Universität Bielefeld **Wintersemester 2008/09**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 6

Aufgabe 1
Gegeben seien die Ereignisse A, B und C. Geben Sie eine formale Beschreibung der nachfolgend in Worten beschriebenen Ereignisse:

a) Nur A tritt ein.
b) A und B treten ein, aber C tritt nicht ein.
c) Wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein.
d) Genau eines der Ereignisse tritt ein.

Aufgabe 2
Gegeben seien die Ereignisse A, B und C. Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten mithilfe einer vollständigen Fallunterscheidung.

a) $\big(A \cap B^c\big) \cup B = A \cup B.$
b) $\big(A \cup B\big)^c = A^c \cap B^c$
c) $A \cap (B \cup C) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)$

Aufgabe 3
Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachten Sie die folgenden Teilmengen:

$$A := \{1, 2, 3\}; \qquad B := \{3, 4\}.$$

Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω, die die beiden Teilmengen A und B enthält.

Aufgabe 4
Es sei $\mathcal{E}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge Ω. Mit $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra über Ω, die alle Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält (man kann leicht zeigen, dass eine solche σ-Algebra immer existiert!).

a) Sei A eine Teilmenge von Ω und $\mathcal{E}$ bestehe nur aus der Menge A, d.h. $\mathcal{E} = \{A\}$. Zeigen Sie, dass gilt:
$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$
(Hinweis: Sie müssen zeigen, dass die Menge auf der rechten Seite eine σ-Algebra ist, die A enthält und dass jede σ-Algebra, die A enthält, auch alle Mengen aus der Menge auf der rechten Seite enthält.)

b)* Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E}$ bestehe aus allen halboffenen Intervallen $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Die σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{E})$ heißt *Borel*-σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, in der σ-Algebra $\mathcal{B}$ enthalten sind.
(Hinweis: Schreiben Sie die einpunktige Menge $\{x\}$ als abzählbaren Durchschnitt von halboffenen Intervallen.)

c)* Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *co-abzählbar*, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) ist.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } A \text{ ist co-abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist und dass $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.
Stimmt $\mathcal{A}$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ überein?

* *Wenn Sie die Aufgabenteile b) und c) nicht vollständig lösen können, sollten Sie versuchen, zumindest Beweisideen zu entwickeln, d.h. notieren Sie das, was man zeigen müsste.*

Abgabe: Mittwoch, 26.11.08, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128