Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Spezielle Aspekte der Stochastik

Blatt 6

Aufgabe 1
Sei X eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable und sei $c_\gamma > 0$ so gewählt, dass X Werte im Intervall $[\mu - c_\gamma\sigma; \mu + c_\gamma\sigma]$ mit Wahrscheinlichkeit ungefähr γ annimmt.
Bestimmen Sie c_γ für $\gamma = 50\%, \gamma = 80\%, \gamma = 90\%, \gamma = 95\%$ und $\gamma = 99\%$.
Hinweis: Verwenden Sie die folgende Gleichung für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Aufgabe 2
In einem Teich lebt eine unbekannte Anzahl N Fische. Diese Anzahl soll geschätzt werden, indem 20 Fische dem Teich entnommen, markiert und anschließend wieder im Teich ausgesetzt werden. Nach einiger Zeit werden dann mit einem Netz 50 Fische gefangen, von denen x markiert sind.

a) Geben Sie in Abhängigkeit von N an, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau x Fische des Fangs markiert sind.

b) Geben Sie für das Ergebnis $x = 5$ (bzw. $x = 20$) einen Schätzwert für die Gesamtanzahl N Fische im Teich an.

Aufgabe 3 (Berechnung eines Stichprobenumfangs)
Man möchte den Anteil p der Raucher in einer sehr großen Bevölkerung schätzen und zwar auf 2% genau. Will man p mit 100%-iger Sicherheit auf 2% genau schätzen so muss man fast die ganze Bevölkerung befragen. Reicht aber eine geringere Sicherheit α, etwa $\alpha = 0,95$ aus, so genügt eine kleinere Stichprobe. Aufgrund der Größe der Bevölkerung dürfen wir vereinfachend annehmen, dass die Stichprobe ,,mit Zurücklegen" gezogen wurde. Wie groß muss der Umfang n der Stichprobe sein, wenn wir als Schätzwert für p den relativen Anteil $\hat{p} := \frac{S_n}{n}$ der Raucher in der Stichprobe nehmen?

Anleitung:

- Wie ist die Zufallsvariable S_n, die die Anzahl der Raucher in der Stichprobe angibt, verteilt? Wie groß sind Erwartungswert und Varianz?
- Geben Sie ein Intervall um den Erwartungswert an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% die Werte von S_n liegen. Geben Sie mithilfe dieses Intervalls eine von n und p abhängige Schranke für den Abstand $|\hat{p} - p|$ an, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht überschritten wird.
- Wie groß muss nun n sein, damit diese Schranke (für alle p) kleiner als 2% ist?

Abgabe: Freitag, 29.05.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128