Beh.: $f(c) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - c|$ wird genau dann minimal, wenn $c \in \mathbb{R}$ ein Median ist.

Beweis: Wir betrachten nur $c < x_{0,5}$ ($c > x_{0,5}$ geht analog!)

Zu zeigen: $f(c) \geq f(x_{0,5})$ für alle $c \in \mathbb{R}$

Für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$|x_i - x_{0,5}| - |x_i - c| = \begin{cases} x_{0,5} - c, & \text{falls } x_i \leq c \ (< x_{0,5}) \\ x_{0,5} + c - 2x_i, & \text{falls } c < x_i < x_{0,5} \\ c - x_{0,5}, & \text{falls } (c <) \ x_{0,5} \leq x_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_{0,5}) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - x_{0,5}| - |x_i - c| \right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq c}}^{n} (x_{0,5} - c) + \sum_{\substack{i=1 \\ c < x_i < x_{0,5}}}^{n} \underbrace{(x_{0,5} + c - 2x_i)}_{= (x_{0,5} - c) + 2(c - x_i)} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \geq x_{0,5}}}^{n} (c - x_{0,5})$$

$$= (x_{0,5} - c) \cdot \#\{i \mid x_i < x_{0,5}\} + \sum_{\substack{i=1 \\ c < x_i < x_{0,5}}}^{n} 2(c - x_i) + (c - x_{0,5}) \cdot \#\{i \mid x_i \geq x_{0,5}\}$$

$$= \underbrace{(c - x_{0,5})}_{< 0} \cdot \underbrace{\left(\#\{i \mid x_i \geq x_{0,5}\} - \#\{i \mid x_i < x_{0,5}\} \right)}_{\geq 0, \text{ nach } (1)} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ c < x_i < x_{0,5}}}^{n} 2 \cdot (c - x_i)}_{\leq 0}$$

Insgesamt: $f(x_{0,5}) \leq f(c)$

$\square$