

Übungen zur Vorlesung Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 3

Aufgabe 1

Die unten stehenden Werte sind Druckfestigkeiten (in $0,1 \text{ N/mm}^2$), welche an 30 Betonwürfeln ermittelt wurden.

374	358	341	355	342	334	353	346	355	344
349	330	352	328	336	359	361	345	324	386
335	371	358	328	353	352	366	354	378	324

(aus: H. Riedwyl: Angew. math. Statistik in Wissenschaft, Administration und Technik, 1978)

- Fertigen Sie ein geeignetes Histogramm und Stamm-Blatt-Diagramm zu diesen Daten an.
- Bestimmen Sie arithmetisches Mittel, Median und Modalwert der Stichprobe.
- Bestimmen Sie das untere Quartil und das 90%-Quantil der Stichprobe.
- Bestimmen Sie die Spannweite, den Quartilsabstand, den 10%-Quantilsabstand und die Medianabweichung der Stichprobe.
- Bestimmen Sie die mittlere absolute Abweichung vom Median und vom arithmetisches Mittel.
- Bestimmen Sie die empirische Varianz und Standardabweichung der Stichprobe.
- Wie groß kann der Median der oben genannten Daten höchstens werden, wenn beliebige 4 der 30 Werte verzehnfacht werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

- Gegeben seien zwei Stichproben x'_1, \dots, x'_m und x''_1, \dots, x''_n eines quantitativen Merkmals X . Die arithmetischen Mittel der Stichproben seien \bar{x}' bzw. \bar{x}'' . Beweisen Sie die folgende Aussage: Fasst man diese beiden Stichproben zu einer Stichprobe zusammen, so gilt für das arithmetische Mittel \bar{x} der zusammengefassten Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{m}{m+n} \cdot \bar{x}' + \frac{n}{m+n} \cdot \bar{x}''$$

- Wie lautet eine entsprechende Formel für das arithmetische Mittel \bar{x} der Stichprobe, die entsteht, wenn man k Stichproben der Umfänge n_1, n_2, \dots, n_k mit den arithmetischen Mitteln $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ zu einer Stichprobe zusammenfasst? ($k \in \mathbb{N}$)
- Zur Erhebung der Druckfestigkeiten (in $0,1 \text{ N/mm}^2$) wird zu den Daten aus Aufgabe 1 eine weitere Stichprobe gezogen:

325	380	334	361	398	352	344	373	306	367	333	333
377	342	349	343	385	371	360	328	337	355	386	355
339	348	369	361	356	326	353	359	369	327	341	366

Bestimmen Sie das arithmetische Mittel dieser zweiten Stichprobe und dann das arithmetische Mittel aller Daten, d.h. das arithmetische Mittel der aus dieser und der Stichprobe aus Aufgabe 1 zusammengeführten Stichprobe.

Aufgabe 3 (α -getrimmtes Mittel)

Da das arithmetische Mittel \bar{x} sehr anfällig für Ausreißer ist, wird häufig das sogenannte α -getrimmte Mittel \bar{x}_α der Stichprobe x_1, \dots, x_n eines quantitativen Merkmals betrachtet. Das α -getrimmte Mittel ist für den *Trimmungsanteil* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ definiert durch

$$\bar{x}_\alpha := \frac{1}{n - 2k} \cdot (x_{(k+1)} + x_{(k+2)} + \dots + x_{(n-k-1)} + x_{(n-k)}), \quad \text{wobei} \quad k := \lfloor n \cdot \alpha \rfloor.$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x .

- a) Beschreiben Sie, wie sich das α -getrimmte Mittel berechnet, und begründen Sie, warum das α -getrimmte Mittel gegenüber dem arithmetischen Mittel im Allgemeinen unanfälliger für Ausreißer ist.
- b) Berechnen Sie die α -getrimmten Mittel der in Aufgabe 1 gegebenen Stichprobe für $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,125$.
- c) Zeigen Sie, dass für jede Stichprobe x_1, \dots, x_n gilt: $\bar{x}_0 = \bar{x}$.
- d) Zeigen Sie, dass bei jeder Stichprobe x_1, \dots, x_n das α -getrimmte Mittel \bar{x}_α für den größtmöglichen Trimmungsanteil, d.h. für den größten Wert für α , so dass der Nenner $n - 2k$ noch positiv ist, einen Median liefert.
(Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle ‚ n gerade‘ und ‚ n ungerade‘!)

Abgabe: Mittwoch, 5.11.07, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128