Universität Bielefeld **Wintersemester 2007/08**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 3

Aufgabe 1
Sei X die jährliche Milchleistung von Kühen (in Vielfachen von 100 Litern). Betrachten Sie die Stichprobe $x_1, x_2, ..., x_{100}$ von X aus der Vorlesung (vgl. Folienmaterial zu Histogramm und Stamm-Blatt-Diagramm auf der Homepage der Veranstaltung). Bestimmen Sie arithmetisches Mittel, Median und Modalwert der Stichprobe.

Aufgabe 2

a) Gegeben seien zwei Stichproben $x'_1, ..., , x'_m$ und $x''_1, ..., x''_n$ eines quantitativen Merkmals X. Die arithmetischen Mittel der Stichproben seien $\overline{x'}$ bzw. $\overline{x''}$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Fasst man diese beiden Stichproben zu einer Stichprobe zusammen, so gilt für das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der zusammengefassten Stichprobe:
$$\overline{x} = \frac{m}{m+n} \cdot \overline{x'} + \frac{n}{m+n} \cdot \overline{x''}$$

b) Wie lautet eine entsprechende Formel für das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der Stichprobe, die entsteht, wenn man k Stichproben der Umfänge $n_1, n_2, ..., n_k$ mit den arithmetischen Mitteln $\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, ..., \overline{x^{(k)}}$ zu einer Stichprobe zusammenfasst? ($k \in \mathbb{N}$)

c) Zur Erhebung der jährlichen Milchleistung von Kühen (in Vielfachen von 100 Litern) wird zu den Daten aus Aufgabe 1 eine weitere Stichprobe gezogen:

32,5	41,0	33,4	36,1	43,2	28,6	44,2	37,3	30,0	40,7	42,5	39,4
37,7	45,8	34,9	34,3	39,7	29,1	36,0	31,1	27,4	43,0	38,6	35,5
33,9	28,1	26,9	42,8	35,6	30,6	31,4	35,9	40,6	29,8	39,1	36,6

Bestimmen Sie das arithmetische Mittel dieser zweiten Stichprobe und dann das arithmetische Mittel aller Daten, d.h. das arithmetische Mittel der aus dieser und der Stichprobe aus Aufgabe 1 zusammengefügten Stichprobe.

Aufgabe 3 (α-getrimmtes Mittel)
Da das arithmetische Mittel $\overline{x}$ sehr anfällig für Ausreißer ist, wird häufig das sogenannte *α-getrimmte Mittel* $\overline{x}_\alpha$ der Stichprobe $x_1, ..., x_n$ eines quantitativen Merkmals betrachtet. Das α-getrimmte Mittel ist für den *Trimmungsanteil* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ definiert durch
$$\overline{x}_\alpha := \frac{1}{n-2k} \cdot \left(x_{(k+1)} + x_{(k+2)} + ... + x_{(n-k-1)} + x_{(n-k)}\right), \qquad \text{wobei} \qquad k := \lfloor n \cdot \alpha \rfloor.$$
Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

a) Beschreiben Sie, wie sich das α-getrimmte Mittel berechnet, und begründen Sie, warum das α-getrimmte Mittel gegenüber dem arithmetischen Mittel im Allgemeinen unanfälliger für Ausreißer ist.

b) Berechnen Sie die α-getrimmten Mittel der in Aufgabe 1 gegebenen Stichprobe für $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,125$.

c) Zeigen Sie, dass für jede Stichprobe $x_1, ..., x_n$ gilt: $\overline{x}_0 = \overline{x}$.

d) Zeigen Sie, dass bei jeder Stichprobe $x_1, ..., x_n$ das α-getrimmte Mittel $\overline{x}_\alpha$ für den größtmöglichen Trimmungsanteil, d.h. für den größten Wert für α, so dass der Nenner $n - 2k$ noch positiv ist, einen Median liefert.
(Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle ‚n gerade' und ‚n ungerade'!)

Abgabe: Mittwoch, 7.11.07, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren