Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung
Spezielle Aspekte der Stochastik
Blatt 8

Aufgabe 1
Ein Reißnagel kann auf die Spitze (S) oder den Rücken (R) fallen. Er falle auf den Rücken mit Wahrscheinlichkeit θ. Um θ zu bestimmen, wird der Reißnagel n mal unabhängig geworfen. Das Ergebnis dieser Würfe wird mit $x = (x_1, ..., x_n)$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie in den folgenden Fällen die Likelihood-Funktion, die log-Likelihood-Funktion und den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

(1) $n = 15$ und $x = (S, S, R, S, R, S, S, S, S, S, S, S, S, R, R, S)$

(2) $n = 7$ und $x = (S, S, S, S, S, S, R)$

b) Leiten Sie für ein beliebiges Wurfergebnis x die Likelihood-Funktion, die log-Likelihood-Funktion und den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ her.

Aufgabe 2
Bei einem Münzwurf mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p für ,,Kopf" wird zur Schätzung von p beobachtet, nach wie vielen Würfen, das erste Mal ,,Kopf" fällt. Betrachten Sie das statistische Modell aus Aufgabe 1, Blatt 7 und bestimmen Sie in die Likelihood-Funktion, die log-Likelihood-Funktion und den Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

Aufgabe 3
In New York sind die N Taxis mit den Nummern 1 bis N von außen gut lesbar durchnummeriert. Ein Passant steht an einer vielbefahrenen Kreuzung und beobachtet die Nummern der n Taxis $x_1, ..., x_n$. Wiederholungen werden ignoriert. Auf der Basis dieser Beobachtung soll die Gesamtzahl N der New Yorker Taxis geschätzt werden. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für N.

Aufgabe 4
Gegeben sei das statistische Modell mit Stichprobenraum $\mathcal{X} := \{x = (k_1, ..., k_n) \mid k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_0\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P_\lambda := \mathrm{Poi}^n(\lambda), \lambda > 0$, wobei $\mathrm{Poi}^n(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, für die die Komponenten $k_1, ..., k_n$ unabhängig und Poisson-verteilt zum Parameter λ sind, d.h.

$$P_\lambda\big(\{(k_1, ..., k_n)\}\big) = \prod_{i=1}^{n} \big(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\big).$$

a) Bestimmen Sie für $n = 5$ und die Stichprobe $x = (0, 1, 2, 1, 1)$ die Likelihood-Funktion, die log-Likelihood-Funktion und den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

b) Bestimmen Sie allgemein den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ in Abhängigkeit von n und von x.

Abgabe: Freitag, 12.06.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128