Universität Bielefeld
G. Elsner **Wintersemester 2008/09**

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 11

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X aus Aufgabe 1, Blatt 10.

Aufgabe 2
Betrachten Sie X und Y aus Aufgabe 2, Blatt 10.

a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X+Y)$ und $\mathbb{E}(X \cdot Y)$.

b) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

c) Berechnen Sie die Varianzen $V(X), V(Y)$ und $V(X+Y)$.

Aufgabe 3
Betrachten Sie die Situation in Aufgabe 3 auf Blatt 10.

a) Bestimmen Sie die Varianz von X.

b) Wir nehmen nun an, dass die Firma jeden Tag (und nicht nur an fünf aufeinander folgenden Tagen) eine Glühbirne zur Kontrolle entnimmt. Sei T die Anzahl Tage, bis das erste Mal eine defekte Glühbirne entnommen wird. Welcher Wert ist für T im Mittel zu erwarten? Wie groß ist die Varianz von T?

Aufgabe 4
Eine Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 3 und die Varianz 0. Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5
Es sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Varianz von X folgendes gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad\qquad V(X) = \lambda.$$

(Hinweis: Sie sollten sich an die Reihendarstellung der Funktion e^x *erinnern und für die Berechnung der Varianz können Sie wie in der Vorlesung bei der geometrischen Verteilung vorgehen und zunächst* $\mathbb{E}\big(X \cdot (X-1)\big)$ *berechnen. Vielleicht finden Sie ja auch etwas in der Literatur.)*

Die folgende Aufgabe ist etwas für diejenigen, die sich für besondere (Gegen-)Beispiele interessieren (die Welt ist nicht immer ganz einfach ...).

Aufgabe 6

a) Die Zufallsvariable Y besitzt die Verteilung

$$P(Y=k) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}, & \text{für } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (\star)$$

Zeigen Sie, dass durch $(\star)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist und dass $\mathbb{E}(Y)$ nicht existiert, d.h. dass die Summe $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} k \cdot P(Y=k)$ nicht wohldefiniert ist.

b) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergiert und der Wert der Reihe sei mit $c \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnet. Somit ist durch

$$P(Z = k) = \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{k^3}, & \text{für } k = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

offensichtlich die Verteilung einer Zufallsvariablen Z gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(Z)$ endlich ist und dass $V(Z) = +\infty$ gilt.

Hinweis: Sie sollten (ohne Beweis) die Formel von Euler

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ *benutzen!*

Abgabe: Mittwoch, 14.01.09, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128