zweite, dritte,... Zeile eines „Dreieckschemas", dass gleiche Summanden untereinander stehen.)*

**Abgabe: Freitag, 15.6.2007, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren im Kopierraum V3-128**