

Übungen zur Vorlesung  
Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 7

**Aufgabe 1**

Gegeben seien die Ereignisse  $A, B$  und  $C$ . Geben Sie eine formale Beschreibung der nachfolgend in Worten beschriebenen Ereignisse:

- a) Nur  $A$  tritt ein
- b)  $A$  und  $B$  treten ein, aber  $C$  tritt nicht ein
- c) Alle drei Ereignisse treten ein
- d) Wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein
- e) Keines der Ereignisse tritt ein
- f) Genau eines der Ereignisse tritt ein

**Aufgabe 2**

Gegeben seien die Ereignisse  $A, B$  und  $C$ . Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten mithilfe einer vollständigen Fallunterscheidung.

- a)  $(A \cap B^c) \cup B = A \cup B$ .
- b)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  und  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Aufgabe 3**

Es sei  $\mathcal{E}$  eine Menge von Teilmengen einer Menge  $\Omega$ . Mit  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  bezeichnen wir die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die alle Mengen aus  $\mathcal{E}$  enthält (man kann leicht zeigen, dass eine solche  $\sigma$ -Algebra immer existiert!).

- a) Sei  $A$  eine Teilmenge von  $\Omega$  und  $\mathcal{E}$  bestehe nur aus der Menge  $A$ , d.h.  $\mathcal{E} = \{A\}$ . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

*(Hinweis: Sie müssen zeigen, dass die Menge auf der rechten Seite eine  $\sigma$ -Algebra ist, die  $A$  enthält und dass jede  $\sigma$ -Algebra, die  $A$  enthält, auch alle Mengen aus der Menge auf der rechten Seite enthält.)*

- b)\* Sei  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{E}$  bestehe aus allen halboffenen Intervallen  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ , mit  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{E})$  heißt *Borel- $\sigma$ -Algebra* über  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass alle einpunktigen Mengen  $\{x\}, x \in \mathbb{R}$ , in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  enthalten sind.

*(Hinweis: Schreiben Sie die einpunktige Menge  $\{x\}$  als abzählbaren Durchschnitt von halboffenen Intervallen.)*

- c)\* Eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  heißt *co-abzählbar*, wenn ihr Komplement  $\mathbb{R} \setminus A$  abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) ist.

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } A \text{ ist co-abzählbar}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$  ist und dass  $\mathcal{A}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra ist, die alle einpunktigen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  enthält. Stimmt  $\mathcal{A}$  mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  überein?

*\*Wenn Sie die Aufgabenteile b) und c) nicht vollständig lösen können, sollten Sie versuchen, zumindest Beweisideen zu entwickeln, d.h. notieren Sie das, was man zeigen müsste.*

**Abgabe: Mittwoch, 5.12.07, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren**