Zusammenfassung Zentraler Grenzwertsatz

- Eine ZV Y mit $P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (a \leq b)$ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ heißt <u>standardnormalverteilt</u>. φ heißt <u>Gaußsche φ-Funktion</u>; der Graph von φ heißt <u>Gaußsche Glockenkurve</u>. Das Integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ kann nicht elementar berechnet werden, allerdings liegen die Werte von der <u>Gaußschen Integralfunktion</u> $\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx$ in Tabellenform vor und es gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

- Zu einer ZV X bezeichnet $\frac{X - E(X)}{V(X)}$ die Standardisierung von X.

- <u>Zentraler Grenzwertsatz für binomialverteilte ZV</u>:

  Ist X binomialverteilt zu den Parametern n und p, so ist die Standardisierung von X gegeben durch $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Die Standardisierung von X ist für großes n annähernd standardnormalverteilt, es gilt nämlich

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Beispiel:

Das Brennen eines Keramikteils ist nur in der Hälfte aller Fälle erfolgreich (unabhängig vom Ergebnis beim Brennen anderer Teile)

Frage: Wie groß ist die W.keit bei 100 gebrannten Teilen, dass zwischen 41 und 60 Teile erfolgreich gebrannt worden sind?

Sei X die Anzahl der erfolgreich gebrannten Teile, dann ist X binomialverteilt zu den Parametern $n = 100$ und $p = 1/2$

Somit gilt für die gesuchte W.keit:

$$P(41 \le X \le 60) = P\left(\frac{41 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \le \frac{X - np}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \le \frac{60 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{9}{5} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{10}{5}\right)$$

$$\underset{\text{Zentraler Grenzwertsatz}}{\approx} \Phi(2) - \Phi\left(-\frac{9}{5}\right) \underset{\text{Tabelle}}{=} 0{,}9772 - 0{,}0359$$

$$= 0{,}9413$$