Universität Bielefeld **Wintersemester 2008/09**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 10

Aufgabe 1
Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-10	-0,75	0	1	2,5	3	π	10
$P(X = x)$	0,02	0,19	0,03	0,16	0,25	0,001	0,25	0,099

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 2
Durch

x \ y	-5	-4	0	2	3
-10	0,01	0,025	0,02	0,015	0,03
1	0,07	0,175	0,14	0,105	0,21
10	0,02	0,05	0,04	0,03	0,06

sei die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und Y gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und von Y, indem Sie ihre Werte als letzte Spalte bzw. letzte Zeile in obiger Tabelle ergänzen.

b) Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind oder nicht. Falls Sie zu dem Ergebnis kommen, dass die Zufallsvariablen abhängig sind: Wie müsste die gemeinsame Verteilung modifiziert werden, damit X und Y unabhängig sind?

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

Aufgabe 3
Eine Firma stellt Glühbirnen her. Es ist bekannt, dass das Unternehmen ca. 5 % Ausschuss produziert, d.h., ca. 5 % der produzierten Glühbirnen sind defekt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle zieht die Firma eine Stichprobe, indem sie an fünf aufeinander folgenden Tagen (zu einem zufälligen Zeitpunkt) jeweils eine Glühbirne der Produktion entnimmt. Sei X die zufällige Anzahl der defekten Glühbirnen in der gezogenen Stichprobe. Die Art und Weise, wie die Stichprobe entnommen wird, rechtfertigt die Annahme, dass X binomialverteilt ist. Berechnen

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- sich keine defekte Glühbirne in der Stichprobe befindet;
- sich mindestens zwei defekte Glühbirnen in der Stichprobe befinden.

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl $\mathbb{E}(X)$ defekter Glühbirnen in der Stichprobe.

Aufgabe 4 (*St. Petersburg Paradoxon*)
Betrachte das folgende Glücksspiel: Man wirft eine faire Münze so lange, bis das erste Mal 'Kopf' fällt. Geschieht dies beim ersten, zweiten, dritten, ..., n-ten, ... Wurf erhält man 2 €, 4 €, 8 €,..., 2^n €, ... Es bezeichne X die ZV, die den Gewinn aus dem Glücksspiel angibt.

a) Geben Sie die Verteilung von X an.

b) Wie viel wären Sie bereit als Einsatz für dieses Spiel zu zahlen? Notieren Sie zunächst diese Zahl und vergleichen Sie sie anschließend mit dem zu erwartenden Gewinn, d.h. mit $\mathbb{E}(X)$.

Aufgabe 5
Durch die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen gegeben, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$p_k \geq 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Zeigen Sie, dass durch die im Folgenden beschriebenen Folgen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist:

a) *Binomialverteilung:* Für $0 \leq p \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ setze

$$p_k := \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{für } k \in \{0, 1, ..., n\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) *Geometrische Verteilung:* Für $0 < p \leq 1$ setze

$$p_k := \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, & \text{für } k = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an den Grenzwert der geometrischen Reihe!

c) *Poisson-Verteilung:* Für $\lambda > 0$ setze

$$p_k := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Hierbei bezeichnet e die *Eulersche Zahl* und e^x die Exponentialfunktion zur Basis e (oder auch kurz e-Funktion). Eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften von Exponentialfunktionen finden Sie auf der Homepage zu der Vorlesung.

Aufgabe 6 (*eine letzte, weihnachtliche und teilweise nicht ganz einfache Aufgabe*)
Vier Studentinnen (oder Studenten - das Geschlecht spielt für die Aufgabe keine Rolle!) entscheiden sich, zu Weihnachten zu wichteln. Alle schreiben den eigenen Namen auf einen Zettel und stecken diesen Zettel in eine Mütze. Anschließend zieht jede einen Zettel aus der Mütze und muss derjenigen, deren Namen sie gezogen hat, ein Wichtelgeschenk schenken. Damit jede ein Geschenk erhält, wird ohne Zurücklegen der Zettel gezogen. Damit niemand sich selbst beschenken muss, wiederholt man die gesamte Ziehung so lange, bis eine *gültige Wichtelziehung* vorliegt, d.h. eine Ziehung, bei der alle einen fremden Namen gezogen haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt bereits beim ersten Versuch eine gültige Wichtelziehung? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit bei 5 Studentinnen? Wie groß bei n Studentinnen?

Hinweis: Zählen Sie direkt oder machen Sie sich auf die Suche nach einer Formel für die Wahrscheinlichkeit aus der Menge aller Permutationen eine ,,fixpunktfreie Permutation" zu ziehen. Hierbei könnte Ihnen die Einschluss-Ausschluss-Formel behilflich sein.

Abgabe: Mittwoch, 07.01.09, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Ich wünsche Ihnen schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!