

**Übungsklausur zur Vorlesung**  
**Methoden der angewandten Mathematik**  
zugleich Blatt 13

*Hinweise: Auf diesem Blatt sind mögliche Klausuraufgaben zusammengestellt, um Ihnen einen Eindruck möglicher Aufgabentypen zu vermitteln sowie weiteres Übungsmaterial zur Verfügung zu stellen. Dabei sollten Sie beachten, dass der Umfang der Klausur später der Klausurdauer von 90 Minuten angepasst sein wird und dass diese Übungsklausur nicht alle klausurrelevanten Inhalte umfasst.*

**Aufgabe 1**

In einer Messreihe werden die folgenden 18 Daten erhoben:

16, 34, 34, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 41, 42, 43, 47, 48, 55, 56, 60, 61

- a) Bestimmen Sie Modalwert, Median, oberes und unteres Quartil sowie das arithmetische Mittel der Stichprobe.
- b) Bestimmen Sie Spannweite, Quartilsabstand und Standardabweichung der Stichprobe.
- c) Stellen Sie die Stichprobe in einem Stengel-Blatt-Diagramm und in einem Box-Plot dar.

**Aufgabe 2**

Ein vierseitiger Spielwürfel (Tetraeder) und ein gewöhnlicher fairer Würfel werden nacheinander geworfen. Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des Zufallsexperimentes  $(\Omega, \mathcal{P})$  an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- A: Die Würfel zeigen bei beiden Würfeln dieselbe Augenzahl.  
B: Die Würfel zeigen bei beiden Würfeln verschiedene Augenzahlen und ihre Summe ist 8.  
C: Die Augensumme ist 5.

**Aufgabe 3**

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 10 Leichtathleten ein Team für eine  $4 \times 100$  m - Staffel zusammenzustellen?
- b) Wie viele Worte der Länge 4 (zur Erklärung: Ein *Wort der Länge 4* ist eine Anordnung von vier Buchstaben unabhängig davon, ob diese Anordnung eine sprachliche Bedeutung hat) kann man aus den Buchstaben des Wortes M A T H E bilden, wenn
  - (a) jeder Buchstabe höchstens einmal auftreten darf,
  - (b) Buchstaben wiederholt werden dürfen,
  - (c) Vokale nicht direkt nebeneinander stehen dürfen?
- c) Ein Möbelhaus bietet als Sonderangebot ein 10er Paket Kerzen an, das man sich selbst aus verschiedenfarbigen Kerzen beliebig zusammenstellen kann. Man kann zwischen 4 Farben wählen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

**Aufgabe 4**

Ein Waschmaschinenhersteller bezieht für seine Produktion Waschmaschinenmotoren von drei verschiedenen Zuliefererfirmen A, B und C. Firma A liefert 25 %, Firma B 30 % und Firma C 45 % der für die Produktion notwendigen Menge von Motoren. Alle Motoren werden im Lager zunächst zwischengelagert. Ferner ist bekannt, dass die von Firma A gelieferten Motoren zu 4% defekt sind, die von Firma B zu 6 % und die von Firma C zu 2 %.

- a) Ein Motor im Lager wird zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er defekt?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solcher defekter Motor von Firma C?

### Aufgabe 5

Durch

x	y	-10	0	1	3
-3		0,01	0,025	0,02	0,045
1		0,07	0,175	0,14	0,315
5		0,02	0,05	0,04	0,09

sei die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gegeben.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X$  und von  $Y$ , indem Sie ihre Werte als letzte Spalte bzw. letzte Zeile in obiger Tabelle ergänzen.
- Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unabhängig sind oder nicht. Falls Sie zu dem Ergebnis kommen, dass die Zufallsvariablen abhängig sind: Wie müsste die gemeinsame Verteilung modifiziert werden, damit  $X$  und  $Y$  unabhängig sind?
- Berechnen Sie die Erwartungswerte von  $X$ ;  $Y$ ;  $X + Y$ ;  $X \cdot Y$  und  $X^2$ .
- Berechnen Sie die Varianz von  $X$ ;  $Y$  und  $X + Y$ .

### Aufgabe 6

Von einem Fahrstuhl ist bekannt, dass er pro Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,3 % ausfällt (Mehrfache Ausfälle pro Tag werden als zu unwahrscheinlich vernachlässigt!).

- Sei  $X$  die zufällige Anzahl der Ausfälle des Fahrstuhls in einer Woche (= 7 Tage). Die Art und Weise, wie Ausfälle auftreten, rechtfertigt die Annahme, dass  $X$  binomialverteilt ist.
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
    - der Fahrstuhl in einer Woche gar nicht ausfällt;
    - der Fahrstuhl in einer Woche mehr als ein Mal ausfällt.
  - Berechnen Sie die erwartete Anzahl Ausfälle pro Woche. Wie groß ist die Varianz?
- Sei  $Y$  die zufällige Anzahl der Fahrstuhlausfälle, die in fünf Jahren (1 Jahr = 365 Tage) zu verzeichnen sind. Auch hier darf angenommen werden, dass  $Y$  binomialverteilt ist. Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrstuhl in fünf Jahren höchstens zweimal ausfällt.

### Aufgabe 7

„Wahr“ oder „falsch“? Bitte kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch sind.

- |  | wahr                  | falsch                |
|--|-----------------------|-----------------------|
| (1) Sind zwei Ereignisse $A$ und $B$ disjunkt, so sind sie auch unabhängig.  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| (2) Das arithmetische Mittel einer Stichprobe geraden Umfangs kann nicht kleiner als das untere Quartil der Stichprobe sein. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| (3) Gilt für ein Ereignis $A$ , dass $P(A) = 0$ , so gilt für alle Ereignisse $B$ , dass $A$ und $B$ unabhängig sind.        | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| (4) Für unabhängige Ereignisse $A$ und $B$ gilt: $P(A B) = P(B A)$   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| (5) Nimmt eine Zufallsvariable $X$ nur positive Werte an, so gilt $\mathbb{E}(X) \geq 0$                                     | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| (6) Der Median einer Stichprobe minimiert die mittlere absolute Abweichung   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

### Aufgabe 8

- Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $V(X) \leq V(Y) < +\infty$ . Dann gilt: Die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  ist immer kleiner gleich  $V(Y)$ .

- Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die die Werte 1, 2, 3, 4, ... annehmen kann. Beweisen Sie:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

(Hinweis: Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  als Summe von Wahrscheinlichkeiten der Form  $P(X = k)$  so in die erste, zweite, dritte, ... Zeile eines „Dreieckschemas“, dass gleiche Summanden untereinander stehen.)

**Abgabe: Mittwoch, 28.1.2009, 11.00 Uhr, Postfächer der Tutoren**