

Übungen zur Vorlesung Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 14

Aufgabe 1

Die Zugriffe auf einen Zentralrechner (z.B. innerhalb einer Minute) soll unter den folgenden Annahmen modelliert werden:

Jedes der 1000 Terminals greift unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,003 (in einer Minute) einmal zu (mehrfache Zugriffe innerhalb einer Minute werden als zu unwahrscheinlich vernachlässigt). Es sei X die Anzahl der Zugriffe auf den Zentralrechner in einer festgelegten Minute.

- a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable X ?
- b) Sei A das Ereignis, dass höchstens 5 Zugriffe in der festgelegten Minute erfolgen, d.h. $A = \{X \leq 5\}$. Geben Sie eine exakte Formel für $P(A)$ an und berechnen Sie den Wert $P(A)$ approximativ! (Welchen Grenzwertsatz haben Sie verwendet und warum?)

Aufgabe 2

Das Brennen eines empfindlichen Keramikteils ist nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,5$ erfolgreich (unabhängig von dem Ergebnis beim Brennen anderer Teile). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 gebrannten Teilen zwischen 41 und 60 Stücke erfolgreich gebrannt sind. Geben Sie ein geeignetes Modell für diesen Zufallsvorgang und eine exakte Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an. Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit approximativ! (Welchen Grenzwertsatz haben Sie verwendet und warum?)

Aufgabe 3

Beweisen Sie die *allgemeine Markov-Ungleichung*:

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine monoton wachsende Funktion und X eine Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}(g(X))$ endlich ist. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$

$$P(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{g(c)}.$$

(Hinweis: Übertragen Sie den Beweis der Markov-Ungleichung aus der Vorlesung auf die hier vorliegende Situation!)

Dies ist das letzte Übungsblatt im Rahmen dieser Vorlesung, daher entfällt die Abgabe bei den Tutoren. Für Ihre Selbstkontrolle können Sie in der kommenden Woche auf der Homepage der Veranstaltung eine Lösungsskizze herunterladen. Ich wünsche allen eine schöne vorlesungsfreie Zeit und viel Erfolg bei anstehenden Prüfungen.