Universität Bielefeld **Wintersemester 2008/09**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 8

Aufgabe 1
Bei dem Spiel *MasterMind* spielt eine Person gegen den Spielleiter. Der Spielleiter kann in einer Reihe mit 4 freien Plätzen verdeckt farbige Spielsteine platzieren. Dabei kann er aus 6 veschiedenen Farben auswählen. Der Spieler versucht, die Farbkonstellation zu erraten. Nach jedem Rateversuch teilt der Spielleiter dem Spieler mit, wie viele richtige Farben er genannt hat und wie viele davon er auch schon an der richtigen Stelle genannt hat. Ziel des Spiel ist es, dass der Spieler durch systematisches Raten möglichst rasch die gewählte Farbkombination errät. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät der Spieler bereits beim ersten Versuch richtig, wenn

a) *alle* Plätze mit *verschiedenenfarbigen* Spielsteinen gefüllt werden müssen?

b) *alle* Plätze gefüllt werden müssen, aber Farben *mehrfach* benutzt werden dürfen?

c) *genau eine* Lücke (d.h. einen Platz ohne Spielstein) zulassen, aber *keine* Farbwiederholungen?

d) *beliebig viele* Lücken, aber *keine* Farbwiederholungen zulassen?

Aufgabe 2
Beim Lotto „5 aus 42" werden aus einer Lostrommel (Urne) nacheinander fünf der von 1 bis 42 numerierten Kugeln als Gewinnzahlen und anschließend eine als Zusatzzahl gezogen. Auf einem Lottozettel müssen 5 Zahlen durch Ankreuzen erraten werden. Die gezogenen Kugeln werden nicht in die Trommel zurückgelegt und die Reihenfolge der gezogenen Zahlen bleibt unberücksichtigt.

a) Wie viele Möglichkeiten der Ziehung gibt es?
Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse I („5 Richtige")?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse II („4 Richtige mit Zusatzzahl"), für die Gewinnklasse III („4 Richtige"), für „3 Richtige mit Zusatzzahl" und für gar keinen Gewinn (d.h. weniger als 3 Richtige)!

Aufgabe 3
Beweisen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Interpretieren Sie diese Formel kombinatorisch!

Aufgabe 4
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Beweisen Sie die sogenannte *Einschluss-Ausschluss-Formel* für drei Ereignisse A, B und C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Hinweis: Betrachten Sie das Ereignis $D := B \cup C$ und verwenden Sie mehrfach die in der Vorlesung bewiesene Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von der Vereinigung zweier Ereignisse!

Wie müsste eine Einschluss-Ausschluss-Formel für n Ereignisse $A_1, ..., A_n$ aussehen. Stellen Sie eine Vermutung auf.

Abgabe: Mittwoch, 10.12.08, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128