Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Spezielle Aspekte der Stochastik

Blatt 7

Aufgabe 1

a) Bei einem Münzwurf mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p für ,,Kopf" wird zur Schätzung von p beobachtet, nach wie vielen Würfen, das erste Mal ,,Kopf" fällt. Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell für diese Situation an und definieren Sie einen sinnvollen Schätzwert für p. Ist der von Ihnen angegebene Schätzer erwartungstreu?

b) In der Situation aus a) wird n-mal unabhängig die Münze so lange geworfen, bis das erste Mal Kopf fällt. Das Ergebnis dieses Versuchs sei $(k_1, ..., k_n)$. Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell für diese Situation an.

c) Bei dem in b) beschriebenen Vorgehen hat man für $n = 10$ die Stichprobe $(1, 1, 1, 4, 4, 5, 6, 2, 1, 2)$ erhalten. Wie würden Sie p aufgrund dieser Stichprobe schätzen? Wie lautet ein Schätzer für allgemeines n und die Stichprobe $(k_1, ..., k_n)$?

Aufgabe 2

In New York sind die N Taxis mit den Nummern 1 bis N von außen gut lesbar durchnummeriert. Ein Passant steht an einer vielbefahrenen Kreuzung und beobachtet die Nummern der n Taxis $x_1, ..., x_n$. Wiederholungen werden ignoriert. Auf der Basis dieser Beobachtung soll die Gesamtzahl N der New Yorker Taxis geschätzt werden.

a) Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell für diese Situation an. Diskutieren Sie die Ihrem Modell unterliegenden vereinfachenden Annahmen.

b) Geben Sie mindestens drei verschiedene Schätzwerte für N an. Begründen Sie jeweils, warum Sie diesen Wert gewählt haben.

Aufgabe 3 (Tea Tasting Lady)

Eine Lady behauptet, dass sie - wenn sie Tee probiert, der einen Zusatz Milch enthält - unterscheiden kann, ob zuerst die Milch (*Tee vom Typ I*) oder zuerst der Tee (*Tee vom Typ II*) eingegoßen worden ist.

Um die Aussage der Lady zu überprüfen, werden der Lady an n aufeinander folgenden Tagen jeweils eine Tasse Tee vom Typ I und eine Tasse vom Typ II vorgesetzt, die sie korrekt klassifizieren muss. Die beiden Tassen werden ihr jeweils in einer durch eine faire Münze ermittelten Reihenfolge gegeben. Sei X die Anzahl der Tage, an denen die Lady beide Tassen richtig klassifiziert.

a) Welche Verteilung könnte man für X annehmen?

b) Entwerfen Sie eine Testsituation, mit deren Hilfe sie entscheiden können, ob die Lady tatsächlich unterscheiden kann, ob zuerst die Milch oder zuerst der Tee eingegoßen worden ist.

c) Beschreiben Sie die Fehler, die man in der Testsituation machen kann.

Aufgabe 4

Gegeben sei das statistische Modell mit dem Stichprobenraum $\mathcal{X} := \{(k_1, ..., k_n) \mid k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_0\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $\text{Poi}^n(\lambda), \lambda > 0$, wobei $\text{Poi}^n(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, für die die Komponenten $k_1, ..., k_n$ unabhängig und Poisson-verteilt zum Parameter λ sind.
Gegeben sei die Schätzer

$$\hat{\lambda} := \frac{1}{n}(k_1 + ... + k_n)$$

für den Parameter λ. Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}$ erwartungstreu und konsistent ist.
Hinweis: Für die Konsistenz müssen Sie sich an das schwache Gesetz großer Zahlen erinnern!

Abgabe: Freitag, 05.06.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128