

Übungsklausur zur Vorlesung
Methoden der angewandten Mathematik
zugleich Blatt 12

Hinweise: Auf diesem Blatt sind mögliche Klausuraufgaben zusammengestellt, um Ihnen einen Eindruck möglicher Aufgabentypen zu vermitteln sowie weiteres Übungsmaterial zur Verfügung zu stellen. Dabei sollten Sie beachten, dass der Umfang der Klausur später der Klausurdauer von 90 Minuten angepasst sein wird und dass diese Übungsklausur nicht alle klausurrelevanten Inhalte umfasst. Die Aufgaben 7 bis 9 stellen die Aufgaben des aktuellen 12. Übungsblattes dar.

Aufgabe 1

In einer Messreihe werden die folgenden 18 Daten erhoben:

16, 34, 34, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 41, 42, 43, 47, 48, 55, 56, 60, 61

- a) Bestimmen Sie Modalwert, Median, oberes und unteres Quartil sowie das arithmetische Mittel der Stichprobe.
- b) Bestimmen Sie Spannweite, Quartilsabstand und Standardabweichung der Stichprobe.
- c) Stellen Sie die Stichprobe in einem Stengel-Blatt-Diagramm und in einem Box-Plot dar.

Aufgabe 2

- a) Ein vierseitiger Spielwürfel (Tetraeder) und ein gewöhnlicher fairer Würfel werden nacheinander geworfen. Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des Zufallsexperimentes (Ω, p) an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die Würfel zeigen bei beiden Würfeln dieselbe Augenzahl.
B: Die Würfel zeigen bei beiden Würfeln verschiedene Augenzahlen und ihre Summe ist 8.
C: Die Augensumme ist 5.
- b) Modifizieren Sie das Zufallsexperiment wie folgt: Fällt beim ersten Wurf eine 1, so werfen Sie beim zweiten Wurf erneut den Tetraederwürfel, anderenfalls werfen Sie beim zweiten Wurf mit dem gewöhnlichen fairen Würfel.
Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des modifizierten Zufallsexperimentes (Ω', p') an und bestimmen Sie erneut die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C.

Aufgabe 3

A und B seien Ereignisse. Beweisen Sie die folgende Gleichheit mit Hilfe einer vollständigen Fallunterscheidung:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap ((A \cap B)^C)$$

Aufgabe 4

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 10 Leichtathleten ein Team für eine 4×100 m - Staffel zusammenzustellen?
- b) Wie viele Worte der Länge 4 (zur Erklärung: Ein *Wort der Länge 4* ist eine Anordnung von vier Buchstaben unabhängig davon, ob diese Anordnung eine sprachliche Bedeutung hat) kann man aus den Buchstaben des Wortes M A T H E bilden, wenn
 - (a) jeder Buchstabe höchstens einmal auftreten darf,
 - (b) Buchstaben wiederholt werden dürfen,
 - (c) Vokale nicht direkt nebeneinander stehen dürfen?
- c) Ein Möbelhaus bietet als Sonderangebot ein 10er Paket Kerzen an, das man sich selbst aus verschiedenfarbigen Kerzen beliebig zusammenstellen kann. Man kann zwischen 4 Farben wählen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 5

Ein Automobilhersteller bezieht für seine Produktion ein Bauteil von drei verschiedenen Zuliefererfirmen A , B und C . Firma A liefert 20 %, Firma B 35 % und Firma C 45 % der für die Produktion notwendigen Menge dieses Bauteils. Alle Bauteile werden im Lager zunächst zwischengelagert. Ferner ist bekannt, dass die von Firma A gelieferten Bauteile zu 7 % defekt sind, die von Firma B zu 4 % und die von Firma C zu 2 %.

- Ein Bauteil im Lager wird zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es defekt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solches defektes Teil von Firma A (von B , von C)?

Aufgabe 6

Aus einem gut gemischten Rommeespiel (52 Karten, ohne Joker) wird eine Karte gezogen. Welche der folgenden Ereignisse sind voneinander unabhängig?

A : Es wurde eine Herzkarte gezogen. B : Es wurde eine Dame gezogen.

C : Es wurde kein Bild (= Bube, Dame oder König) gezogen.

Aufgabe 7

Eine Firma stellt Glühbirnen her. Es ist bekannt, dass das Unternehmen ca. 5 % Ausschuss produziert, d.h., ca. 5 % der produzierten Glühbirnen sind defekt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle zieht die Firma eine Stichprobe, indem sie an fünf aufeinander folgenden Tagen (zu einem zufälligen Zeitpunkt) jeweils eine Glühbirne der Produktion entnimmt. Sei X die zufällige Anzahl der defekten Glühbirnen in der gezogenen Stichprobe. Die Art und Weise, wie die Stichprobe entnommen wird, rechtfertigt die Annahme, dass X binomialverteilt ist. Berechnen

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
 - sich keine defekte Glühbirne in der Stichprobe befindet;
 - sich mindestens zwei defekte Glühbirnen in der Stichprobe befinden.
- Berechnen Sie die erwartete Anzahl defekter Glühbirnen in der Stichprobe. Wie groß ist die Varianz?

Aufgabe 8

Gegeben sei die Zufallsvariable Z mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung:

z	-1000	-0,5	0	1	2,5	e	π	10
$P(Z = z)$	0,01	0,2	0,04	0,15	0,2	0,001	0,3	0,099

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z .

(Hinweis: Bei Ihrer Lösung muss deutlich werden, wie Sie den Wert berechnet haben.)

Aufgabe 9

Durch

x	y	-5	-4	0	2	3
-10		0,01	0,025	0,02	0,015	0,03
1		0,07	0,175	0,14	0,105	0,21
10		0,02	0,05	0,04	0,03	0,06

sei die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und Y gegeben.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und von Y , indem Sie ihre Werte als letzte Spalte bzw. letzte Zeile in obiger Tabelle ergänzen.
- Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind oder nicht. Falls Sie zu dem Ergebnis kommen, dass die Zufallsvariablen abhängig sind: Wie müsste die gemeinsame Verteilung modifiziert werden, damit X und Y unabhängig sind?
- Berechnen Sie die Erwartungswerte von X ; Y ; $X + Y$; $X \cdot Y$ und X^2 .

Aufgabe 10

„Wahr“ oder „falsch“? Bitte kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
(1) Sind zwei Ereignisse A und B disjunkt, so sind sie auch unabhängig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(2) Das arithmetische Mittel einer Stichprobe geraden Umfangs kann nicht kleiner als das untere Quartil der Stichprobe sein.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(3) Gilt für ein Ereignis A , dass $P(A) = 0$, so gilt für alle Ereignisse B , dass A und B unabhängig sind.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(4) Für unabhängige Ereignisse A und B gilt: $P(A B) = P(B A)$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(5) Nimmt eine Zufallsvariable X nur positive Werte an, so gilt $\mathbb{E}(X) \geq 0$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(6) Der Median einer Stichprobe minimiert die mittlere absolute Abweichung	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Aufgabe 11

Sei X eine Zufallsvariable, die die Werte $1, 2, 3, 4, \dots$ annehmen kann. Beweisen Sie:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

(Hinweis: Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X = k)$ so in die erste, zweite, dritte, ... Zeile eines „Dreieckschemas“, dass gleiche Summanden untereinander stehen.)

Abgabe: Mittwoch, 23.1.2008, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren