Universität Bielefeld **Sommersemester 2009**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Spezielle Aspekte der Stochastik

Blatt 13 (letztes Blatt)

Aufgabe 1

a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 & -0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0, & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind stochastische Matrizen?

b) Durch die stochastischen Matrizen aus a) seien Markov-Ketten definiert. Welche dieser Ketten sind irreduzibel, welche aperiodisch? Geben Sie bei nicht aperiodischen Ketten die Periode der Zustände jeweils an.

c) Gibt es eine Markov-Kette, die Zustände der Periode 1, 2 und 3 besitzt. Geben Sie gegebenfalls die Übergangsmatrix einer solchen Kette an.

Aufgabe 2

Begründen Sie jeweils, ob $\pi_i, i = 1, 2, 3, 4$ eine stationäre Verteilung der Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist.}$$

a) $\pi_1 = (0,375; 0,625; 0; 0)$

b) $\pi_2 = (0,075; 0,125; 0,3; 0,3)$

c) $\pi_3 = (0,15; 0,25; 0,2; 0,4)$

d) $\pi_4 = (0; 0; 0,5; 0,5)$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Markov-Kette $(X_0, X_1, ...)$ mit zweielementigem Zustandsraum und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraph der Markov-Kette.

b) Begründen Sie, ob die Kette irreduzibel ist oder nicht.

c) Was passiert mit X_n, wenn $n \to \infty$? Begründen Sie Ihre Aussage!

d) Besitzt diese Kette eine stationäre Verteilung? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls!

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede irreduzible Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j=1,....N}$, die einen Zustand k, $1 \leq k \leq N$, mit $p_{kk} > 0$ besitzt, aperiodisch ist.

Abgabe: Freitag, 17.07.2009, 12 Uhr, Postfach von F. Bergunde in V3-128