Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung
Spezielle Aspekte der Stochastik
Blatt 1

Aufgabe 1

a) Durch

x	-2	-0,5	0	1	2,5
$P(X=x)$	0,1	0,25	0,2	0,15	0,3

sei die Verteilung einer Zufallsvariablen X gegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X und zeichnen Sie die Graphen von der Verteilung $x \mapsto P(X=x)$ und von F_X.

b) Durch

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad y < -1 \\ 0,2, & \text{falls} \quad -1 \leq y < 0 \\ 0,6, & \text{falls} \quad 0 \leq y < 1,5 \\ 0,75, & \text{falls} \quad 1,5 \leq y < 3 \\ 1, & \text{falls} \quad y \geq 3 \end{cases}$$

ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen Y gegeben. Bestimmen Sie die Verteilung von Y und zeichnen Sie die Graphen der Verteilung $x \mapsto P(Y=x)$ und von F_Y.

c) Kann durch die folgenden Funktionen p, q bzw. r die Verteilung einer Zufallsvariablen gegeben sein, d.h. gibt es eine Zufallsvariable X mit $P(X=x) = p(x)$ (bzw. $= r(x)$, $= q(x)$)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

x	-6	1	3	14	22
$p(x)$	0,1	0,05	0,35	0,15	0,4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	0,1	0,2	0,15	-0,1	0,3	0,15	0,2

x	-4	-0,1	0	0,1	6
$r(x)$	0,1	0,6	0	0,15	0,15

d) Kann durch die folgenden Funktionen F bzw. G die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen gegeben sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < -1 \\ 0,2, & \text{falls} \quad -1 \leq x < -0,5 \\ 0,6, & \text{falls} \quad -0,5 \leq x < 1 \\ 0,5, & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{falls} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < -10 \\ 0,8, & \text{falls} \quad -10 \leq x < -2 \\ 0,9, & \text{falls} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1, & \text{falls} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Hinweis: Die auf der nächsten Seite folgenden Aufgaben sind vielleicht nicht alle ganz leicht zu lösen, Sie sollten aber wenigstens versuchen, einige Teilaufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 2
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Für die Folge $B_1, B_2, ... \in \mathcal{A}$ von Ereignissen gelte

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq ....$$

Beweisen Sie, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß P *σ-stetig von unten* ist, d.h. dass gilt:

$$P(B_n) \longrightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \quad \text{für} \quad n \to +\infty$$

Hinweis: Definiere $A_1 := B_1, A_2 := B_2 \setminus B_1, A_3 := B_3 \setminus B_2$, usw., stelle B_n und $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ als Vereinigungen der Mengen A_n dar und nutze die σ-Additivität von P.

b) Für die Folge $B_1, B_2, ... \in \mathcal{A}$ von Ereignissen gelte

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ....$$

Beweisen Sie, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß P *σ-stetig von oben* ist, d.h. dass gilt:

$$P(B_n) \longrightarrow P(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) \quad \text{für} \quad n \to +\infty$$

Hinweis: Betrachte statt der Mengen B_n ihre Komplemente und wende a) an!

Aufgabe 3
Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Verteilungsfunktion F_X von X.

a) „F_X kommt von 0 und geht nach 1", d.h. es gilt: $\lim_{n\to\infty} F_X(-n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} F_X(n) = 1$.
Hinweis: Betrachte die Ereignisse $B_n := \{X \le -n\}$ bzw. $C_n := \{X \le n\}$, dann gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ bzw. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega$ (warum?). Wende nun Aufgabe 2 an.

b) $P(X = a) = F_X(a) - \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} F_X(x)$
Hinweis: Es reicht offenbar zu zeigen (warum?), dass $P(X < a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} F_X(x)$. Dazu betrachte eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < a$ und $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Zeige, dass für die Ereignisse $B_n := \{X \le x_n\}$ gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \{X < a\}$ und wende dann Aufgabe 2 a) an.

c) F_X ist rechtsseitig stetig an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$. Zeige dazu, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \ge a$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt: $F_X(a_n) \to F_X(a)$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Definiere die Ereignisse $B_n := \{X \le a_n\}$, zeige $\{X \le a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ und benutze Aufgabe 2 b).

Abgabe: Freitag, 24.04.09, 12.00 Uhr, Postfach des Tutors in V3-128