Satz (Gesetz der großen Zahlen)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ paarweise unabhängige ZV mit demselben Erwartungswert μ und derselben endlichen Varianz σ^2.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Beweis:

Es gilt: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=\mu} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

Aus der Chebyshev-Ungleichung folgt somit für $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i gilt:

$$V(X) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i)}_{=\sigma^2} = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Insgesamt:

$$0 \leq P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sigma^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Folgerung: Ein Experiment werde n-mal unabhängig durchgeführt. Für ein Ereignis A sei X_i der Indikator für A im i-ten Versuch, d.h.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ im } i\text{-ten Versuch eintritt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für die relative Häufigkeit $X := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ für jedes $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - P(A)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Beweis der Folgerung:

Da die Versuche unabhängig durchgeführt worden sind, sind die ZV X_i unabhängig. Ferner gilt:

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c)$$
$$= P(A)$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = P(A) - P(A)^2$$
$$= P(A)(1 - P(A))$$

Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt jetzt die Beh. $\boxtimes$

Satz (Poissonscher Grenzwertsatz)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli-Variablen mit $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$ und p sei so klein, dass $n \cdot p = \lambda$ gelte. Dann gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

d.h. die binomialverteilte ZV $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist für großes n und kleines p annähernd Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda = n \cdot p$.

Beweis: $$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda}}$$

$\Rightarrow$ Beh.