

Übungen zur Vorlesung Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 10

Aufgabe 1

- a) Wir werfen zweimal eine faire Münze. A bezeichne das Ereignis, dass im ersten Wurf Kopf fällt, und B das Ereignis, dass mindestens einmal Kopf geworfen wird. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Wahrscheinlichkeitsfunktion p an. Beschreiben Sie die Ereignisse A und B formal. Angenommen wir wissen, dass mindestens einmal Kopf geworfen worden ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann im ersten Wurf Kopf gefallen. Mit anderen Worten: Wie groß ist $P(A|B)$?
- b) Wir werfen einen fairen Würfel. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eine 3 zu würfeln, gegeben, dass das Würfelergebnis kleiner als 4 ist?
Hinweis: Führen Sie zunächst die relevanten Ereignisse ein!

Aufgabe 2

Wir wollen von der Stadt X in die Stadt Z fahren. Für diese Fahrt können wir einen Weg über die Stadt Y nehmen. Die Wahrscheinlichkeit, auf dem Weg von X nach Y in einen Unfall verwickelt zu werden ist 0,02. Die Wahrscheinlichkeit, in einen Unfall zwischen Y und Z zu geraten, unter der Bedingung, dass man zwischen X und Y keinen Unfall hatte, beträgt 0,03.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit, wird man auf dem Weg von X nach Z in einen Unfall verwickelt?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man Z unfallfrei?

Hinweis: Führen Sie zunächst die relevanten Ereignisse ein und formalisieren Sie die in dem Text gegebenen Daten!

Aufgabe 3

Betrachte das folgende dreistufige Zufallsexperiment:

Zunächst wird eine verfälschte Münze geworfen, bei der die Wahrscheinlichkeit für Kopf 55 % beträgt. Zeigt sie Kopf, so wird Glücksrad I gedreht, das aus drei Sektoren besteht, die rot, blau und gelb gefärbt sind. Der blaue und der rote Sektor sind jeweils genau halb so groß wie der gelbe. Fällt bei dem Münzwurf Zahl, so wird Glücksrad II gedreht, dessen Sektoren ebenfalls blau, rot und gelb gefärbt sind, bei dem aber alle drei Sektoren gleich groß sind. Bleibt das Glücksrad im blauen Sektor stehen, so wird eine faire Münze geworfen, bei der auf der einen Seite eine 1 und auf der anderen eine 2 steht. Bleibt das Glücksrad im roten (bzw. im gelben) Sektor stehen, so wird ein fairer vierseitiger Spielwürfel [Tetraeder] (bzw. im gelben Fall ein fairer sechseckiger Spielwürfel) geworfen. Das Ergebnis des gesamten Zufallsexperimentes ist die geworfene Zahl im letzten Schritt.

- a) Beschreiben Sie das Zufallsexperiment durch ein geeignetes Baumdiagramm!
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5, 6!
- c) Angenommen, im zweiten Schritt bleibt das Glücksrad im gelben Sektor stehen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im ersten Münzwurf Kopf gefallen?
- d) Angenommen, das Ergebnis am Ende lautet 3, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im ersten Wurf Kopf gefallen?

Die nachfolgenden Aufgaben sind Schulbüchern der 10. Klasse entnommen.

Aufgabe 4

Die Urne U_1 enthält zwei rote und drei weiße Kugeln, die Urne U_2 enthält vier rote und sieben weiße Kugeln. Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Aus dieser Urne wird dann zufällig eine Kugel gezogen. Sie ist rot. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde im ersten Schritt die Urne U_1 ausgewählt?

Aufgabe 5

Ein Lügendetektor wird zur Verbrechensaufklärung benutzt. Er ist zu 80 % zuverlässig, wenn ein Verdächtiger schuldig ist, und zu 90 % zuverlässig, wenn ein Verdächtiger unschuldig ist. Dieser Lügendetektortest wird nun bei einem Verdächtigten angewendet, für den der Richter aufgrund anderer Indizien die Wahrscheinlichkeit, dass er schuldig sei, auf 10 % schätzt. Dieser Verdächtige wird vom Lügendetektor als schuldig ausgewiesen. Wie wahrscheinlich ist es für den Richter, dass er dennoch unschuldig ist?

Aufgabe 6

Moderne Düsenflugzeuge verfügen über Bodennäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien hat sich Folgendes ergeben:

Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodennäherung vorliegt, dann schätzt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich *keine* ungeplante Bodennäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,002 % *falschen* Alarm.

Eine ungeplante Bodennäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsflurfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche ungeplante Bodennäherung zu erwarten.

- a) Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert?
- b) Was bedeutet das Ergebnis von a) psychologisch für die Piloten, die selbstverständlich jederzeit die Möglichkeit haben, die Bodennäherungswarnanlage abzuschalten?
- c) Auf welchen Wert müsste die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms von den genannten 0,002 % reduziert werden, damit es im Falle eines Alarms wenigstens wahrscheinlicher ist, dass eine ungeplante Bodennäherung vorliegt, als dass sie nicht vorliegt?

Aufgabe 7

In einer Stanzerie stellen drei Maschinen Stanzteile her. Maschine A liefert 25 % der Produktion, Maschine B 35 % und Maschine C 40 %. Ferner ist bekannt, dass Maschine A 6 % Ausschuss hat, Maschine B 3 % und Maschine C 1 %.

- a) Ein Stanzteil im Lager wird zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es defekt?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solches defektes Teil von Maschine A (von Maschine B, von Maschine C)?

Aufgabe 8

Eine Realschule nimmt alle Schüler auf, die von ihren Eltern angemeldet werden und von der Grundschule eine Realschulempfehlung erhalten haben. Angemeldete Schüler ohne Realschulempfehlung werden dann aufgenommen, wenn sie eine Aufnahmeprüfung bestehen.

Die Schule hat folgende Erfahrungen gemacht: 80 % der aufgenommenen Schüler haben eine Realschulempfehlung. Von diesen schließen 65 % die Realschule erfolgreich ab. Insgesamt erreichen 60 % aller aufgenommenen Schüler den Realschulabschluss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler, der die Realschule erfolgreich abschließt, seinerzeit keine Realschulempfehlung besaß?

Abgabe: Mittwoch, 09.01.08, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren

Ich wünsche Ihnen ein schönes Weihnachtsfest und alles Gute für 2008!