Universität Bielefeld **Wintersemester 2008/09**
G. Elsner

Methoden der angewandten Mathematik

Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Ableitungen

Funktionen zu $f_b(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$, heißen *Exponentialfunktionen*, b heißt in diesem Fall die *Basis* der Exponentialfunktion f_b.
Grundlegende Eigenschaften von Potenzen und somit auch von Exponentialfunktionen sind unter anderem, dass für $b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} b^{x+y} &= b^x \cdot b^y && \textit{(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)} \\ (b^x)^y &= b^{x \cdot y} \qquad \text{und} && b^0 = 1 \end{aligned}$$

Eine weitere herausragende Eigenschaft von Exponentialfunktionen ist, dass ihre Ableitungen wieder von der Form $c \cdot b^x$ für ein $c \in \mathbb{R}$ sind.

Definition:
Die Basis e, für die $f_e'(x) = e^x = f_e(x)$ gilt (d.h. für die die zugehörige Exponentialfunktion mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt), heißt *Eulersche Zahl*.

Für die Eulersche Zahl e gilt: $e \approx 2,718281828459045$. Die zugehörige Exponentialfunktion $f_e(x) = e^x$ heißt *e-Funktion*.

Exponentialfunktionen $f_b(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$, besitzen Umkehrfunktionen, nämlich die Logarithmusfunktionen $\log_b x$. Es gelten die sogenannten *Logarithmengesetze*:
Für $b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y), \log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$,
$\log_b(1) = 0$ und $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist, gilt ferner:

$$\text{Für } b > 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \log_b(b^x) = x \ \text{ und falls } x > 0 \text{ auch } b^{\log_b(x)} = x$$

Definition:
Der Logarithmus zur Basis e heißt *natürlicher Logarithmus* oder auch *logarithmus naturalis* und wird mit ln bezeichnet: $\ln x = \log_e x$. Die Umkehrfunktion der e-Funktion, nennt man entsprechend *natürliche Logarithmusfunktion*.

Weitere Darstellungen:
Die e-Funktion und der natürliche Logarithmus lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} && \textit{Exponentialreihe} \\ \ln x &= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\ x>0 \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ |x|<1 && \textit{Logarithmusreihe} \end{aligned}$$

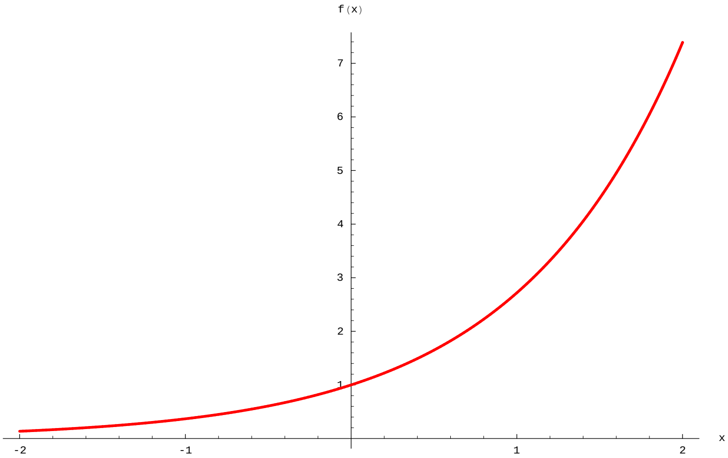
Ableitungen:

1. Für die Ableitung der Exponentialfunktion zu $f_b(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$, gilt:
$$f_b'(x) = \ln b \cdot b^x.$$
2. Für die Ableitung von Logarithmusfunktionen gilt $\big(\log_b(x)\big)' = \frac{1}{(\ln b)\cdot x}$.
Insbesondere ist $\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$.

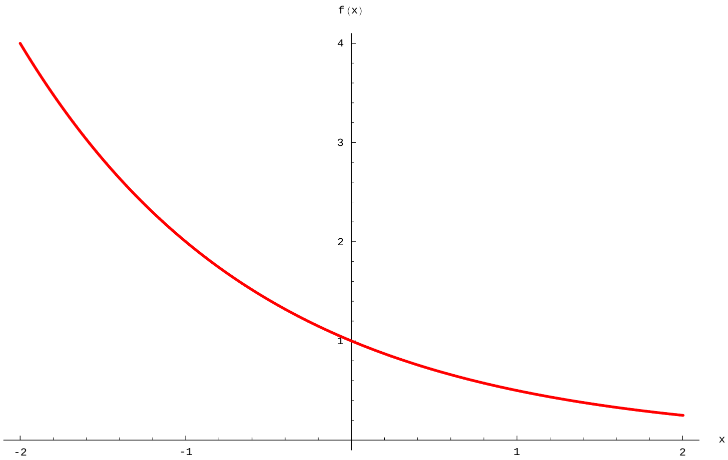
Beweis von 1.: Es gilt $f_b(x) = b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{\ln b\cdot x}$. Mit der Kettenregel folgt dann aus $(e^x)' = e^x$, dass $f_b'(x) = \ln b \cdot b^x$. □

Graphen:

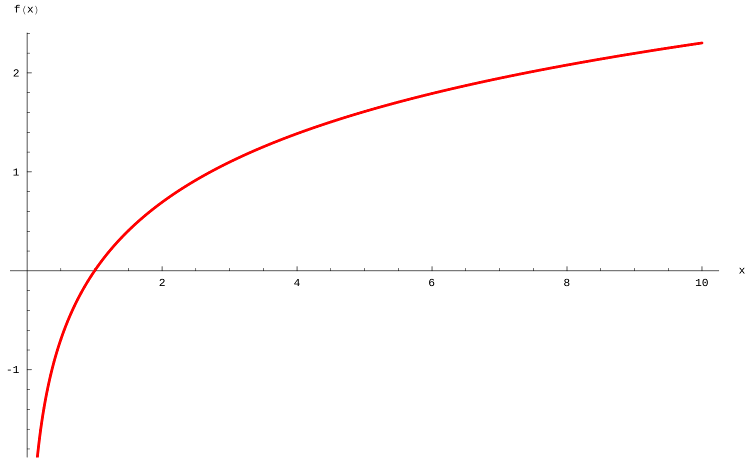
$f(x) = e^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$f(x) = \ln(x)$



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$