

Übungen zur Vorlesung Spezielle Aspekte der Stochastik

Blatt 12

Aufgabe 1

- a) Gegeben sind die folgenden Matrizen. Berechnen Sie alle möglichen Matrizenprodukte, die mit je zwei dieser Matrizen gebildet werden können.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- b) Gegeben sei eine 3×3 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Beschreiben Sie die Wirkung, die das Multiplizieren der Matrix A mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

von links bzw. von rechts hat. Was passiert wenn man mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ von links bzw. rechts multipliziert?

Aufgabe 2 (Das Internet als Markov-Kette)

Stellen Sie sich vor, Sie surfen auf die folgende Weise im Internet: Jedes Mal, wenn Sie auf eine Internetseite kommen, klicken Sie auf einen der dortigen Links. Jeder Link der Seite wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit von Ihnen angeklickt. Falls die Seite keinen Link aufweist, bleiben Sie auf der aktuellen Seite.

- a) Handelt es sich hierbei um eine Markov-Kette? (Begründung!) Falls ja, geben Sie eine formale Beschreibung der Kette $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ an, d.h. beschreiben Sie den Zustandsraum und die Übergangsmatrix der Kette.
- b) Modifizieren Sie den obigen Prozess, indem Sie auch einen „Zurück“-Knopf berücksichtigen, d.h., Sie klicken auf einen der Links oder auf den „Zurück“-Knopf jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit. Handelt es sich hierbei um eine Markov-Kette? (Begründung!) Falls ja, geben Sie eine formale Beschreibung der Kette $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ an, d.h. beschreiben Sie den Zustandsraum und die Übergangsmatrix der Kette.

Aufgabe 3

- a) Gegeben sei die folgende Übergangsmatrix P einer Markov-Kette X_0, X_1, X_2, \dots :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

- i) Geben Sie den Übergangsgraphen zu P an.
- ii) Gegeben sei die Startverteilung $\mu^{(0)}$ der Markov-Kette durch $\mu^{(0)} = (0; 0,5; 0,25; 0; 0,25)$. Bestimmen Sie die Verteilung von X_1, X_2 und X_3 .

b) Gegeben sei die folgende Übergangsmatrix P einer Markov-Kette X_0, X_1, X_2, \dots :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- i) Geben Sie den Übergangsgraphen zu P an.
ii) Gegeben seien drei Startverteilungen $\mu_I^{(0)}, \mu_{II}^{(0)}$ und $\mu_{III}^{(0)}$ für die Markov-Kette durch

$$\mu_I^{(0)} = (0; 1; 0; 0), \quad \mu_{II}^{(0)} = (0; 0; 1; 0) \quad \text{und} \quad \mu_{III}^{(0)} = (0; 0; 5; 0; 5; 0)$$

Bestimmen Sie jeweils die Verteilung von X_1, X_2 und X_3 .

Abgabe: Freitag, 10.07.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128