X ZV mit Werten $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$

Y ZV mit Werten $y_1, \dots, y_j, \dots, y_m$

Gemeinsame Verteilung von X und Y

$X \backslash Y$	y_1 ... y_j ... y_m	$P(X=\cdot)$
x_1	$\vdots$	
$\vdots$		
x_i	.... $P(X=x_i, Y=y_j)$	$P(X=x_i)$ = Zeilensumme
$\vdots$	$\vdots$	
x_n		
$P(Y=\cdot)$	$P(Y=y_j)$ = Spaltensumme	1

Unabhängigkeit von X und Y:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$$

für alle $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

Satz: • $X_1, \dots, X_n$ unabh. $\Rightarrow$ $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ unabh.

• $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ unabh. $\Rightarrow$

$f(X_1, \dots, X_m)$ und $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ unabh.

Satz: Seien $X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV und $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fkten.
Dann sind die ZV $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ ebenfalls unabh.

Beweis: Wir zeigen die Beh. für $n = 2$ (für $n > 2$ geht's ähnlich!)

z.z.: Für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(g_1(X_1) = y_1 ; g_2(X_2) = y_2) = P(g_1(X_1) = y_1) \cdot P(g_2(X_2) = y_2)$$

$$P(g_1(X_1) = y_1, g_2(X_2) = y_2) = \sum_{\substack{(x_1, x_2) \text{ mit} \\ g_1(x_1) = y_1 \text{ und } g_2(x_2) = y_2}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$\underset{X_1, X_2 \text{ unabh.}}{=} \sum_{(x_1, x_2) \text{ mit} \dots} P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2)$$

$$\underset{\substack{\text{erst über } x_2 \\ \text{summieren, dann} \\ \text{über } x_1}}{=} \sum_{\substack{x_1 \text{ mit} \\ g_1(x_1) = y_1}} \sum_{\substack{x_2 \text{ mit} \\ g_2(x_2) = y_2}} P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\substack{x_1 \text{ mit} \\ g_1(x_1) = y_1}} P(X_1 = x_1) \right)}_{= P(g_1(X_1) = y_1)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\substack{x_2 \text{ mit} \\ g_2(x_2) = y_2}} P(X_2 = x_2) \right)}_{= P(g_2(X_2) = y_2)}$$

$\boxed{B}$

<u>Satz</u> (Rechnen mit Erwartungswerten)

Es seien X und Y diskrete ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ existieren (bzw. beide $= +\infty$ oder beide $= -\infty$ sind!), $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, so dass $\mathbb{E}(g(X))$ existiert. Dann gilt:

(1) $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{\substack{x \\ (\text{Werte von } X)}} g(x) \cdot P(X=x)$$

(2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{E}(aX+b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

(der Erwartungswert ist linear)

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

<u>Beweis</u>: (1) $$\sum_x g(x) \cdot P(X=x) \underset{\text{Umsortieren!}}{=} \sum_y \sum_{\substack{x \text{ mit} \\ g(x)=y}} \overbrace{g(x)}^{=y} \cdot P(X=x)$$

$$= \sum_y y \cdot \Big(\sum_{\substack{x \text{ mit} \\ g(x)=y}} P(X=x) \Big) = \sum_y y \cdot P(g(X)=y)$$

$$= \mathbb{E}(g(X))$$

(2) Mit $g(x) = ax+b$ folgt aus (1):

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_x (ax+b) \cdot P(X=x) = a \cdot \underbrace{\sum_x x \cdot P(X=x)}_{= \mathbb{E}(X)} + b \cdot \underbrace{\sum_x P(X=x)}_{=1}$$

$$= a \cdot \mathbb{E}(X) + b$$

Mit dem Satz über die totale W.keit folgt:

$$\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \sum_x x \cdot \underbrace{\Big(\sum_y P(X=x, Y=y) \Big)}_{= P(X=x)} + \sum_y y \Big(\sum_x P(\ldots) \Big)$$

$$= \sum_x \sum_y (x+y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

und

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_z z \cdot P(X+Y = z)$$

$$= \sum_z z \cdot \Big(\sum_y \underbrace{P(X+Y = z, Y = y)}_{= P(X = z-y, \, Y = y)} \Big)$$

Setze $x := z-y$
(Summation über $z \mathrel{\widehat{=}}$ Summation über x)

$$= \sum_x (x+y) \cdot \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_x \sum_y (x+y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

$$= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

$\blacksquare$