Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Spezielle Aspekte der Stochastik

Blatt 4

Aufgabe 1
Das Abfüllgewicht (in Gramm) einer Zuckerabfüllmaschine sei normalverteilt zu den Parametern μ und $\sigma^2 = 0,25$. Wie groß muss μ mindestens sein, damit das Mindestgewicht 999 g mit der Wahrscheinlichkeit 0,99 eingehalten wird?

Aufgabe 2
Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte f. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $V(X)$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } -0,25 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \leq 0,5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{falls } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

Aufgabe 3
Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Die Verteilung von X heißt auch *Halbkreisverteilung.* Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = 0$ gilt.
Hinweis: Achten Sie auf Symmetrie!

Aufgabe 4 (Gammaverteilung)
Die *Gammaverteilung* tritt unter anderem bei der Modellierung von Bedien- und Reparaturzeiten in Warteschlangen auf. Im Versicherungswesen dient sie der Beschreibung kleinerer und mittlerer Schäden.
Eine Zufallsvariable X heißt *Gamma-verteilt zu den Parametern* $\alpha > 0$ *und* $\lambda > 0$ (wir schreiben kurz: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$), falls X die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x}$ die sogenannte *Gammafunktion.*

a) Rechnen Sie nach, dass für die Gammafunktion gilt:
$\Gamma(1) = 1$ und für alle $z > 0$ gilt $z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ (partielle Integration!).
Folgern Sie aus diesen beiden Eigenschaften, dass für natürliche Zahlen n gilt: $\Gamma(n) = n!$.

b) Zeigen Sie, dass eine $\Gamma(1, \lambda)$-verteilte Zufallsvariable exponentialverteilt zum Parameter λ ist.

c) Sei X $\Gamma(\alpha, 1)$-verteilt. Rechnen Sie nach, dass $\mathbb{E}(X) = \alpha$ und $V(X) = \alpha$.
Hinweis: Verwenden Sie a)!

Abgabe: Freitag, 15.05.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128