Universität Bielefeld **Wintersemester 2008/09**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 12

Aufgabe 1

a) Eine faire Münze wird 10000 Mal in unabhängiger Folge geworfen. Die Zufallsvariable X sei dabei die Anzahl der Würfe, in denen 'Kopf' gefallen ist. Geben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten approximativ an:

$(i)\ P(4900 \leq X \leq 5100) \qquad (ii)\ P(X \leq 5800)$

b) Es sei Y eine standardnormalverteilte Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass sich alle interessierenden Wahrscheinlichkeiten durch die *positiven* Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ ausdrücken lassen (Aus diesem Grund sind in vielen Tabellen auch nur die Werte von Φ für positive reelle Zahlen abgedruckt!), indem Sie folgende Gleichheiten für positive reelle Zahlen x und y mithilfe Ihres Wissen über Integralrechnung begründen:

$$P(Y \geq x) = 1 - \Phi(x); \qquad P(-x \leq Y \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2 \cdot \Phi(x) - 1;$$
$$P(Y \leq -x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x); \qquad P(-y \leq Y \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-y) = \Phi(x) + \Phi(y) - 1$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$ *(wie können Sie diese Gleichheit interpretieren?) gilt. Beachten Sie außerdem die Symmetrie der Gaußschen Glockenkurve.*

Aufgabe 2

Die Zugriffe auf einen Zentralrechner (z.B. innerhalb einer Minute) soll unter den folgenden Annahmen modelliert werden:
Jedes der 1000 Terminals greift unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,003 (in einer Minute) einmal zu (mehrfache Zugriffe innerhalb einer Minute werden als zu unwahrscheinlich vernachlässigt). Es sei X die Anzahl der Zugriffe auf den Zentralrechner in einer festgelegten Minute.

a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable X?

b) Sei A das Ereignis, dass höchstens 5 Zugriffe in der festgelegten Minute erfolgen, d.h. $A = \{X \leq 5\}$. Geben Sie eine exakte Formel für $P(A)$ an und berechnen Sie den Wert $P(A)$ approximativ!
(Welchen Grenzwertsatz haben Sie verwendet und warum?)

Aufgabe 3

Sie bekommen eine Münze vorgelegt, von der behauptet wird, sie sei fair. Sie wollen diese Behauptung überprüfen und werfen die Münze 1000 Mal. Dabei erscheint 608 Mal Kopf. Geben Sie mittels der Chebyshev-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit für Kopf um mindestens 0,1 von der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ abweicht. Wie beurteilen Sie auf der Basis dieses Ergebnisses, die Aussage „Die Münze ist fair"?
Hinweis: Erinnern Sie sich an den Beweis des Gesetzes der großen Zahlen.

Aufgabe 4

Sehen Sie noch einmal alle Übungsaufgaben aus der Vorlesung durch und suchen Sie sich eine aus, die Sie in dem Tutorium gerne noch einmal besprochen haben wollen. Notieren Sie eine Lösung dieser Aufgabe und/oder Ihre Fragen.
Hinweis: Dies ist der letzte Zettel, der sich auf die aktuellen Inhalte der Vorlesung bezieht. Der nächste und allerletzte Zettel ist dann eine Art 'Übungsklausur'.

Abgabe: Mittwoch, 21.01.09, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Veranstaltungshinweis:

Die Gleichstellungskommission der Fakultät für Mathematik lädt alle Interessierten zum **Tag der Berufspraxis von Mathematikerinnen** am **23.Januar 2009 ab 14.15 in V3-201** ein. Drei Mathematikerinnen werden zunächst über ihren beruflichen Werdegang berichten und stehen danach in gemütlicher Runde zur Beantwortung von Fragen zur Verfügung.